Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла.

Г. В. Колосова.

Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла приводятся, какъ извѣстно, къ виду:

$$Mx'' = V_x, \quad My'' = V_y, \quad Mz'' = V_z,$$

$$\left.\begin{aligned} Ap' &= (B-C)\,qr + Л_\xi, \\ Bq' &= (C-A)\,rp + Л_\eta, \\ Cr' &= (A-B)\,pq + Л_\zeta, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ x, y, z координаты его центра инерціи C *) по отношенію къ 3-мъ неподвижнымъ въ пространствѣ осямъ OX, OY, OZ, V_x, V_y, V_z проэкціи на эти оси главнаго вектора силъ и реакцій связей, приложенныхъ къ тѣлу, p, q, r проэкціи угловой скорости его на главныя оси инерціи Ξ, Y, Z въ C, а $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ проэкціи на послѣднія главнаго момента силъ и реакцій.

Вообразивъ въ C перпендикуляръ Z къ круговымъ сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида нашего тѣла въ этой точкѣ, сдѣлаемъ слѣдующее предположеніе на счетъ силъ и реакцій связей: главный моментъ ихъ вокругъ Z остается все время движенія равнымъ нулю. Если α, β, γ будутъ косинусы угловъ, образованныхъ этимъ перпендикуляромъ съ осями инерціи, то

$$\beta = 0, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1, \quad A\alpha^2 (B-C) = C\gamma^2 (A-B) \;**), \qquad (2)$$

*) Дифференціальныя уравненія (1) будутъ имѣть тотъ же видъ, если C не центръ инерціи, а какая угодно точка тѣла, но неподвижная. Все нижеслѣдующее распространимо и на этотъ случай.

**) Мы предполагаемъ A, B, C различными другъ отъ друга и

$$A > B > C.$$

откуда между прочимъ:

$$A\alpha^2 + C\gamma^2 = \frac{AC}{B}, \tag{3}$$

а предположенiе на счетъ силъ и реакцiй будетъ:

$$Л_\xi \alpha + Л_\zeta \gamma = 0. \tag{4}$$

Дифференцiальныя уравненiя (1) допускаютъ въ этихъ предположенiяхъ частное рѣшенiе, соотвѣтствующее уравненiю

$$A\alpha p + C\gamma r = 0, \tag{5}$$

выражающему, что главный моментъ количествъ движенiя лежитъ все время въ плоскости круговыхъ сѣченiй гирацiоннаго эллипсоида. Въ настоящей замѣткѣ мы изслѣдуемъ это частное рѣшенiе и для этого вмѣсто главныхъ осей инерцiи Ξ, Y, Z мы примемъ за оси неизмѣнно связанныя съ тѣломъ оси X, Y, Z, получающiяся изъ Ξ, Y, Z, если мы повернемъ послѣднiя около оси Y до совпаденiя Z съ Z. Будемъ имѣть слѣдующiя формулы преобразованiя:

$$P = \gamma p - \alpha r, \quad Q = q, \quad R = \alpha p + \gamma r \; *) \tag{6}$$

и наоборотъ:

$$p = \gamma P + \alpha R \qquad \text{и т. д..} \tag{7}$$

Такiя же формулы мы получимъ для преобразованiя $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ въ моменты вокругъ осей X, Y, Z: $Л_X$, $Л_Y$, $Л_Z$, напримѣръ изъ (7), замѣчая, что $Л_Z = 0$, получимъ:

$$Л_\xi = \gamma Л_X. \tag{8}$$

Дифференцируя (6) и пользуясь (1), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \gamma\frac{dp}{dt} - \alpha\frac{dr}{dt} = q\left(\frac{\gamma}{A}(B-C)r - \frac{\alpha}{C}(A-B)p\right) + \\ &\qquad + \frac{C\gamma Л_\xi - A\alpha Л_\zeta}{AC} \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}rp + \frac{Л_\eta}{B}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

*) P, Q, R проэкцiи угловой скорости на новыя оси.

