Объ одномъ вопросѣ, касающемся линейныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ періодическими коэффиціентами.

А. М. Ляпунова.

1. Мы разсматриваемъ здѣсь дифференціальныя уравненія вида

$$\frac{d^2x}{ds^2}+px=0, \tag{1}$$

въ предположеніи, что p есть извѣстная періодическая функція вещественнаго перемѣннаго s, опредѣленная и непрерывная для всѣхъ его значеній; при чемъ исключительно останавливаемся на соображеніяхъ, касающихся рѣшенія слѣдующаго важнаго въ извѣстныхъ случаяхъ вопроса:

Дана функція p; требуется узнать, могутъ ли быть назначаемы, при неограниченной измѣняемости s, какіе-либо высшіе предѣлы для модуля функціи x и ея производной $\frac{dx}{ds}$ во всякомъ рѣшеніи уравненія (1)?

Извѣстная теорія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами позволяетъ заключить, что рѣшеніе этого вопроса зависитъ главнымъ образомъ отъ свойствъ одного постояннаго, играющаго весьма важную роль въ теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Постоянное это мы можемъ опредѣлить формулою

$$A=\frac{1}{2}[f(\sigma)+\varphi'(\sigma)],$$

разумѣя подъ σ періодъ функціи p и подъ $f(s)$, $\varphi(s)$ частныя рѣшенія уравненія (1), подчиненныя условіямъ

$$f(0)=1, \qquad f'(0)=0,$$
$$\varphi(0)=0, \qquad \varphi'(0)=1.$$

Значеніе постояннаго A для нашего вопроса обнаруживается изъ выраженія общаго интеграла уравненія (1), который при A^2 неравномъ 1 имѣетъ видъ

$$x = C_1 \varrho^{\frac{s}{\sigma}} F_1(s) + C_2 \varrho^{-\frac{s}{\sigma}} F_2(s).$$

Здѣсь

$$\varrho = A + \sqrt{A^2 - 1},$$

C_1, C_2 суть произвольныя постоянныя, а $F_1(s)$, $F_2(s)$ означаютъ нѣкоторыя періодическія функціи s съ періодомъ σ, всегда опредѣленныя и непрерывныя вмѣстѣ со своими первыми производными.

При $A^2 = 1$ выраженіе общаго интеграла можетъ быть нѣсколько инымъ и вообще въ случаѣ $A = 1$ будетъ вида

$$x = C_1 F_1(s) + C_2 [F_2(s) + \varepsilon s F_1(s)],$$

въ случаѣ-же $A = -1$ вида

$$x = C_1 e^{\frac{i\pi s}{\sigma}} F_1(s) + C_2 e^{\frac{i\pi s}{\sigma}} [F_2(s) + \varepsilon s F_1(s)].$$

Здѣсь ε означаетъ нуль или единицу, $i = \sqrt{-1}$, а C_1, C_2, $F_1(s)$, $F_2(s)$ имѣютъ прежнее значеніе.

Изъ этихъ формулъ видно, что вопросъ нашъ разрѣшается тотчасъ-же всякій разъ, когда вычислено A и величина этого постояннаго оказывается отличною какъ отъ $+1$, такъ и отъ -1. При этомъ въ случаѣ, когда A оказывается числомъ вещественнымъ, удовлетворяющимъ неравенству $A^2 < 1$, вопросъ разрѣшается въ утвердительномъ смыслѣ; во всѣхъ другихъ случаяхъ, когда A^2 не равно 1, онъ рѣшается отрицательно.

Что касается случаевъ $A = 1$ и $A = -1$, то для нихъ необходимо дополнительное изслѣдованіе, касающееся величины ε. Но на этомъ изслѣдованіи мы здѣсь не останавливаемся, такъ-какъ въ практическомъ отношеніи оно не могло-бы имѣть большого значенія, въ виду трудности обнаружить самое существованіе равенства $A^2 = 1$ при тѣхъ приближенныхъ способахъ вычисленія A, которые остаются въ нашемъ распоряженіи, когда уравненіе (1) не можетъ быть проинтегрировано въ конечномъ видѣ.

Мы будемъ далѣе предполагать, что функція p принимаетъ только вещественныя значенія. При этомъ A всегда будетъ числомъ вещественнымъ, и если случай $A^2 = 1$ оставимъ въ сторонѣ, то всѣ остальные возможные случаи приведутся къ двумъ:

1) $A^2 < 1$, когда во всякомъ рѣшеніи уравненія (1) для модулей x и $\frac{dx}{ds}$ будутъ существовать нѣкоторые высшіе предѣлы, и

2) $A^2 > 1$, когда во всякомъ рѣшеніи, отличномъ отъ очевиднаго $x = 0$, модули x и $\frac{dx}{ds}$ надлежащимъ выборомъ s могутъ быть дѣлаемы сколь угодно большими.

Эти два случая мы здѣсь и разсматриваемъ, трактуя уравненіе (1) лишь постольку, поскольку дѣло касается различныхъ свойствъ функціи p, обусловливающихъ то или другое изъ неравенствъ $A^2 < 1$ и $A^2 > 1$.

2. Такъ-какъ невозможно указать какую-либо методу, которая позволяла-бы всегда при помощи конечнаго числа дѣйствій узнавать, имѣемъ-ли мы дѣло съ однимъ изъ двухъ указанныхъ сейчасъ случаевъ, то желательно по крайней мѣрѣ знать возможно большее число признаковъ, достаточныхъ для каждаго изъ этихъ случаевъ.

Таковы два признака, указанные нами въ сочиненіи *Общая задача объ устойчивости движенія.*

На основаніи показаннаго тамъ, всякій разъ, когда функція p въ уравненіи (1) удовлетворяетъ условію

$$p \leqq 0,$$

каково-бы ни было s, и при этомъ не равна нулю постоянно, мы можемъ быть увѣрены въ существованіи неравенства

$$A > 1.$$

Такимъ образомъ условіе $p \leqq 0$ служитъ несомнѣннымъ признакомъ второго случая.

Что касается условія

$$p \geqq 0$$

для всѣхъ значеній s, то какъ можно убѣдиться на примѣрахъ и какъ будетъ видно изъ того, что покажемъ далѣе, оно еще недостаточно для возможности какихъ-либо заключеній относительно A. Но если при этомъ условіи выполняется еще слѣдующее:

$$\sigma \int_0^\sigma p\,ds \leqq 4, \tag{2}$$

въ предположеніи, конечно, что функція p не равна нулю тожественно, мы можемъ быть увѣрены въ существованіи неравенства

$$A^2 < 1.$$

Другой признакъ того-же неравенства, при томъ-же условіи $p \geqq 0$ былъ указанъ потомъ профессоромъ Н. Е. Жуковскимъ *).

Этотъ во многихъ отношеніяхъ замѣчательный признакъ требуетъ только разысканія тѣхъ предѣловъ, между которыми измѣняется функція p.

Означая точный высшій предѣлъ этой функціи черезъ a^2, точный низшій предѣлъ ея черезъ b^2 и предполагая $a > 0$, $b \geqq 0$, мы можемъ признакъ профессора Н. Е. Жуковскаго выразить условіемъ

$$\frac{\sigma}{\pi} a \leqq E \frac{\sigma}{\pi} b + 1\,, \text{ **)} \tag{3}$$

если вообще подъ EN будемъ разумѣть, какъ это принято, наибольшее цѣлое число, непревосходящее N.

Всякій разъ, когда выполняется это условіе и функція p не приводится къ постоянному количеству, мы можемъ заключать о существованіи неравенства $A^2 < 1$.

Въ случаѣ $p = \text{const}$ условіе (3) всегда выполняется; но въ этомъ случаѣ неравенство $A^2 < 1$ можетъ переходить въ равенство $A^2 = 1$, что происходитъ всякій разъ, когда за періодъ σ принимается какая-либо цѣлая кратность числа $\dfrac{\pi}{\sqrt{p}}$.

Признакъ Н. Е. Жуковскаго, обнимая собою тѣмъ большее число случаевъ, чѣмъ (при томъ-же σ) теснѣе предѣлы, въ которыхъ измѣняется функція $\sqrt{p}$, и ничего не предполагая относительно низшаго предѣла этой функціи, имѣетъ въ этомъ отношеніи важное преимущество передъ нашимъ признакомъ (2), который для частнаго случая $p = \text{const}$ даетъ не болѣе, чѣмъ для общаго, и возможенъ лишь при условіи $b \leqq \dfrac{2}{\sigma}$. Но взамѣнъ того нашъ признакъ имѣетъ то преимущество, что не зависитъ отъ ширины предѣловъ функціи $\sqrt{p}$, тогда какъ признакъ Н. Е. Жуковскаго требуетъ, чтобы разность $a - b$ не превосходила числа $\dfrac{\pi}{\sigma}$.

Чтобы выводы, получаемые изъ этихъ признаковъ, сравнить на какомъ-либо примѣрѣ, разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)x = 0\,,$$

*) Математическій Сборникъ, томъ XVI, стр. 582.

**) Какъ здѣсь, такъ и вездѣ далѣе, періодъ σ предполагается числомъ положительнымъ.

гдѣ λ и ε означаютъ нѣкоторыя вещественныя постоянныя и численная величина ε предполагается непревосходящею 1.

Нетрудно видѣть, что для этого уравненія величина A не зависитъ отъ знака ε. Мы можемъ поэтому ограничиться предположеніемъ $\varepsilon > 0$.

Въ этомъ предположеніи, разумѣя подъ λ число положительное, будемъ имѣть

$$a = \lambda\sqrt{1+\varepsilon}\,, \qquad b = \lambda\sqrt{1-\varepsilon}\,,$$

и такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ можно принять $\sigma = 2\pi$, то условіе (3) приведется къ виду:

$$2\lambda\sqrt{1+\varepsilon} \leqq E2\lambda\sqrt{1-\varepsilon}+1,$$

что, полагая

$$E2\lambda\sqrt{1-\varepsilon} = n,$$

можно представить такъ:

$$\frac{n}{2\sqrt{1-\varepsilon}} \leqq \lambda \leqq \frac{n+1}{2\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Это условіе требуетъ, чтобы было

$$\varepsilon \leqq \frac{2n+1}{2n^2+2n+1}.$$

Подъ n здѣсь можно разумѣть какое угодно цѣлое положительное число или нуль.

Что касается нашего признака (2), то для разсматриваемаго уравненія онъ приводитъ къ условію

$$\pi\lambda \leqq 1,$$

которое, очевидно, не даетъ ничего новаго и въ сравненіи съ предыдущимъ условіемъ обнимаетъ значительно меньшее число случаевъ.

Для другого примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2 \sin^{2n} s\, x = 0,$$

разумѣя подъ n цѣлое положительное число и подъ λ какое-либо положительное постоянное.

Такъ какъ здѣсь

$$a = \lambda, \qquad b = 0$$

и при томъ можно принять $\sigma = \pi$, то условіе (3) приводится къ слѣдующему:

$$\lambda \leqq 1\,;$$

условіе-же (2) даетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}\,\frac{4}{\pi^2}\,.$$

Отсюда видно, что въ случаѣ $n = 1$ признакъ Н. Е. Жуковскаго даетъ болѣе; во всѣхъ-же другихъ случаяхъ болѣе широкія заключенія выводятся изъ нашего признака.

I.

3. Указанные выше признаки неравенствъ $A^2 > 1$ и $A^2 < 1$ относятся лишь къ случаямъ, когда функція p сохраняетъ всегда одинъ и тотъ-же знакъ. Но разсматривая уравненіе (1) въ связи съ различными его преобразованіями, можно трактовать на основаніи этихъ признаковъ и случаи, когда функція p мѣняетъ знакъ въ предѣлахъ періода.

Допустимъ, что вмѣсто неизвѣстной функціи x вводится y при помощи уравненія

$$x = wy\,,$$

гдѣ w означаетъ нѣкоторую данную функцію перемѣннаго s.

Тогда, принимая вмѣсто s за независимое перемѣнное величину

$$t = \int_0^s \frac{ds}{w^2}\,, \tag{4}$$

мы преобразуемъ уравненіе (1) въ уравненіе того-же вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = 0\,, \tag{5}$$

гдѣ

$$q = w^3(w'' + pw)$$

и w'' означаетъ производную $\dfrac{d^2w}{ds^2}$.

*

Разсматривая такія преобразованія, мы будемъ здѣсь предполагать, что w есть вещественная періодическая функція перемѣннаго s съ періодомъ σ, никогда не обращающаяся въ нуль и обладающая непрерывными производными w' и w''. Тогда перемѣнное t будетъ вещественнымъ, способнымъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$, и въ силу (4) q будетъ непрерывною періодическою функціей t съ періодомъ

$$\tau = \int_0^\sigma \frac{ds}{w^2}.$$

Такимъ образомъ преобразованное уравненіе будетъ того-же характера, что и первоначальное. При томъ, если положимъ

$$B = \frac{1}{2}\left[F(\tau) + \Phi'(\tau)\right],$$

разумѣя подъ $F(t)$, $\Phi(t)$ частныя рѣшенія уравненія (5), опредѣляемыя условіями

$$F(0) = 1\,, \qquad F'(0) = 0\,,$$
$$\Phi(0) = 0\,, \qquad \Phi'(0) = 1\,,$$

то при сдѣланныхъ предположеніяхъ будетъ

$$B = A\,,$$

гдѣ A относится къ уравненію (1) и соотвѣтствуетъ періоду σ.

Вслѣдствіе этого всякій разъ, когда какой либо изъ извѣстныхъ признаковъ обнаруживаетъ существованіе того или другого изъ неравенствъ $A^2 < 1$, $A^2 > 1$ для уравненія (5), мы можемъ заключать о существованіи того-же неравенства и для уравненія (1).

Такимъ образомъ, исходя изъ указанныхъ выше признаковъ, можно разсматривать и случаи, въ которыхъ эти признаки при непосредственномъ примѣненіи не выполняются.

4. Чтобы на чемъ-либо остановиться, мы будемъ предполагать, что функція w всегда остается положительною.

Въ этомъ предположеніи, всякій разъ, когда функцію эту удастся подобрать такъ, чтобы для всѣхъ значеній s выполнялось условіе

$$w'' + pw \leqq 0 \tag{6}$$

(не приводящееся постоянно къ равенству), на основаніи замѣченнаго сейчасъ можно утверждать, что для уравненія (1) будетъ имѣть мѣсто неравенство $A > 1$.

Обратимъ вниманіе на одинъ способъ выбора функціи w, позволяющій иногда удовлетворить условію (6).

Разумѣя подъ k какое-либо отличное отъ нуля вещественное постоянное, при которомъ $\frac{k\sigma}{2\pi}$ не приводилось-бы къ числу цѣлому, опредѣлимъ w, какъ періодическое рѣшеніе уравненія

$$w'' + k^2 w = k^2 - p. \tag{7}$$

При сказанномъ условіи относительно k такое рѣшеніе всегда найдется и, если угодно, можетъ быть выражено формулою

$$w = 1 - \frac{1}{2k \sin\frac{k\sigma}{2}} \int_s^{\sigma+s} \cos k\left(s_1 - s - \frac{\sigma}{2}\right) p(s_1)\, ds_1$$

или, что то же самое,

$$w = 1 - \frac{1}{2k \sin\frac{k\sigma}{2}} \int_0^{\sigma} \cos k\left(s_1 - \frac{\sigma}{2}\right) p(s_1 + s)\, ds_1, \tag{8}$$

если функцію p, желая указать ея аргументъ s, будемъ обозначать черезъ $p(s)$.

Допустимъ теперь, что въ какомъ либо случаѣ постоянное k оказалось возможнымъ подобрать такъ, чтобы для всѣхъ значеній s выполнялись условія

$$k^2 - p \geqq 0, \quad w - 1 \geqq 0. \tag{9}$$

Тогда, замѣчая, что въ силу (7)

$$w'' + pw = -(w-1)(k^2 - p),$$

мы удовлетворимъ условію (6) и можемъ заключить о существованіи неравенства $A > 1$.

Формулою (8) опредѣляется періодическое рѣшеніе уравненія (7) съ періодомъ σ, и въ случаѣ, когда $\frac{k\sigma}{2\pi}$ не представляетъ числа соизмѣримаго, это есть единственное періодическое рѣшеніе этого уравненія. Но когда

$$\frac{k\sigma}{2\pi} = \frac{l}{m}, \tag{10}$$

гдѣ l и m числа цѣлыя и l не дѣлится на m, уравненіе (7) имѣетъ безчисленное множество другихъ періодическихъ рѣшеній, съ періодомъ $m\sigma$. При этомъ, отбрасывая предположеніе, что періодомъ функціи w должно служить число σ, мы могли-бы за w принять одно изъ этихъ послѣднихъ рѣшеній, и можно замѣтить, что и въ такомъ случаѣ всякій разъ, когда удалось-бы удовлетворить условіямъ (9), мы могли-бы заключить, если не о существованіи неравенства $A > 1$, то по крайней мѣрѣ о существованіи неравенства $A^2 > 1$.

Нетрудно, однако, убѣдиться, что разсмотрѣніе рѣшеній, о которыхъ идетъ рѣчь, не можетъ доставить чего либо новаго, что не могло-бы быть получено при посредствѣ выраженія (8).

Дѣйствительно, означая функцію (8) черезъ $\psi(s)$, мы получимъ всѣ рѣшенія уравненія (7) по формулѣ

$$w = \psi(s) + C\cos(ks + \alpha), \tag{11}$$

гдѣ C и α произвольныя постоянныя, и въ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто равенство (10), всѣ эти рѣшенія будутъ періодическими съ періодомъ $m\sigma$.

Допустимъ, что между этими рѣшеніями существуетъ такое, для котораго $w - 1 \geqq 0$, каково-бы ни было s. Останавливаясь на немъ и замѣняя s на $s + j\sigma$, гдѣ j какое угодно цѣлое число, будемъ имѣть

$$\psi(s) - 1 + C\cos(ks + \alpha + jk\sigma) \geqq 0;$$

а дѣлая здѣсь послѣдовательно

$$j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m - 1$$

(число m мы предполагаемъ положительнымъ), складывая затѣмъ всѣ получаемыя такимъ путемъ неравенства и замѣчая, что при l не дѣлящемся на m

$$\sum_{j=0}^{m-1} \cos\left(ks + \alpha + 2\pi j \frac{l}{m}\right) = 0,$$

найдемъ

$$m\psi(s) - m \geqq 0.$$

Отсюда видно, что, каковы-бы ни были C и α въ формулѣ (11), условія (9) не могутъ удовлетворяться, не будучи удовлетворены при $C = 0$.

Вслѣдствіе этого и въ случаѣ $\frac{k\sigma}{2\pi}$ соизмѣримаго можно ограничиваться формулой (8).

Но это справедливо лишь въ предположеніи, что исключаются цѣлыя значенія $\frac{k\sigma}{2\pi}$. Если-же разсматриваются и послѣднія, въ тѣхъ случаяхъ, когда уравненіе (7) при извѣстныхъ цѣлыхъ значеніяхъ $\frac{k\sigma}{2\pi}$ допускаетъ періодическія рѣшенія, то желая получить все, что можетъ дать разсматриваемая метода, мы не должны ограничиваться тѣмъ выраженіемъ w, которое для такихъ значеній $\frac{k\sigma}{2\pi}$ могло-бы быть получено, какъ предѣльное, изъ формулы (8), ибо при $\frac{k\sigma}{2\pi}$ цѣломъ общее выраженіе w, какъ увидимъ, можетъ доставить иногда нѣчто новое.

5. Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \lambda^2(1 - \varepsilon \sin^n s)\, x = 0\,,$$

разумѣя подъ n цѣлое положительное число и подъ λ, ε какія либо вещественныя постоянныя.

Такъ какъ въ случаѣ n четнаго при $\varepsilon < 0$ функція

$$p = -\lambda^2(1 - \varepsilon \sin^n s)$$

всегда отрицательна и слѣдовательно въ разсматриваемомъ преобразованіи нѣтъ надобности, а въ случаѣ n нечетнаго величина A, соотвѣтствующая нашему уравненію, очевидно, не зависитъ отъ знака ε, то мы можемъ здѣсь ограничиться предположеніемъ $\varepsilon > 0$.

Въ этомъ предположеніи, для того, чтобы было $k^2 - p \geqq 0$ при всякомъ s, мы должны выбрать k согласно условію

$$k^2 + \lambda^2 - \lambda^2 \varepsilon \geqq 0\,. \tag{12}$$

Принимая затѣмъ $\sigma = 2\pi$ и предполагая, что k не есть число цѣлое, по формулѣ (8) находимъ

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} - \frac{\lambda^2 \varepsilon}{2k \sin k\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(s_1 - \pi) \sin^n(s_1 + s)\, ds_1\,.$$

Вслѣдствіе этого условіе $w - 1 \geqq 0$ принимаетъ видъ

$$\frac{k\varepsilon}{2 \sin k\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(s_1 - \pi) \sin^n(s_1 + s)\, ds_1 \leqq 1 \tag{13}$$

и въ случаѣ n нечетнаго приводится къ слѣдующему:

$$\frac{k\varepsilon}{2\cos\frac{k\pi}{2}}\int\limits_0^\pi \sin k\left(s_1-\frac{\pi}{2}\right)\sin^n(s_1+s)\,ds_1 \leqq 1\,,$$

въ случаѣ-же n четнаго — къ слѣдующему:

$$\frac{k\varepsilon}{2\sin\frac{k\pi}{2}}\int\limits_0^\pi \cos k\left(s_1-\frac{\pi}{2}\right)\sin^n(s_1+s)\,ds_1 \leqq 1\,.$$

Не останавливаясь на изслѣдованіи этихъ условій при неопредѣленномъ n, замѣтимъ только, что, каковы-бы ни были λ и ε, число n всегда можно взять достаточно большимъ для того, чтобы надлежащимъ выборомъ k условіямъ (12) и (13) возможно было удовлетворить. Съ другой стороны, въ случаѣ n нечетнаго, каковы-бы ни были n и ε, мы всегда будемъ въ состояніи удовлетворить этимъ условіямъ, сдѣлавши λ^2 достаточно малымъ. Что касается случая n четнаго, то условіе (13) не всегда будетъ возможно и для возможности его необходимо, чтобы при данномъ n число ε было менѣе нѣкотораго предѣла, ибо въ этомъ случаѣ изъ (13), интегрированіемъ по s въ предѣлахъ отъ 0 до π выводимъ

$$\varepsilon < \frac{2.4\ldots n}{1.3\ldots(n-1)};$$

когда-же выполнено это неравенство, условію (13) всегда можно удовлетворить, дѣлая k^2 достаточно малымъ.

Число k мы предполагали дробнымъ; но ему можно здѣсь приписывать и цѣлыя неравныя нулю значенія: четныя въ случаѣ n нечетнаго и нечетныя въ случаѣ n четнаго, а также—всякія цѣлыя значенія, бóльшія n.

Переходя къ какому либо изъ такихъ значеній k, какъ къ предѣльному, мы получимъ изъ предыдущаго выраженія w нѣкоторое предѣльное выраженіе, которое означимъ $\psi(s)$. Эта функція $\psi(s)$ представитъ одно изъ періодическихъ рѣшеній уравненія (7) для разсматриваемаго цѣлаго значенія k. Всѣ другія рѣшенія того-же уравненія, которыя также будутъ періодическими, опредѣлятся формулою (11).