Изъ формулъ (6) при помощи (5) и условія (3), получимъ:

$$P = \frac{Ap}{B\gamma},$$

$$R = \frac{\gamma(A-C)r}{A},$$

$$\frac{\gamma}{A}(B-C)r - \frac{\alpha}{C}(A-B)p = \left(\frac{\gamma}{A}(B-C) + \frac{\alpha}{C}(A-B)\frac{C\gamma}{A\alpha}\right)r = R,$$

$$\frac{C-A}{B}rp = -RP.$$

Точно также на основаніи (4), (3) и (8):

$$\frac{C\gamma Л_\xi - A\alpha Л_\zeta}{AC} = \left(\frac{\gamma}{A} + \frac{\alpha^2}{C\gamma}\right)Л_\xi = \frac{A\alpha^2 + C\gamma^2}{AC\gamma}Л_\xi = \frac{Л_\xi}{B\gamma} = \frac{Л_X}{B},$$

и уравненія (9) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= RQ + \frac{Л_X}{B}, \\ \frac{dQ}{dt} &= -RP + \frac{Л_Y}{B}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Эти 2 уравненія вмѣстѣ съ (5), которое при новыхъ осяхъ приметъ видъ:

$$R - aP = 0, \quad \left(\text{гдѣ} \quad a = \frac{B(C-A)\alpha\gamma}{AC}\right), \qquad (11)$$

мы примемъ вмѣсто уравненій системы (1), и тогда эта система выразитъ слѣдующую особенность нашей задачи: при рѣшеніи ея, данное матерьяльное твердое тѣло можно замѣнить нематерьяльнымъ одинаковаго съ нимъ вида, къ разнымъ точкамъ котораго приложены силы совершенно также, какъ къ нашему тѣлу, и движенія котораго стѣснены тѣми же связями, какъ и нашего, а по оси Z новаго тѣла расположена масса M въ видѣ безконечно тонкаго стержня такъ, что центръ инерціи ея въ C, а моментъ инерціи относительно C равенъ B, если только къ полученнымъ въ этихъ предположеніяхъ дифференціальнымъ уравненіямъ прибавить уравненіе (11).

Для дальнѣйшаго интегрированія мы предположимъ, что относительное расположеніе осей OX, OY, OZ и $O\mathrm{X}$, $O\mathrm{Y}$, $O\mathrm{Z}$ задано 3-мя Эйлеровыми углами *ж*, *ф*, *э* *), такъ что

*) См. курсъ Аналит. Механики пр. Д. К. Бобылева; наши P, Q, R соотвѣтствуютъ p, q, r Д. К.

$$P = - ж' \sin ф \cos э + ф' \sin э, \qquad R = ж' \cos ф + э', \tag{12}$$

и сдѣлаемъ еще слѣдующія предположенія на счетъ силъ и реакцій: 1) силы имѣютъ потенціалъ; 2) не только главный моментъ силъ и реакцій вокругъ оси Z равенъ 0, но и отдѣльно: моментъ силъ $= 0$ и моменты каждой изъ реакцій $= 0$. Если потенціалъ силъ будетъ U, а уравненія связей: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_p = 0$, гдѣ U, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$ нѣкоторыя функціи отъ x, y, z, $ф$, $ж$, $э$, то послѣднее требованіе равносильно требованію, чтобы уголъ $э$ не входилъ въ U, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

Въ этихъ предположеніяхъ уголъ $э$ въ дѣйствительности войдетъ только въ уравненіе (11), а въ ураненія (10) войдетъ только видимымъ образомъ и немедленно изчезнетъ, если вмѣсто проэкцій на оси X и Y мы введемъ проэкціи на направленіе CN, перпендикулярное къ плоскости, опредѣляемой направленіями CZ, CZ, и на перпендикулярное къ CN пересѣченіе плоскостей XY и ZZ. Уравненіе (11) и система (10) могутъ быть тогда интегрированы отдѣльно. Уравненіе (11) по введеніи въ него выраженій (12) приметъ видъ:

$$ж' \cos ф + э' - a(ф' \sin э - ж' \sin ф \cos э) = 0.$$

Введя въ него новую перемѣнную,

$$\tau = e^{э\sqrt{-1}} = \cos э + \sqrt{-1} \sin э,$$

приведемъ его къ виду:

$$\frac{d\tau}{dt} = l\tau^2 + m\tau + n, \tag{13}$$

гдѣ

$$l = \frac{a}{2}(ф' - \sqrt{-1} \sin ф\, ж'),$$

$$m = -\sqrt{-1} \cos ф\, ж',$$

$$n = -\frac{a}{2}(ф' + \sqrt{-1} \sin ф\, ж').$$

Уравненіе (13), какъ извѣстно, подстановкою $\tau = -\dfrac{1}{l}\dfrac{\omega'}{\omega}$ сводится къ линейному уравненію 2-го порядка въ ω.