Согласно вышесказанному, эти рѣшенія, при составленіи условія $w-1 \geqq 0$, должны быть также принимаемы въ разсчетъ. Нужно, однако же, замѣтить, что въ разсматриваемомъ случаѣ, принимая для w выраженіе (11), мы можемъ съ самаго же начала остановиться на нѣкоторомъ опредѣленномъ предположеніи относительно α, а именно: въ случаѣ k четнаго на предположеніи $\alpha = 0$, въ случаѣ k нечетнаго на предположеніи $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія

$$\psi(s) - 1 + C\cos(ks + \alpha) \geqq 0,$$

которое должно имѣть мѣсто при всякомъ s, замѣняя въ немъ s на $\pi - s$ и замѣчая, что

$$\psi(\pi - s) = \psi(s),$$

выводимъ

$$\psi(s) - 1 + C\cos(k\pi - ks + \alpha) \geqq 0;$$

а изъ этихъ двухъ неравенствъ слѣдуетъ

$$\psi(s) - 1 + C\cos\left(\alpha + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(ks - \frac{k\pi}{2}\right) \geqq 0,$$

что въ случаѣ k четнаго приводится къ виду

$$\psi(s) - 1 + C\cos\alpha\cos ks \geqq 0,$$

а въ случаѣ k нечетнаго — къ виду

$$\psi(s) - 1 - C\sin\alpha\sin ks \geqq 0.$$

Отсюда ясно, что при k четномъ можно ограничиваться выраженіемъ

$$w = \psi(s) + C\cos ks,$$

а при k нечетномъ — выраженіемъ

$$w = \psi(s) + C\sin ks.$$

Это послѣднее выраженіе, впрочемъ, можетъ быть полезно только въ случаѣ нечетнаго n, ибо при n четномъ $\psi(s)$ будетъ четною функціей s, вслѣдствіе чего условіе

$$\psi(s) - 1 + C\sin ks \geqq 0$$

потребуетъ слѣдующаго

$$\psi(s) - 1 \geqq 0.$$

Такимъ образомъ въ случаѣ n четнаго достаточно разсматривать отдѣльно только четныя значенія k, что слѣдуетъ также и изъ показаннаго въ предыдущемъ параграфѣ, такъ какъ при n четномъ можно принимать $\sigma = \pi$.

6. Разсмотримъ случай $n = 1$.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ, когда k не есть число цѣлое,

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} + \frac{\lambda^2 \varepsilon}{1 - k^2} \sin s,$$

то для того, чтобы удовлетворить условію $w - 1 \geqq 0$ независимо отъ s, мы должны сдѣлать или

$$\varepsilon \leqq \frac{1 - k^2}{k^2}, \tag{14}$$

предполагая при этомъ $k^2 < 1$, или

$$\varepsilon \leqq \frac{k^2 - 1}{k^2},$$

предполагая $k^2 > 1$.

Но послѣднее предположеніе, въ которомъ ε оказывается менѣе 1, не даетъ ничего новаго, ибо при $\varepsilon < 1$ всегда $p < 0$. Что же касается предположенія $k^2 < 1$, то замѣчая, что изъ условія (14) слѣдуетъ

$$k^2 \leqq \frac{1}{1 + \varepsilon},$$

и принимая въ разсчетъ (12), находимъ:

$$\varepsilon^2 \leqq 1 + \frac{1}{\lambda^2}. \tag{15}$$

Обратно, когда выполнено это условіе, всегда можно надлежащимъ выборомъ k удовлетворить (12) и (14). Поэтому условіе (15) служитъ несомнѣннымъ признакомъ неравенства $A > 1$.

Разсматривая цѣлыя значенія k и принимая при этомъ въ разсчетъ также и другія рѣшенія уравненія (7), мы найдемъ еще нѣкоторыя признаки того же неравенства.

Въ разсматриваемомъ теперь случаѣ числу k можно давать всякія цѣлыя значенія, бóльшія 1, при чемъ, согласно замѣченному въ предыдущемъ параграфѣ, можно принимать

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2 - 1} \left\{ \frac{k^2 - 1}{k^2} - \varepsilon \vartheta\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \right\},$$

полагая

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \sin s - (-1)^{\frac{k}{2}} \mu \cos ks$$

въ случаѣ k четнаго и

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-s\right)=\sin s-(-1)^{\frac{k-1}{2}}\mu\sin ks$$

въ случаѣ k нечетнаго, и разумѣя подъ μ нѣкоторое постоянное.

Изъ этихъ выраженій функціи $\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$ для обоихъ случаевъ, k четнаго и k нечетнаго, слѣдуетъ

$$\vartheta(s)=\cos s-\mu\cos ks\,,$$

а условіе $w-1\geqq 0$ приводится къ виду

$$\varepsilon\,\vartheta(s)\leqq\frac{k^2-1}{k^2}\,. \tag{16}$$

Мы замѣчаемъ теперь, что это условіе въ томъ только случаѣ можетъ доставить нѣчто новое, когда функція $\vartheta(s)$ для всѣхъ значеній s остается менѣе $\frac{k^2-1}{k^2}$. Поэтому, имѣя въ виду, что

$$\vartheta(0)=1-\mu\,,$$

мы должны предполагать

$$1-\mu<\frac{k^2-1}{k^2}$$

или, что равносильно этому,

$$\mu>\frac{1}{k^2}\,. \tag{17}$$

Чтобы получить возможно болѣе, мы должны при томъ выбрать μ такимъ образомъ, чтобы высшій предѣлъ, котораго можетъ достигать функція $\vartheta(s)$, былъ по возможности менѣе.

Мы встрѣчаемся здѣсь, слѣдовательно, съ одною изъ тѣхъ особаго рода задачъ о minima, которыя разсматривались Чебышевымъ.

Наша задача принадлежитъ, конечно, къ числу наиболѣе простыхъ задачъ этого рода и рѣшается безъ всякихъ затрудненій, для чего нужно только идти прямымъ путемъ, указываемымъ самымъ требованіемъ задачи.

Прежде всего мы должны найти наибольшій изъ всѣхъ maxima функціи $\vartheta(s)$.

Такъ какъ $\vartheta(s)$ есть періодическая функція s съ періодомъ 2π и при томъ четная, то для этого достаточно разсматривать лишь тѣ значенія s, которыя лежатъ въ промежуткѣ отъ 0 до π.

Разсматривая этотъ промежутокъ и раздѣляя его на k слѣдующихъ

$$\left(0,\ \frac{\pi}{k}\right),\quad \left(\frac{\pi}{k},\ \frac{2\pi}{k}\right),\quad \left(\frac{2\pi}{k},\ \frac{3\pi}{k}\right),\quad \ldots,\quad \left(\frac{(k-1)\pi}{k},\ \pi\right),$$

мы замѣчаемъ, что въ каждомъ изъ послѣднихъ функція $\cos ks$ можетъ получать всѣ свойственныя ей значенія отъ -1 до $+1$. Вслѣдствіе этого мы должны заключить, что значенія s, соотвѣтствующія высшему предѣлу функціи $\vartheta(s)$, лежатъ въ первомъ промежуткѣ, въ которомъ функція $\cos s$ получаетъ бо́льшія значенія, чѣмъ въ любомъ изъ слѣдующихъ.

Мы можемъ такимъ образомъ ограничиться предположеніемъ

$$0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{k},$$

и въ этомъ предположеніи интересующія насъ значенія s должны искать въ числѣ тѣхъ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$k\mu \sin ks - \sin s = 0.$$

Этому уравненію мы можемъ удовлетворить, дѣлая $s = 0$. Но соотвѣтствующее значеніе функціи $\vartheta(s)$ при условіи (17), которое здѣсь предполагается, есть minimum, а не maximum, ибо

$$\vartheta''(0) = k^2\mu - 1 > 0.$$

Поэтому, полагая

$$k\mu \frac{\sin ks}{\sin s} - 1 = \Phi(s),$$

мы должны обратиться къ уравненію

$$\Phi(s) = 0.$$

Такъ какъ

$$\Phi(0) = k^2\mu - 1\,, \qquad \Phi\left(\frac{\pi}{k}\right) = -1\,,$$

то уравненіе это при условіи (17) всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень между 0 и $\frac{\pi}{k}$; а такъ какъ функція

$$\Phi'(s) = -\frac{k\mu\,\Psi(s)}{\sin^2 s},$$

гдѣ

$$\Psi(s) = \sin ks \cos s - k \cos ks \sin s\,,$$

въ этомъ промежуткѣ отрицательна, ибо

$$\Psi(0) = 0\,, \qquad \Psi'(s) = (k^2 - 1) \sin ks \sin s\,,$$

то разсматриваемое уравненіе не можетъ имѣть въ немъ болѣе одного корня.

Означая этотъ единственный между 0 и $\frac{\pi}{k}$ корень черезъ s_0, мы можемъ такимъ образомъ утверждать, что при условіи (17)

$$\vartheta(s_0) = \cos s_0 - \mu \cos ks_0$$

есть наибольшій изъ всѣхъ maxima функціи $\vartheta(s)$.

Разсматривая этотъ maximum, какъ функцію параметра μ, мы должны теперь послѣдній подобрать такъ, чтобы этотъ maximum сдѣлался возможно менѣе.

Для этого-же, замѣчая, что въ силу уравненія

$$k\mu \sin ks_0 - \sin s_0 = 0\,,$$

при возрастаніи μ отъ $\frac{1}{k^2}$ до ∞, s_0 постоянно возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{k}$, и что въ силу того-же уравненія

$$\frac{d\vartheta(s_0)}{d\mu} = -\cos ks_0\,,$$

мы должны, очевидно, сдѣлать $s_0 = \frac{\pi}{2k}$.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что искомое значеніе μ опредѣляется формулой

$$\mu = \frac{1}{k} \sin \frac{\pi}{2k}\,,$$

и что соотвѣтствующій ему высшій предѣлъ функціи $\vartheta(s)$ равенъ $\cos\frac{\pi}{2k}$.

Останавливаясь на этомъ значеніи μ, обращаемся теперь къ условію (16) и выражаемъ, что оно выполняется независимо отъ s.

Такимъ путемъ проходимъ къ условію

$$\varepsilon \leqq \frac{k^2 - 1}{k^2 \cos\frac{\pi}{2k}}\,, \tag{18}$$

и можемъ утверждать, что всякій разъ, когда условіе это выполняется при какомъ либо цѣломъ k, бо́льшемъ 1 и удовлетворяющемъ условію (12), для уравненія

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \lambda^2 (1 - \varepsilon \sin s)\, x = 0$$

будетъ имѣть мѣсто неравенство $A > 1$.

Относительно условія (18) замѣтимъ, что вторая часть его, при возрастаніи k отъ 2 до ∞, постоянно убываетъ отъ $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ до 1.

Поэтому разсматриваемый признакъ неравенства $A > 1$ примѣнимъ въ тѣхъ лишь случаяхъ, когда

$$\varepsilon \leqq \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Что же касается этихъ случаевъ, то онъ приводитъ къ болѣе широкому заключенію, чѣмъ указанный выше признакъ (15), ибо послѣдній при $\varepsilon > 1$ требуетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{\varepsilon^2 - 1},$$

между тѣмъ какъ разсматриваемый теперь признакъ, въ томъ-же предположеніи $\varepsilon > 1$, можетъ быть выраженъ такъ:

$$\lambda^2 \leqq \frac{k^2}{\varepsilon - 1},$$

гдѣ k наибольшее цѣлое число, удовлетворяющее условію (18).

7. Предложенное выше опредѣленіе функціи w, которая должна была удовлетворять уравненію (7) и условію $w - 1 \geqq 0$, возможно только въ случаѣ, когда интегралъ

$$\int_0^{\sigma} p\, ds$$

представляетъ число отрицательное, ибо изъ уравненія (7) слѣдуетъ

$$\int_0^{\sigma} p\, ds = - k^2 \int_0^{\sigma} (w - 1)\, ds.$$

Но для случая, когда

$$\int_0^{\sigma} p\, ds > 0,$$

можно предложить аналогичное опредѣленіе w, получаемое изъ предыдущаго замѣною k^2 на $-k^2$ и позволяющее иногда сдѣлать

$$w'' + pw \geqq 0 \tag{19}$$

и слѣдовательно $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s.

Дѣйствительно, если подъ k будемъ разумѣть какое либо отличное отъ нуля вещественное постоянное, то уравненіе

$$w'' - k^2 w = -k^2 - p\,, \tag{20}$$

выводимое изъ (7) замѣною k^2 на $-k^2$, всегда будетъ допускать періодическое рѣшеніе, которое, если угодно, можно представить формулою

$$w = 1 + \frac{1}{2k}\int\limits_0^\sigma \frac{e^{-ks_1} + e^{-k(\sigma - s_1)}}{1 - e^{-k\sigma}}\, p(s_1 + s)\, ds_1. \tag{21}$$

Если-же остановимся на такомъ выборѣ функціи w, то будемъ имѣть

$$w'' + pw = (k^2 + p)(w - 1)\,,$$

откуда видно, что всякій разъ, когда постоянное k можетъ быть выбрано такъ, чтобы при всякомъ s выполнялись условія

$$k^2 + p \geqq 0\,, \qquad w - 1 \geqq 0\,, \tag{22}$$

мы можемъ удовлетворить условію (19).

Придя такимъ образомъ къ случаю, когда функція q въ уравненіи (5) будетъ сохранять положительныя значенія, мы можемъ затѣмъ по отношенію къ этому уравненію изслѣдовать признаки неравенства $A^2 < 1$ (2) или (3).

Замѣтимъ, что разсматриваемое преобразованіе можетъ быть полезно и въ случаѣ, когда функція p остается всегда положительною. Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ (21), условія (22) будутъ выполняться при всякомъ k, а выборомъ этого постояннаго, отъ котораго будетъ зависѣть функція q, можно иногда распорядиться такъ, чтобы для уравненія (5) выполнялся какой-либо изъ извѣстныхъ признаковъ неравенства $A^2 < 1$, когда ни одинъ изъ нихъ не удовлетворяется для уравненія (1). Возможность такихъ случаевъ видна уже изъ того, что при разсматриваемомъ выборѣ функціи w уравненіе (1) будетъ заключаться въ уравненіи (5), получаясь изъ него, какъ предѣльный случай, соотвѣтствующій $k^2 = \infty$.

8. Чтобы дать какой нибудь примѣръ, разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)\, x = 0\,,$$

разумѣя подъ λ и ε вещественныя постоянныя, которыя мы можемъ и будемъ предполагать здѣсь положительными.

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$p = \lambda^2 (1 - \varepsilon \sin s),$$

и уравненіе (20) даетъ

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} - \frac{\lambda^2 \varepsilon}{k^2 + 1} \sin s.$$

Вслѣдствіе этого, чтобы удовлетворить условіямъ (22) независимо отъ s, мы должны сдѣлать

$$k^2 + \lambda^2 (1 - \varepsilon) \geqq 0, \quad \frac{k^2 + 1}{k^2} - \varepsilon \geqq 0.$$

При $\varepsilon \leqq 1$ эти условія всегда выполняются. Если-же $\varepsilon > 1$, они возможны только въ случаѣ, когда

$$\lambda (\varepsilon - 1) \leqq 1, \tag{23}$$

и въ этомъ случаѣ приводятся къ слѣдующимъ:

$$\frac{1}{\varepsilon - 1} \geqq k^2 \geqq \lambda^2 (\varepsilon - 1). \tag{24}$$

Предполагая эти условія и останавливаясь на указанномъ опредѣленіи w, мы сдѣлаемъ функцію

$$q = w^3 (k^2 + p)(w - 1)$$

всегда положительною.

При этомъ, полагая

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{k^2 \lambda^2 \varepsilon}{(k^2 + 1)(k^2 + \lambda^2)}, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda^2 \varepsilon}{k^2 + \lambda^2}, \quad \alpha_2 = \frac{k^2 \varepsilon}{k^2 + 1}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

и замѣчая, что

$$w = \frac{k^2 + \lambda^2}{k^2} (1 - \alpha \sin s),$$

$$k^2 + p = (k^2 + \lambda^2)(1 - \alpha_1 \sin s),$$

$$w - 1 = \frac{\lambda^2}{k^2} (1 - \alpha_2 \sin s),$$

будемъ имѣть

$$q = \lambda^2 \frac{(k^2+\lambda^2)^4}{k^8} (1-\alpha \sin s)^3 (1-\alpha_1 \sin s)(1-\alpha_2 \sin s),$$

а по формулѣ

$$\tau = \int_0^\sigma \frac{ds}{w^2},$$

принимая $\sigma = 2\pi$, найдемъ

$$\tau = \frac{k^4}{(k^2+\lambda^2)^2} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{(1-\alpha \sin s)^2} = \frac{2\pi k^4}{(k^2+\lambda^2)^2 (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Займемся теперь разысканіемъ условій для λ и ε, къ которымъ могутъ привести извѣстные намъ признаки неравенства $A^2 < 1$ въ примѣненіи къ уравненію (5).

9. Начинаемъ съ признака (2), который въ примѣненіи къ уравненію (5) выразится слѣдующимъ условіемъ:

$$\tau \int_0^\tau q\, dt \leqq 4$$

или, что то же самое,

$$\tau \int_0^{2\pi} q \frac{ds}{w^2} \leqq 4.$$

Въ силу предыдущихъ формулъ это условіе принимаетъ видъ

$$\frac{\pi^2 \lambda^2}{2} \frac{2+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1 \alpha_2}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \leqq 1 \tag{26}$$

и заключаетъ въ себѣ такимъ образомъ при посредствѣ α, α_1, α_2 постоянное k, которымъ въ извѣстныхъ границахъ можно распоряжаться по произволу.

Наивыгоднѣйшій выборъ k, очевидно, есть тотъ, для котораго первая часть неравенства (26) дѣлается при данныхъ λ и ε возможно меньшею.

При разысканіи этого наименьшаго значенія мы примемъ вмѣсто k за перемѣнный параметръ величину α.

Замѣчая, что формулы (25) даютъ

$$\alpha_1+\alpha_2=\varepsilon+\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\alpha,\qquad \alpha_1\alpha_2=\varepsilon\alpha,$$

мы приведемъ первую часть неравенства (26) къ виду

$$\frac{\pi^2\lambda^2}{2}\,\frac{2+2\varepsilon\alpha+\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\alpha^2}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{27}$$

Нетрудно теперь видѣть, что внутри предѣловъ, которые мы здѣсь должны предполагать для α, это есть возрастающая функція α.

Дѣйствительно, величина

$$\alpha=\frac{\lambda^2\varepsilon}{k^2+\frac{\lambda^2}{k^2}+\lambda^2+1}$$

никогда не превосходитъ предѣла

$$\frac{\lambda^2\varepsilon}{(1+\lambda)^2},$$

котораго достигаетъ при $k^2=\lambda$, а при условіи

$$0<\alpha<\frac{\lambda^2\varepsilon}{(1+\lambda)^2}$$

числитель въ формулѣ (27) есть возрастающая функція α.

Такимъ образомъ искомое наименьшее значеніе функціи (27) соотвѣтствуетъ наименьшему значенію, котораго можетъ достигнуть α.

Что же касается наименьшаго значенія α, то при $\varepsilon\leqq 1$ оно, очевидно, есть нуль, а при $\varepsilon>1$, когда мы должны предполагать условія (24), оно соотвѣтствуетъ одному изъ предѣльныхъ значеній k^2. Но послѣднія приводятъ къ одной и той-же величинѣ

$$\alpha=\frac{\lambda^2(\varepsilon-1)}{\lambda^2(\varepsilon-1)+1}, \tag{28}$$

которая и представляетъ низшій предѣлъ α въ случаѣ $\varepsilon>1$.

Такимъ образомъ, дѣлая $\alpha=0$ при $\varepsilon\leqq 1$ и останавливаясь на выраженіи (28) при $\varepsilon>1$, мы приходимъ къ слѣдующимъ достаточнымъ условіямъ неравенства $A^2<1$:

въ случаѣ $\varepsilon\leqq 1$

$$\pi\lambda\leqq 1 \tag{29}$$

и въ случаѣ $\varepsilon > 1$

$$\frac{\pi^2\lambda^2}{2}\left(2\lambda\eta^3+(5\lambda^2+1)\eta^2+6\lambda\eta+2\right)\leqq\frac{(1+2\lambda\eta)^{\frac{3}{2}}}{1+\lambda\eta}, \qquad (30)$$

гдѣ сдѣлано

$$\eta=\lambda(\varepsilon-1)$$

и въ силу (23) должно предполагать $\eta\leqq 1$.

Въ случаѣ $\varepsilon\leqq 1$ функція p въ нашемъ уравненіи остается всегда положительною, и признакъ (2) примѣнимъ къ этому уравненію непосредственно, при чемъ въ результатѣ, какъ уже было указано въ параграфѣ 2-омъ, получается то же условіе (29).

Такимъ образомъ для примѣненія признака (2) въ случаѣ $\varepsilon\leqq 1$ предварительное преобразованіе нашего уравненія при помощи разсматриваемыхъ формулъ оказывается излишнимъ. Не то будетъ, какъ увидимъ, для признака (3), къ которому теперь обращаемся.

10. Означая черезъ a и b точный высшій и точный низшій предѣлы функціи $\sqrt{q}$, мы должны разсмотрѣть условіе

$$\frac{a\tau}{\pi}\leqq E\frac{b\tau}{\pi}+1. \qquad (31)$$

Изъ предыдущихъ формулъ получаемъ

$$a^2=\frac{(k^2+\lambda^2)^4}{k^8}\lambda^2(1+\alpha)^3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2),$$

$$b^2=\frac{(k^2+\lambda^2)^4}{k^8}\lambda^2(1-\alpha)^3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2),$$

откуда, принимая въ разсчетъ выраженіе τ и выражая α_1, α_2 черезъ α, выводимъ

$$\frac{a^2\tau^2}{\pi^2}=\frac{4\left[\lambda^2(1+\varepsilon)(1+\alpha)-\alpha\right]}{(1-\alpha)^3},$$

$$\frac{b^2\tau^2}{\pi^2}=\frac{4\left[\lambda^2(1-\varepsilon)(1-\alpha)+\alpha\right]}{(1+\alpha)^3}.$$

При разсмотрѣніи условія (31), мы ограничимся предположеніемъ $\varepsilon\geqq 1$.

Въ этомъ предположеніи $\frac{b\tau}{\pi}$ всегда будетъ правильною дробью, такъ какъ

$$(1+\alpha)^3-4[\lambda^2(1-\varepsilon)(1-\alpha)+\alpha]=\alpha^3+3\alpha^2+(1-\alpha)[1+4\lambda^2(\varepsilon-1)]$$

будетъ числомъ положительнымъ.

Вслѣдствіе этого условіе (31) приметъ видъ

$$\frac{a\tau}{\pi}\leqq 1$$

и приведется къ слѣдующему:

$$(1-\alpha)^3-4[\lambda^2(1+\varepsilon)(1+\alpha)-\alpha]\geqq 0. \tag{32}$$

Здѣсь подъ α должно разумѣть число, лежащее между предѣлами

$$\frac{\lambda^2(\varepsilon-1)}{\lambda^2(\varepsilon-1)+1} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda^2\varepsilon}{(1+\lambda)^2}, \tag{33}$$

изъ которыхъ, какъ мы видѣли, не выходятъ возможныя значенія α, и мы должны теперь выразить, что условіе (32) выполняется по крайней мѣрѣ при одномъ изъ такихъ значеній α.

Нетрудно видѣть, что функція, находящаяся въ первой части неравенства (32), при возрастаніи α отъ 0 до 1, или измѣняется постоянно въ одномъ и томъ же смыслѣ, или переходитъ отъ убыванія къ возрастанію. Вслѣдствіе этого наибольшее значеніе этой функціи въ предѣлахъ (33) соотвѣтствуетъ всегда одному изъ предѣльныхъ значеній α, и намъ нужно только выразить, что одно изъ этихъ послѣднихъ удовлетворяетъ условію (32).

Вводя вмѣсто ε, какъ уже было сдѣлано выше, величину

$$\eta=\lambda(\varepsilon-1),$$

способную принимать всѣ значенія отъ 0 до 1 включительно, и выражая, что условію (32) удовлетворяетъ первое изъ чиселъ (33), получимъ

$$8\lambda^2(1+\lambda\eta)^2(1+2\lambda\eta+\eta^2)\leqq 1. \tag{34}$$

Подобнымъ же путемъ, разсматривая второе изъ этихъ чиселъ, придемъ къ слѣдующему условію:

$$4\lambda^2(1+\lambda)^4(1+2\lambda+\eta)^2\leqq(1+2\lambda-\lambda\eta)^3. \tag{35}$$

Таковы искомыя условія, изъ которыхъ каждое служитъ достаточнымъ признакомъ неравенства $A^2 < 1$.

Обратимъ вниманіе на случай $\varepsilon = 1$, когда функція p въ разсматриваемомъ уравненіи не можетъ дѣлаться отрицательною.