Примѣры:

1) Движеніе по инерціи $Л_\xi = Л_\eta = Л_\zeta = 0$.

Замѣнивъ данное тѣло стержнемъ, сведемъ задачу къ вопросу о движеніи по инерціи безконечно тонкаго стержня. Это есть равномѣрное вращеніе около оси, сохраняющей постоянное направленіе въ пространствѣ, такъ что при надлежащемъ выборѣ осей OX, OY, OZ можно положить:

$$ж = 0\,, \qquad ф = \omega t.$$

Уравненіе (11) будетъ $э' = a\omega \sin э$, откуда

$$\operatorname{tang} \frac{э}{2} = e^{a\omega t + \varepsilon}\,,$$

гдѣ ε постоянное произвольное.

2) Вращеніе твердаго тѣла (тяжелаго) вокругъ неподвижной точки на оси Z (случай Гесса-Некрасова). Замѣнивъ тѣло стержнемъ, найдемъ, что движеніе центра инерціи совершается по законамъ коническаго маятника; въ уравненіи (13) коэффиціенты выразятся въ эллиптическихъ функціяхъ (см. статью пр. П. А. Некрасова. Мат. Сб., XVIII).

3) Движеніе твердаго тяжелаго тѣла, опирающагося остріемъ (на оси Z) на гладкую плоскость (волчекъ Гесса)*). Замѣнивъ тѣло стержнемъ, приведемъ задачу къ обращенію ультраэллиптическаго интеграла, а въ уравненіи (13) коэффиціенты будутъ зависѣть отъ функцій, получающихся черезъ такое обращеніе.

Въ заключеніе замѣтимъ, что наше тѣло можетъ составлять часть цѣлой системы тѣлъ и, если взаимодѣйствія его съ другими тѣлами подчинены условіямъ, требуемымъ нашей задачей для реакцій связей,— все сказанное нами распространимо и на этотъ случай. Какъ примѣръ, разсмотримъ слѣдующую задачу:

4) Катаніе сферы съ гироскопомъ Гесса внутри по горизонтальной плоскости безъ скольженія. Эта задача одинакова съ задачей Д. К. Бобылева о сферѣ съ гироскопомъ внутри, только вмѣсто оси симметріи съ однимъ изъ діаметровъ шара неизмѣнно связанъ перпендикуляръ Z. Замѣняя данное тѣло стержнемъ и предполагая вмѣстѣ съ проф. Н. Е. Жуковскимъ, что въ экваторіальной плоскости (перпендикулярной къ Z) имѣется кольцо **), разность моментовъ инерціи котораго около оси Z и экваторіальной оси $= B$, мы сведемъ нашу задачу къ задачѣ о катаніи однородной сферы по горизонтальной плоскости безъ скольженія. Направленіе и величина угловой скорости сферы остаются здѣсь, какъ извѣстно, неизмѣнными, и надлежащимъ образомъ выбравъ оси OX, OY, OZ, можно положить:

$$ж = \omega t\,, \qquad ф = \alpha.$$

---

*) Распространимость случая Гесса на волчекъ Гесса замѣчена пр. А. М. Ляпуновымъ и почти одновременно мною.

**) При отсутствіи кольца задача приводитъ къ эллиптическимъ функціямъ подобно задачѣ Д. К. Бобылева.

Уравненіе (11) будетъ:

$$\omega \cos\alpha + \vartheta' + a\omega \sin\alpha \cos\vartheta = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} = -\sqrt{\frac{a\sin\alpha+\cos\alpha}{a\sin\alpha-\cos\alpha}\;\frac{e^{(\omega t+\varepsilon)\sqrt{a^2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}}+1}{e^{(\omega t+\varepsilon)\sqrt{a^2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}}-1}},$$

гдѣ ε постоянное произвольное.