Въ этомъ случаѣ непосредственное примѣненіе признака (3) къ нашему уравненію даетъ условіе

$$8\lambda^2 \leq 1.$$

Къ тому же выводу приводитъ и условіе (34), въ которомъ мы должны теперь сдѣлать $\eta = 0$. Что же касается условія (35), то оно приводитъ къ болѣе широкому заключенію, ибо обращается въ слѣдующее:

$$4\lambda^2(1+\lambda)^4 \leqq 1 + 2\lambda,$$

которому, какъ нетрудно убѣдиться, можно удовлетворить величинами λ, превосходящими $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Мы видимъ такимъ образомъ, что для признака (3) предварительное преобразованіе нашего уравненія при помощи разсматриваемыхъ здѣсь формулъ и въ случаѣ $p \geqq 0$ можетъ быть небезполезнымъ.

11. Для уравненія

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)x = 0$$

въ предположеніи

$$1 \leqq \varepsilon \leqq 1 + \frac{1}{\lambda},$$

мы нашли три достаточныхъ признака неравенства $A^2 < 1$. Эти признаки выражаются условіями (30), (34) и (35), гдѣ

$$\eta = \lambda(\varepsilon - 1).$$

Теперь мы должны были-бы изслѣдовать эти условія и, разобравши всевозможныя предположенія относительно η, для каждаго изъ нихъ рѣшить, которое изъ найденныхъ условій приводитъ къ лучшимъ выводамъ. Но на этомъ останавливаться мы не будемъ и ограничимся сравненіемъ нашихъ условій для двухъ предѣльныхъ значеній η: для $\eta = 0$ и для $\eta = 1$.

При $\eta = 0$ условіе (30), приводящееся къ виду

$$\pi^2\lambda^2 \leqq 1,$$

даетъ, очевидно, менѣе, чѣмъ условіе (34), а послѣднее, какъ уже было замѣчено, даетъ менѣе, чѣмъ условіе (35).

Такимъ образомъ для $\eta = 0$ наилучшій выводъ получается изъ условія (35), которое требуетъ, чтобы λ не превосходило единственнаго положительнаго корня уравненія

$$4z^2(1+z)^4 = 1 + 2z.$$

Вычисляя этотъ корень и квадратъ его съ пятью десятичными знаками, получимъ

$$z = 0,35585\,(-)\,, \qquad z^2 = 0,12663\,(-)\,.$$

Что касается другого предѣльнаго значенія η, $\eta = 1$, то для него наилучшій выводъ получается изъ условія (30).

Дѣйствительно, при $\eta = 1$ условіе это приводится къ виду

$$\pi^2\lambda^2(1+\lambda)^2(3+5\lambda) \leqq 2(1+2\lambda)^{\frac{3}{2}}, \tag{36}$$

условія-же (34) и (35) — оба обращаются въ слѣдующее:

$$16\lambda^2(1+\lambda)^3 \leqq 1, \tag{37}$$

и чтобы убѣдиться въ справедливости сейчасъ сказаннаго, достаточно разсмотрѣть величину

$$\lambda = \frac{1}{5},$$

которая удовлетворяетъ условію (36) и не удовлетворяетъ условію (37).

Условіе (36) требуетъ, чтобы λ не превосходило единственнаго положительнаго корня уравненія

$$\pi^2 z^2(1+z)^2(3+5z) = 2(1+2z)^{\frac{3}{2}},$$

а изъ послѣдняго, останавливаясь на пятой десятичной, выводимъ:

$$z = 0,23789\,(-)\,, \qquad z^2 = 0,05659\,.$$

12. Въ разсмотрѣнномъ сейчасъ примѣрѣ пріемъ, указанный въ параграфѣ 7-омъ, доставилъ для w выраженіе вида

$$w = C(1 - \alpha \sin s) \tag{38}$$

при C и α положительныхъ и при α, непревосходящемъ предѣла

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2},$$

и въ этомъ только предположеніи относительно α нами были найдены тѣ случаи, въ которыхъ выраженіе $w'' + pw$ никогда не дѣлается отрицательнымъ.

Но останавливаясь на формулѣ (38), мы должны только предполагать, что α численно менѣе 1, что необходимо для того, чтобы функція w не могла обращаться въ нуль; а разсматривая при этомъ значенія α, лежащія внѣ предѣловъ

$$0 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2},$$

мы можемъ встрѣтить новые случаи, когда будетъ

$$w'' + pw \geqq 0 \tag{39}$$

для всѣхъ значеній s.

Для разысканія всевозможныхъ случаевъ этого рода мы можемъ принять

$$w = 1 - \alpha \sin s.$$

Тогда при

$$p = \lambda^2 (1 - \varepsilon \sin s)$$

будемъ имѣть

$$w'' + pw = \lambda^2 - [\lambda^2 \varepsilon - (1-\lambda^2)\alpha] \sin s + \lambda^2 \varepsilon \alpha \sin^2 s.$$

Отсюда прежде всего заключаемъ, что всякій разъ, когда уравненіе

$$\lambda^2 \varepsilon \alpha z^2 - [\lambda^2 \varepsilon - (1-\lambda^2)\alpha] z + \lambda^2 = 0 \tag{40}$$

имѣетъ мнимые или равные корни, т. е. всякій разъ когда

$$(1-\lambda^2)^2 \alpha^2 - 2\lambda^2 (1+\lambda^2) \varepsilon \alpha + \lambda^4 \varepsilon^2 \leqq 0, \tag{41}$$

условіе (39) навѣрно будетъ выполняться.

Что же касается условія (41), то оно приводится къ слѣдующему:

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2} \leqq \alpha \leqq \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1-\lambda)^2}$$

и вслѣдствіе предположенія $|\alpha| < 1$ требуетъ, чтобы было

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2} < 1$$

или, что то же самое,

$$\lambda(\sqrt{\varepsilon} - 1) < 1.$$

Допустимъ теперь, что уравненіе (40) имѣетъ вещественные и различные корни, для чего α должно лежать внѣ предѣловъ

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1-\lambda)^2}.$$

Нетрудно видѣть, что при этомъ всегда найдется вещественное число $\varkappa$, лежащее между -1 и $+1$, при которомъ можно положить

$$\alpha = \frac{\lambda^2 \varepsilon \varkappa}{(\varkappa+\lambda)(\lambda\varkappa+1)};$$

а принимая это выраженіе α, получимъ

$$w'' + pw = \lambda^2 (1 - \alpha_1 \sin s)(1 - \alpha_2 \sin s),$$

гдѣ

$$\alpha_1 = \frac{\lambda \varepsilon}{\varkappa + \lambda}, \qquad \alpha_2 = \frac{\lambda \varepsilon \varkappa}{\lambda \varkappa + 1}.$$

Такъ какъ здѣсь α_1 и α_2 предполагаются различными, то для того, чтобы выраженіе $w'' + pw$ сдѣлать всегда положительнымъ, мы должны удовлетворить условіямъ

$$|\alpha_1| \leqq 1, \qquad |\alpha_2| \leqq 1.$$

Предполагая при этомъ $\varkappa > 0$, мы встрѣтимся съ случаями, разсмотрѣнными въ предыдущихъ параграфахъ. Если же предположимъ $\varkappa < 0$, то условія эти приведутъ къ новымъ случаямъ, изъ которыхъ въ однихъ будетъ $\alpha < 0$, въ другихъ

$$\alpha > \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1-\lambda)^2}.$$

Отсюда видно, что пользуясь формулой (38) для преобразованія нашего уравненія къ виду (5), мы можемъ получить, кромѣ найденныхъ выше, многіе новые признаки неравенства $A^2 < 1$. Изъ нихъ одинъ будетъ указанъ далѣе для предѣльнаго случая, получаемаго приближеніемъ λ къ нулю при постоянной величинѣ $\lambda^2 \varepsilon$.

13. Въ предыдущемъ, желая сдѣлать выраженіе

$$w'' + pw$$

всегда отрицательнымъ или всегда положительнымъ, мы опредѣляли w, какъ періодическое рѣшеніе уравненія

$$w'' + hw = h - p,$$

въ которомъ подъ h разумѣли положительное или отрицательное, но во всякомъ случаѣ отличное отъ нуля число. При этомъ мы разсматривали лишь тѣ случаи, когда интегралъ

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

не равенъ нулю.

Теперь мы хотимъ обратить вниманіе на одну категорію случаевъ, въ которыхъ этотъ интегралъ будетъ нулемъ, и въ которыхъ можно сдѣлать

$$w'' + pw \geqq 0,$$

принимая за w періодическое рѣшеніе того-же уравненія въ предположеніи $h = 0$.

Случаи, которые мы будемъ здѣсь разсматривать, характеризуются существованіемъ равенства

$$p(2\alpha - s) + p(s) = 0, \tag{42}$$

гдѣ α нѣкоторое постоянное, и тѣмъ, что функція p не мѣняетъ знака, пока s не переходитъ черезъ значенія вида $\alpha + n\frac{\sigma}{2}$, гдѣ n число цѣлое.

Что касается этихъ послѣднихъ значеній s, то какъ видно изъ (42), при переходѣ черезъ нихъ функція p всегда будетъ мѣнять знакъ.

Такъ какъ при существованіи равенства (42) необходимо

$$\int_0^\sigma p\,ds = 0,$$

то въ разсматриваемыхъ случаяхъ уравненіе

$$w'' = -p \tag{43}$$

всегда будетъ допускать періодическія рѣшенія, и всѣ эти рѣшенія будутъ различаться между собою прибавочными постоянными.

Мы примемъ за w то изъ этихъ рѣшеній, которое обращается въ 1 при $s = \alpha$. Тогда изъ равенства (42), пользуясь функціональнымъ обозначеніемъ $w(s)$, выведемъ слѣдующее:

$$w(2\alpha - s) + w(s) = 2. \tag{44}$$

На основаніи этого, принимая въ разсчетъ указанныя выше свойства функціи p, нетрудно теперь показать, что всегда будетъ

$$w'' + pw \geqq 0. \tag{45}$$

Покажемъ сначала, что выраженіе $w'' + pw$ сохраняетъ всегда одинъ и тотъ-же знакъ.

Такъ какъ въ силу (43)

$$w'' + pw = (w-1)p,$$

то для этого достаточно показать, что функціи $w-1$ и p мѣняютъ знакъ одновременно.

Изъ (44) заключаемъ, что функція $w-1$ мѣняетъ знакъ всякій разъ, когда s переходитъ черезъ какое-либо изъ значеній вида $\alpha + n\frac{\sigma}{2}$, гдѣ n число цѣлое.

Что-же касается другихъ значеній s, то нетрудно убѣдиться, что при нихъ эта функція не можетъ обращаться въ нуль.

Дѣйствительно, если-бы функція $w-1$, уничтожающаяся при $s = \alpha + n\frac{\sigma}{2}$ и при $s = \alpha + (n+1)\frac{\sigma}{2}$, обращалась въ нуль еще при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи s, то ея производная w' дѣлалась-бы нулемъ въ разсматриваемомъ промежуткѣ болѣе одного раза, а это невозможно, ибо по (43) и по свойству функціи p функція w', при возрастаніи s отъ $\alpha + n\frac{\sigma}{2}$ до $\alpha + (n+1)\frac{\sigma}{2}$, измѣняется постоянно въ одномъ и томъ-же смыслѣ.

Мы видимъ такимъ образомъ, что единственныя значенія s, при которыхъ функція $w-1$ мѣняетъ знакъ, какъ и для функціи p, суть значенія вида $\alpha + n\frac{\sigma}{2}$.

Показавши, что выраженіе $w'' + pw$ никогда не мѣняетъ знака, мы докажемъ справедливость неравенства (45), если покажемъ, что

$$\int_0^\sigma (w'' + pw)\,ds > 0;$$

но въ этомъ убѣждаемся тотчасъ-же, замѣчая, что на основаніи (43)

$$w'' + pw = \frac{d}{ds}(w' - ww') + w'^2,$$

откуда вслѣдствіе періодичности функціи w слѣдуетъ

$$\int_0^\sigma (w'' + pw)\,ds = \int_0^\sigma w'^2\,ds\,.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемыхъ случаяхъ, останавливаясь на указанномъ опредѣленіи w, мы сдѣлаемъ выраженіе $w'' + pw$ всегда положительнымъ.

Но чтобы этимъ можно было воспользоваться для нашей цѣли, необходимо еще одно добавочное условіе, а именно — необходимо, чтобы функція w не могла обращаться въ нуль.

Чтобы получить условіе, которому для этого должна удовлетворять функція p, мы должны найти выраженіе для наименьшаго значенія функціи w.

Обращаясь теперь къ этому, мы будемъ предполагать, что между предѣлами $s = \alpha$ и $s = \alpha + \frac{\sigma}{2}$ всегда $p \geqq 0$.

Въ этомъ предположеніи, функція w' при возрастаніи s отъ α до $\alpha + \frac{\sigma}{2}$ будетъ постоянно убывать, а при дальнѣйшемъ возрастаніи s до $\alpha + \sigma$ возрастать.

Отсюда слѣдуетъ, что функція w, принимающая одинаковыя значенія при

$$s = \alpha, \qquad s = \alpha + \frac{\sigma}{2}, \qquad s = \alpha + \sigma,$$

между предѣлами $s = \alpha$ и $s = \alpha + \sigma$ будетъ имѣть одинъ maximum и одинъ minimum, и что maximum этой функціи будетъ соотвѣтствовать нѣкоторому значенію s, лежащему между α и $\alpha + \frac{\sigma}{2}$.

Называя это значеніе s черезъ β и имѣя въ виду равенство (44), мы найдемъ, что minimum функціи w будетъ равенъ $2 - w(\beta)$.

Но нетрудно убѣдиться, что разсматриваемая функція w можетъ быть выражена формулою

$$w = 1 - \frac{s-\alpha}{\sigma}\int_\alpha^{\alpha+\sigma} sp\,ds - \int_\alpha^s (s - s_1)\,p(s_1)\,ds_1\,.$$

Отсюда для опредѣленія β получаемъ

$$\int_\alpha^{\alpha+\sigma} sp\,ds + \sigma\int_\alpha^\beta p\,ds = 0$$

и на основаніи этого уравненія находимъ

$$w(\beta) = 1 + \int_{\alpha}^{\beta} (s - \alpha)\, p\, ds.$$

Вслѣдствіе этого для наименьшаго значенія функціи w получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$1 - \int_{\alpha}^{\beta} (s - \alpha)\, p\, ds.$$

Отсюда видно, что для выполненія вышесказаннаго требованія мы должны имѣть

$$\int_{\alpha}^{\beta} (s - \alpha)\, p\, ds < 1\,.$$

Таково искомое условіе, которое здѣсь должно предполагать.

При выполненіи этого условія, останавливаясь на разсматриваемомъ опредѣленіи функціи w, мы сдѣлаемъ функцію q въ уравненіи (5) всегда положительною, и для полученія какихъ-либо выводовъ относительно величины A, соотвѣтствующей нашему первоначальному уравненію, вмѣсто послѣдняго можемъ трактовать уравненіе (5).

14. Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \mu \sin s\, x = 0\,, \tag{46}$$

гдѣ подъ μ будемъ разумѣть нѣкоторое вещественное постоянное.

Для этого уравненія можно принять $\sigma = 2\pi$, $\alpha = 0$, а вышеуказанное опредѣленіе w приводитъ къ слѣдующему выраженію:

$$w = 1 + \mu \sin s.$$

Отсюда видно, что мы должны здѣсь предполагать условіе

$$\mu^2 < 1\,.$$

Имѣя это въ виду, находимъ

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{(1 + \mu \sin s)^2} = \frac{2\pi}{(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ для функціи q въ уравненіи (5) получаемъ выраженіе

$$q = \mu^2 (1 + \mu \sin s)^3 \sin^2 s\,,$$

изъ котораго видно, что при указанномъ сейчасъ условіи будетъ $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s.

Разсмотримъ теперь въ примѣненіи къ уравненію (5) признаки неравенства $A^2 < 1$ (2) и (3).

Признакъ (2) для этого уравненія выражается условіемъ

$$\tau \int_0^\tau q \frac{ds}{w^2} \leqq 4\,,$$

которое въ разсматриваемомъ случаѣ приводится къ виду

$$\frac{\pi^2 \mu^2}{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}} \leqq 2$$

и требуетъ, чтобы было

$$\mu^2 \leqq 0,156\ldots, \qquad |\mu| \leqq 0,39\ldots.$$

Что-же касается признака (3), то называя наибольшее значеніе функціи $\sqrt{q}$ черезъ a и замѣчая, что наименьшее значеніе этой функціи есть нуль, найдемъ, что этотъ признакъ выразится условіемъ

$$\frac{\tau}{\pi} a \leqq 1\,.$$

Но предполагая $\mu > 0$, находимъ

$$a = \mu (1 + \mu)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Поэтому написанное сейчасъ условіе приводится къ виду

$$\frac{2\mu}{(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \leqq 1$$

и требуетъ, чтобы μ было менѣе 0,3.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ признакъ (2) приводитъ къ лучшему выводу.

Далѣе мы еще встрѣтимся съ уравненіемъ (46) и, трактуя его инымъ способомъ, получимъ нѣсколько болѣе широкіе предѣлы для тѣхъ значеній μ, при которыхъ несомнѣнно имѣетъ мѣсто неравенство $A^2 < 1$.

15. Въ послѣднихъ параграфахъ мы разсмотрѣли нѣкоторые случаи, когда надлежащимъ выборомъ функціи w можно было сдѣлать $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s. Теперь мы покажемъ, что этого всегда можно достигнуть, коль скоро

$$\int_0^\sigma p\,ds \geqq 0\,;$$

но прежде обратимъ вниманіе на нѣсколько иной видъ формулъ преобразованія, приведенныхъ въ параграфѣ 3-емъ.

Припоминая предположенія, сдѣланныя нами относительно функціи w, мы видимъ, что можно положить

$$w = e^{-\int v\,ds}\,,$$

разумѣя подъ v нѣкоторую вещественную періодическую функцію перемѣннаго s съ періодомъ σ, непрерывную вмѣстѣ съ производною

$$\frac{dv}{ds} = v'$$

и удовлетворяющую условію

$$\int_0^\sigma v\,ds = 0\,, \tag{47}$$

которое необходимо для того, чтобы функція w была періодическою.

При такомъ выраженіи функціи w само собою удовлетворится условіе, въ силу котораго эта функція не должна дѣлаться нулемъ. Если-же постоянное произвольное въ интегралѣ

$$\int v\,ds$$

выбрано такъ, чтобы интегралъ этотъ представлялъ вещественную функцію s, что и будемъ здѣсь предполагать, то функція w будетъ всегда положительною.

Принимая это выраженіе w, мы будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$x = y e^{-\int v\,ds}\,, \qquad t = \int_0^s e^{2\int v\,ds}\,ds,$$

при посредствѣ которыхъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + px = 0$$

преобразуется въ такое

$$\frac{d^2y}{dt^2}+qy=0,$$

гдѣ

$$q=e^{-4\int v\,ds}(p-v'+v^2),$$

и это q будетъ періодическою функціей перемѣннаго t съ періодомъ

$$\tau=\int_0^\sigma e^{2\int v\,ds}\,ds.$$

Чтобы показать теперь, что въ случаѣ положительной или равной нулю величины интеграла

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

всегда можно сдѣлать $q\geqq 0$, мы замѣчаемъ, что интегралъ

$$\int(p-\Omega)\,ds,$$

гдѣ

$$\Omega=\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma p\,ds,$$

представляетъ періодическую функцію s, вслѣдствіе чего функцію v можно опредѣлить уравненіемъ

$$v'=p-\Omega;$$

а при такомъ выборѣ функціи v найдемъ

$$q=(\Omega+v^2)\,e^{-4\int v\,ds} \tag{48}$$

и слѣдовательно, если $\Omega\geqq 0$, будемъ имѣть $q\geqq 0$ для всѣхъ значеній s или t.

16. Примѣнимъ показанное сейчасъ преобразованіе къ слѣдующему уравненію:

$$\frac{d^2x}{ds^2}+(\lambda^2+\mu\sin s)\,x=0,$$

гдѣ λ и μ означаютъ нѣкоторыя вещественныя постоянныя.

Согласно вышеуказанному, мы должны здѣсь опредѣлить v при помощи уравненія

$$v' = \mu \sin s\,,$$

изъ котораго, имѣя въ виду условіе (47), находимъ

$$v = -\mu \cos s.$$

Вслѣдствіе этого, останавливаясь на выраженіи

$$\int v\,ds = -\mu \sin s\,,$$

получаемъ

$$q = (\lambda^2 + \mu^2 \cos^2 s)\, e^{4\mu \sin s}.$$

Имѣя такимъ образомъ $q > 0$ для всѣхъ значеній s, посмотримъ, что даетъ въ примѣненіи къ преобразованному уравненію признакъ (2) неравенства $A^2 < 1$.

Въ разсматриваемомъ случаѣ, если принять $\sigma = 2\pi$, этотъ признакъ выразится условіемъ

$$\tau \int_0^{2\pi} q e^{-2\mu \sin s} ds \leqq 4\,,$$

гдѣ

$$\tau = \int_0^{2\pi} e^{-2\mu \sin s} ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\mu \sin s} + e^{-2\mu \sin s}\right) ds.$$

Если-же положимъ

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\mu \sin s} + e^{-2\mu \sin s}\right) \cos^2 s\, ds = \tau_1\,,$$

то будемъ имѣть

$$\int_0^{2\pi} q e^{-2\mu \sin s} ds = \tau \lambda^2 + \tau_1 \mu^2,$$

и наше условіе приведется къ виду

$$\tau^2 \lambda^2 + \tau \tau_1 \mu^2 \leqq 4. \tag{49}$$

Въ предыдущемъ мы уже имѣли дѣло съ разсматриваемымъ здѣсь уравненіемъ, которое было взято нами подъ видомъ

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\lambda^2(1-\varepsilon\sin s)\,x=0\,,$$

и для этого уравненія нашли нѣсколько различныхъ условій, при которыхъ несомнѣнно имѣетъ мѣсто неравенство $A^2<1$.

Такъ, въ параграфѣ 9-омъ, исходя, какъ и здѣсь, изъ признака (2), но примѣняя его къ другому преобразованію нашего уравненія, мы получили условіе (29) для случая $\varepsilon\leqq 1$ и условіе (30) для случая

$$1\leqq\varepsilon\leqq 1+\frac{1}{\lambda}\,.$$

Нетрудно видѣть, что, подобно этимъ послѣднимъ, условіе (49) требуетъ, чтобы λ не превосходило числа $\frac{1}{\pi}$. Но этотъ высшій предѣлъ λ при условіи (49) достигается только въ случаѣ, когда $\mu=0$, и слѣдовательно — когда $\varepsilon=0$. Поэтому при величинахъ λ, мало отличающихся отъ $\frac{1}{\pi}$, условія (29) и (30) приводятъ къ лучшимъ выводамъ.

Обратное имѣетъ мѣсто при величинахъ λ, близкихъ къ нулю. Для такихъ значеній λ наше новое условіе (49) должно быть предпочитаемо какъ условіямъ (29) и (30), такъ и тѣмъ условіямъ, которыя были получены въ параграфѣ 10-омъ, ибо всѣ эти условія были выведены въ предположеніи

$$\eta=\lambda(\varepsilon-1)\leqq 1\,,$$

равносильномъ такому

$$|\mu|=\lambda^2\varepsilon\leqq\lambda(1+\lambda)\,,$$

и слѣдовательно требующемъ, чтобы при λ безконечно-маломъ параметръ μ былъ также безконечно-малымъ, тогда какъ условіе (49), не предполагающее никакихъ дополнительныхъ условій, позволяетъ приписывать μ тѣмъ бóльшія значенія, чѣмъ менѣе λ.

17. Разсмотримъ ближе случай $\lambda=0$, когда условіе (49) принимаетъ видъ

$$\tau\tau_1\,\mu^2\leqq 4\,. \tag{50}$$

Входящія сюда величины τ и τ_1 можно представить рядами, расположенными по степенямъ μ^2, весьма быстро сходящимися при небольшихъ значеніяхъ μ, съ какими намъ придется здѣсь имѣть дѣло.

Обращаясь къ даннымъ выше выраженіямъ τ и τ_1, легко находимъ

$$\tau = 2\pi S, \qquad \tau_1 = \pi S_1,$$

гдѣ

$$S = 1 + \frac{\mu^2}{1^2} + \frac{\mu^4}{1^2.2^2} + \frac{\mu^6}{1^2.2^2.3^2} + \frac{\mu^8}{1^2.2^2.3^2.4^2} + \ldots,$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{1^2} + \frac{1}{3}\frac{\mu^4}{1^2.2^2} + \frac{1}{4}\frac{\mu^6}{1^2.2^2.3^2} + \ldots$$

Пользуясь этими формулами, мы займемся теперь вычисленіемъ наибольшаго значенія μ^2, при которомъ удовлетворяется условіе (50).

Это значеніе опредѣляется уравненіемъ

$$\tau\tau_1\mu^2 = 4,$$

приводящимся къ виду

$$\pi^2 SS_1\mu^2 = 2, \tag{51}$$

гдѣ

$$SS_1 = 1 + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{5}{6}\mu^4 + \ldots \tag{52}$$

Чтобы найти приближенную величину μ^2, которою можно было-бы затѣмъ воспользоваться для полученія болѣе точныхъ, мы удержимъ въ выраженіи (52) сначала только первые два члена

Такимъ образомъ уравненіе (51) приведется къ слѣдующему:

$$\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^4 = \frac{2}{\pi^2}$$

и дастъ

$$\mu^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{12}{\pi^2}} - 1\right) = 0,1628\ldots,$$

что, очевидно, представляетъ нѣкоторый высшій предѣлъ для искомаго значенія μ^2.

Для полученія болѣе точной величины μ^2 мы примемъ въ разсчетъ въ выраженіи (52) и членъ съ четвертой степенью μ, вслѣдствіе чего уравненіе (51) обратится въ такое:

$$\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^4 + \frac{5}{6}\mu^6 = \frac{2}{\pi^2}.$$

Представляя затѣмъ это уравненіе подъ видомъ

$$\mu^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{12}{\pi^2} - 5\mu^6} - 1\right),$$

мы подставимъ во вторую часть его вмѣсто μ^2 число 0,163, мало отличающееся отъ только-что найденнаго.

Такимъ образомъ получимъ

$$\mu^2 = 0,160427\ldots \quad . \tag{53}$$

Для дальнѣйшихъ вычисленій уравненіе (51) полезно представить подъ видомъ

$$\mu^2 = \frac{2}{\pi^2 SS_1}.$$

Тогда, вычисляя вторую часть его при какомъ-либо значеніи μ^2, мы тотчасъ-же получимъ два предѣла, между которыми лежитъ искомое значеніе. Этими предѣлами будутъ служить подставляемое значеніе μ^2 и результатъ вычисленія выраженія

$$\frac{2}{\pi^2 SS_1}.$$

Вычислимъ послѣднее, принимая согласно (53)

$$\mu^2 = 0,16043.$$

При этомъ значеніи μ^2, останавливаясь на 7-ой десятичной, находимъ

$$S = 1,1669803\ (+),$$

$$S_1 = 1,0823887\ (+)$$

и на основаніи этихъ чиселъ получаемъ

$$\frac{2}{\pi^2 SS_1} = 0,160429\ (+).$$

Отсюда можемъ заключить, что искомое значеніе μ^2 лежитъ между предѣлами

$$0,160429 \quad \text{и} \quad 0,16043.$$

Такимъ образомъ находимъ

$$\mu^2 = 0,160429\ldots, \qquad |\mu| = 0,40053\ldots$$

— числа, нѣсколько бо́льшія полученныхъ въ параграфѣ 14-омъ.

Къ этому выводу мы пришли, примѣняя къ извѣстному преобразованію уравненія

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \mu \sin s\, x = 0$$

признакъ (2).

Укажемъ теперь условіе, къ которому въ томъ-же случаѣ приводитъ признакъ (3).

Для этого, означая черезъ a^2 наибольшее значеніе функціи

$$q = \mu^2 \cos^2 s\, e^{4\mu \sin s}$$

и замѣчая, что наименьшее ея значеніе есть нуль, мы должны составить условіе

$$\frac{\tau^2}{\pi^2} a^2 \leqq 1.$$

Но нетрудно убѣдиться, что

$$a^2 = \frac{\varkappa}{4} e^{2\varkappa},$$

гдѣ

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 16\mu^2} - 1\right).$$

Мы имѣемъ при томъ

$$\frac{\tau}{\pi} = 2S.$$

Поэтому искомое условіе будетъ

$$\varkappa e^{2\varkappa} S^2 \leqq 1.$$

Не останавливаясь на болѣе полномъ изслѣдованіи этого условія, покажемъ только, что сравнительно съ условіемъ (50) оно даетъ менѣе удовлетворительный выводъ.

Для этого разсмотримъ предположеніе

$$\mu^2 = 0,14.$$

При этомъ значеніи μ^2 находимъ

$$S > 1 + \mu^2 + \frac{1}{4}\mu^4 > 1,144,$$

откуда

$$S^2 > 1,3.$$

Далѣе, имѣемъ

$$\varkappa = 0{,}4$$

и слѣдовательно

$$e^{2\varkappa} > 1 + 2\varkappa + 2\varkappa^2 > 2\,,$$

$$\varkappa e^{2\varkappa} > 0{,}8\,.$$

Отсюда видно, что при взятомъ значеніи μ^2

$$\varkappa e^{2\varkappa} S^2 > 1\,,$$

вслѣдствіе чего разсматриваемое условіе требуетъ, чтобы μ^2 было менѣе 0,14.

18. Возвращаясь къ случаю λ неравнаго нулю, мы видимъ, что условіе (49) даетъ менѣе, чѣмъ условіе

$$\pi^2 \lambda^2 \leqq 1\,,$$

къ которому при

$$|\mu| \leqq \lambda^2\,,$$

когда функція p въ разсматриваемомъ уравненіи остается всегда положительною, приводитъ непосредственное примѣненіе признака (2).

По этому поводу замѣтимъ вообще, что въ случаѣ $p \geqq 0$ примѣненіе признака (2) къ уравненію, получаемому въ результатѣ преобразованія предложеннаго уравненія при помощи разсматриваемыхъ теперь формулъ, никогда не можетъ дать чего-либо новаго, ибо нетрудно убѣдиться, что условіе

$$\tau \int_0^\tau q\, dt \leqq 4\,,$$

при разсматриваемомъ опредѣленіи функціи v, можетъ выполняться въ тѣхъ только случаяхъ, когда

$$\sigma \int_0^\sigma p\, ds < 4\,.$$

Чтобы показать это, мы замѣчаемъ, что формула (48) даетъ

$$q > \Omega e^{-4\int v\, ds}\,,$$

вслѣдствіе чего

$$\int_0^\tau q\,dt = \int_0^\sigma q\,e^{2\int v\,ds}\,ds > \Omega \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds.$$

Замѣчая-же, что произведеніе

$$\tau \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds = \int_0^\sigma e^{2\int v\,ds}\,ds \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds$$

можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{1}{2}\int_0^\sigma \int_0^\sigma \left(\frac{\varphi(s)}{\varphi(s_1)} + \frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s)} \right) ds\,ds_1\,,$$

гдѣ

$$\varphi(s) = e^{2\int v\,ds}\,,$$

и что

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(s_1)} + \frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s)} > 2\,,$$

находимъ

$$\tau \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds > \sigma^2.$$

Вслѣдствіе этого имѣемъ

$$\tau \int_0^\tau q\,dt > \sigma^2 \Omega = \sigma \int_0^\sigma p\,ds\,,$$

чѣмъ и обнаруживается справедливость сказаннаго.

Чтобы устранить указанный сейчасъ недостатокъ разсматриваемаго преобразованія, мы должны обобщить послѣднее такъ, чтобы въ преобразованномъ уравненіи заключалось, какъ частный случай, первоначальное.

Изъ различныхъ способовъ достигнуть этой цѣли мы остановимся здѣсь на простѣйшемъ, который приводится къ опредѣленію функціи v при помощи уравненія

$$v' = k(p - \Omega)\,,$$

гдѣ k означаетъ нѣкоторый неопредѣленный параметръ.

Такимъ путемъ мы придемъ къ преобразованію, изъ котораго при $k=1$ будетъ получаться показанное въ параграфѣ 15-омъ. При томъ преобразованное уравненіе будетъ заключать въ себѣ первоначальное, которое будетъ изъ него получаться при $k=0$.

Останавливаясь на указанномъ опредѣленіи v, будемъ имѣть

$$q=\left\{\Omega+(1-k)(p-\Omega)+v^2\right\}e^{-4\int v\,ds}$$

и параметръ k въ этомъ выраженіи должны будемъ подчинить тому только условію, чтобы было $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s, чего при $\Omega \geqq 0$ всегда можно достигнуть.

Обратимъ вниманіе на случай, когда $p>0$ для всѣхъ значеній s.

Въ этомъ случаѣ мы можемъ сдѣлать $q \geqq 0$, приписывая k численно достаточно малыя положительныя или отрицательныя значенія.

Изслѣдуемъ для такихъ значеній k величину выраженія

$$\tau\int_0^\tau q\,dt.$$

Чтобы на чемъ-нибудь остановиться, мы будемъ при этомъ предполагать, что постоянное произвольное въ интегралѣ

$$\int v\,ds$$

опредѣлено согласно условію

$$\int_0^\sigma\left(\int v\,ds\right)ds=0.$$

Тогда, какъ функція v, которая удовлетворяетъ условію (47), такъ и этотъ интегралъ будутъ заключать въ себѣ множитель k, и потому, разлагая τ и $qe^{2\int v\,ds}$ въ ряды по степенямъ k и останавливаясь на членахъ не выше первой степени относительно k, будемъ имѣть

$$\tau=\int_0^\sigma e^{2\int v\,ds}\,ds=\sigma+\cdots,\qquad qe^{2\int v\,ds}=p-k(p-\Omega)-2p\int v\,ds+\cdots,$$

откуда

$$\tau\int_0^\tau q\,dt=\tau\int_0^\sigma qe^{2\int v\,ds}\,ds=\sigma\int_0^\sigma p\,ds-2\sigma\int_0^\sigma\left(\int v\,ds\right)p\,ds+\cdots.$$

Но

$$\int_0^\sigma \left(\int v\,ds\right) p\,ds = \int_0^\sigma \left(\int v\,ds\right)(p-\Omega)\,ds$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^\sigma \left(\int v\,ds\right) v'\,ds = -\frac{1}{k}\int_0^\sigma v^2\,ds.$$

Вслѣдствіе этого находимъ

$$\tau\int_0^\tau q\,dt = \sigma\int_0^\sigma p\,ds + \frac{2\sigma}{k}\int_0^\sigma v^2\,ds + \ldots,$$

чѣмъ обнаруживается, что при k отрицательномъ и численно достаточно маломъ всегда будетъ

$$\tau\int_0^\tau q\,dt < \sigma\int_0^\sigma p\,ds.$$

Отсюда видно, что показанное сейчасъ преобразованіе можетъ быть полезно для признака (2) и въ случаѣ, когда $p > 0$ для всѣхъ значеній s.

19. Возьмемъ разсмотрѣнное выше уравненіе, въ которомъ

$$p = \lambda^2 + \mu \sin s.$$

Дѣлая, какъ сейчасъ было предложено,

$$v' = k\mu \sin s$$

и имѣя въ виду (47), находимъ

$$v = -k\mu \cos s.$$

Вслѣдствіе этого, принимая

$$\int v\,ds = -k\mu \sin s,$$

получаемъ

$$q = \left\{\lambda^2 + (1-k)\,\mu \sin s + k^2\mu^2 \cos^2 s\right\} e^{4k\mu.\sin s}.$$

Мы должны теперь выразить, что функція

$$\lambda^2 + (1-k)\mu \sin s + k^2\mu^2 \cos^2 s$$

никогда не дѣлается отрицательною.

Такъ-какъ для этого, очевидно, достаточно, чтобы эта функція не была отрицательною при $\sin s = \pm 1$, то такимъ путемъ мы приходимъ къ условію

$$\lambda^2 \pm (1-k)\mu \geqq 0,$$

которое можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\mu - \lambda^2 \leqq k\mu \leqq \mu + \lambda^2. \tag{54}$$

При этомъ условіи будемъ имѣть $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній t и всякій разъ, когда

$$\tau \int_0^\tau q\,dt \leqq 4, \tag{55}$$

можемъ заключать о существованіи неравенства $A^2 < 1$.

Посмотримъ, что дастъ въ разсматриваемомъ случаѣ условіе (55).

Имѣемъ

$$\tau = \int_0^{2\pi} e^{-2k\mu \sin s}\,ds = \int_0^{2\pi} e^{2k\mu \sin s}\,ds,$$

а полагая

$$\tau_1 = \int_0^{2\pi} e^{2k\mu \sin s} \cos^2 s\,ds,$$

находимъ

$$\int_0^{2\pi} e^{2k\mu \sin s} \sin s\,ds = 2k\mu\tau_1.$$

Вслѣдствіе этого получаемъ

$$\int_0^\tau q\,dt = \int_0^{2\pi} q e^{-2k\mu \sin s}\,ds = \tau\lambda^2 + k(2-k)\tau_1\mu^2,$$

и условіе (55) обращается въ слѣдующее:

$$\tau^2\lambda^2 + k(2-k)\tau\tau_1\mu^2 \leqq 4.$$

Это условіе мы представимъ въ нѣсколько иномъ видѣ, замѣняя τ и τ_1 ихъ разложеніями въ ряды по степенямъ $k\mu$ и полагая

$$k\mu = \mu + \varkappa.$$

Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$S(x) = 1 + \frac{x^2}{1^2} + \frac{x^4}{1^2.2^2} + \frac{x^6}{1^2.2^2.3^2} + \ldots,$$

$$S_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1^2} + \frac{1}{3}\frac{x^4}{1^2.2^2} + \frac{1}{4}\frac{x^6}{1^2.2^2.3^2} + \ldots.$$

Тогда будемъ имѣть

$$\tau = 2\pi\, S(k\mu) = 2\pi\, S(\mu + \varkappa),$$

$$\tau_1 = \pi\, S_1(k\mu) = \pi\, S_1(\mu + \varkappa),$$

и условіе наше приведется къ виду

$$\lambda^2 S^2(\mu + \varkappa) + \frac{1}{2}(\mu^2 - \varkappa^2)\, S(\mu + \varkappa)\, S_1(\mu + \varkappa) \leqq \frac{1}{\pi^2}, \tag{56}$$

гдѣ въ силу (54) должно предполагать

$$-\lambda^2 \leqq \varkappa \leqq \lambda^2.$$

Постараемся теперь найти условіе, которому должны удовлетворять λ и μ для возможности условія (56) въ указанномъ сейчасъ предположеніи.

Для этого мы должны выразить, что наименьшее значеніе функціи

$$F(\varkappa) = \lambda^2 S^2(\mu + \varkappa) + \frac{1}{2}(\mu^2 - \varkappa^2)\, S(\mu + \varkappa)\, S_1(\mu + \varkappa)$$

въ промежуткѣ отъ $\varkappa = -\lambda^2$ до $\varkappa = \lambda^2$ не превосходитъ $\frac{1}{\pi^2}$.

Предполагая, чтобы на чемъ-нибудь остановиться, $\mu > 0$, мы замѣчаемъ, что при возрастаніи $\varkappa$ отъ $-\mu$ до 0 функція $F(\varkappa)$ постоянно возрастаетъ, и что при $\varkappa$ положительномъ, меньшемъ μ,

$$F(\varkappa) > F(-\varkappa). \tag{57}$$

Мы можемъ поэтому утверждать, что въ случаѣ $\mu \geqq \lambda^2$ наименьшее значеніе функціи $F(\varkappa)$ въ разсматриваемомъ промежуткѣ соотвѣтствуетъ всегда $\varkappa = -\lambda^2$.

Покажемъ, что то-же будетъ и въ случаѣ $\mu < \lambda^2$, если только λ^2 достаточно мало.

Для этого прежде всего покажемъ, что при $\mu < \lambda^2$ и при λ^2 достаточно маломъ неравенство (57) будетъ выполняться не только для значенiй $\varkappa$, меньшихъ μ, но и для значенiй $\varkappa$, лежащихъ между μ и λ^2.

Замѣчая, что выраженiе функцiи $F(\varkappa)$ можетъ быть представлено подъ видомъ

$$F(\varkappa) = \frac{1}{2}(\varkappa^2 - \mu^2)\, S(\mu+\varkappa)\Big(S(\mu+\varkappa) - S_1(\mu+\varkappa)\Big) + \Big(\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa^2 + \frac{1}{2}\mu^2\Big) S^2(\mu+\varkappa),$$

и что функцiя $S(x) - S_1(x)$ при x положительномъ возрастаетъ вмѣстѣ съ x, въ предположенiи $\varkappa > \mu$ находимъ

$$F(\varkappa) - F(-\varkappa) > \Big(\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa^2 + \frac{1}{2}\mu^2\Big)\Big(S^2(\varkappa+\mu) - S^2(\varkappa-\mu)\Big).$$

А отсюда заключаемъ, что при $\mu < \varkappa \leqq \lambda^2$ будетъ

$$F(\varkappa) - F(-\varkappa) > 0\,,$$

если только λ^2 не превосходитъ 2.

Далѣе, нетрудно показать, что при λ^2 достаточно маломъ функцiя $F(\varkappa)$ будетъ возрастать вмѣстѣ съ $\varkappa$ не только при $\varkappa$, заключающемся между $-\mu$ и 0, но и при $\varkappa < -\mu$.

Для этого разсмотримъ производную $F'(\varkappa)$.

Нетрудно убѣдиться, что

$$\left.\begin{aligned} S'(x) &= 2x S_1(x), \\ S_1'(x) &= \frac{2}{x} S(x) - \frac{2}{x} S_1(x), \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

а на основанiи этихъ формулъ находимъ

$$F'(\varkappa) = (\mu - \varkappa)\Big(S^2(\mu+\varkappa) + (\mu+\varkappa)^2 S_1^2(\mu+\varkappa)\Big) + \Big(4\lambda^2(\mu+\varkappa) - \mu\Big) S(\mu+\varkappa)\, S_1(\mu+\varkappa).$$

Но это выраженiе можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\begin{aligned} F'(\varkappa) = &-(\mu+\varkappa)\, S(\mu+\varkappa)\Big(S(\mu+\varkappa) - 4\lambda^2 S_1(\mu+\varkappa)\Big) \\ &+ 2\mu\, S(\mu+\varkappa)\Big(S(\mu+\varkappa) - \frac{1}{2} S_1(\mu+\varkappa)\Big) \\ &+ (\mu-\varkappa)(\mu+\varkappa)^2 S_1^2(\mu+\varkappa), \end{aligned}$$

а потому, принимая въ разсчетъ, что

$$S(\mu+\varkappa) > S_1(\mu+\varkappa),$$

и предполагая $\mu+\varkappa < 0$, будемъ имѣть

$$F'(\varkappa) > 0$$

всякій разъ, когда $4\lambda^2 \leqq 1$.

Вслѣдствіе этого при $\lambda^2 \leqq \frac{1}{4}$ наименьшее значеніе функціи $F(\varkappa)$ въ промежуткѣ $(-\lambda^2, 0)$ будетъ $F(-\lambda^2)$, а въ силу (57) это значеніе будетъ наименьшимъ и въ промежуткѣ $(-\lambda^2, \lambda^2)$.

Показавши такимъ образомъ, что при λ^2, не превосходящемъ $\frac{1}{4}$, искомое наименьшее значеніе функціи $F(\varkappa)$ во всякомъ случаѣ соотвѣтствуетъ $\varkappa = -\lambda^2$, мы можемъ этимъ ограничиться, ибо нетрудно убѣдиться, что при выполненіи условія (56) въ предположеніи $\varkappa^2 \leqq \lambda^4$ число λ^2 необходимо будетъ менѣе $\frac{1}{4}$.

Это очевидно для случая $\varkappa^2 \leqq \mu^2$, ибо въ этомъ случаѣ условіе (56) даетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{\pi^2}.$$

Что-же касается случаевъ, когда

$$\mu^2 < \varkappa^2 \leqq \lambda^4,$$

то это докажется слѣдующимъ образомъ.

Полагая

$$z = S(x) - x S_1(x),$$

на основаніи (58) получаемъ

$$\frac{dz}{dx} = -2z + S_1(x),$$

а отсюда, имѣя въ виду, что при $x=0$ функція z обращается въ 1, выводимъ

$$z = e^{-2x}\left(1 + \int_0^x e^{2x} S_1(x)\,dx\right).$$

Но, замѣчая, что $S_1(x) > 1$, и предполагая $x > 0$, имѣемъ

$$\int_0^x e^{2x} S_1(x)\,dx > \frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right).$$

Поэтому находимъ

$$z > \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2x}\right)$$

и слѣдовательно

$$S(x) - x\,S_1(x) > \frac{1}{2}. \tag{59}$$

Замѣтивши это, обращаемся къ выраженію $F(\varkappa)$.

Представляя это выраженіе для случая $\mu + \varkappa > 0$ подъ видомъ

$$F(\varkappa) = \lambda^2 S(\mu+\varkappa)\left(S(\mu+\varkappa) - (\mu+\varkappa)\,S_1(\mu+\varkappa)\right)$$
$$+ (\mu+\varkappa)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}\mu\right) S(\mu+\varkappa)\,S_1(\mu+\varkappa),$$

а для случая $\mu + \varkappa < 0$ — подъ видомъ

$$F(\varkappa) = \lambda^2 S(\mu+\varkappa)\left(S(\mu+\varkappa) + (\mu+\varkappa)\,S_1(\mu+\varkappa)\right)$$
$$-(\mu+\varkappa)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\varkappa - \frac{1}{2}\mu\right) S(\mu+\varkappa)\,S_1(\mu+\varkappa)$$

и принимая въ разсчетъ, что при $\varkappa^2 \leqq \lambda^4$ и при $\mu < \lambda^2$ величины

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}\mu, \qquad \lambda^2 + \frac{1}{2}\varkappa - \frac{1}{2}\mu$$

обѣ положительны, находимъ

$$F(\varkappa) > \lambda^2 S(\mu+\varkappa)\left(S(\mu+\varkappa) - (\mu+\varkappa)\,S_1(\mu+\varkappa)\right),$$

если $\mu + \varkappa > 0$, и

$$F(\varkappa) > \lambda^2 S(\mu+\varkappa)\left(S(\mu+\varkappa) + (\mu+\varkappa)\,S_1(\mu+\varkappa)\right),$$

если $\mu + \varkappa < 0$.

Отсюда на основаніи (59), гдѣ x предполагается положительнымъ, для обоихъ случаевъ получаемъ

$$F(\varkappa) > \frac{1}{2}\lambda^2 S(\mu+\varkappa) > \frac{1}{2}\lambda^2,$$

а этимъ обнаруживается, что при выполненіи условія (56) необходимо будетъ

$$\lambda^2 < \frac{2}{\pi^2},$$

гдѣ вторая часть неравенства, очевидно, менѣе $\frac{1}{4}$.

Вслѣдствіе всего вышеизложеннаго мы приходимъ къ заключенію, что искомое условіе, которому должны удовлетворять λ и μ, получается изъ (56) при $\varkappa = -\lambda^2$. Условіе это, слѣдовательно, будетъ

$$\lambda^2 S^2(\mu-\lambda^2) + \frac{1}{2}(\mu^2-\lambda^4)\, S(\mu-\lambda^2)\, S_1(\mu-\lambda^2) \leqq \frac{1}{\pi^2}. \qquad (60)$$

20. Сравнимъ условіе (60) съ другими признаками неравенства $A^2 < 1$, полученными нами для того-же уравненія ранѣе.

Какъ это слѣдуетъ изъ самаго вывода, условіе (60) имѣетъ несомнѣнное преимущество, какъ передъ условіемъ (49), такъ и передъ условіемъ (29), служащимъ признакомъ неравенства $A^2 < 1$ въ предположеніи $\mu \leqq \lambda^2$. Совпадая съ первымъ изъ этихъ условій при $\lambda = 0$, со вторымъ при $\mu = \lambda^2$, во всѣхъ другихъ случаяхъ условіе (60) приводитъ къ болѣе широкимъ заключеніямъ.

Что касается другихъ найденныхъ нами признаковъ неравенства $A^2 < 1$, то прежде всего замѣтимъ, что въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ условіе (60) уступаетъ тѣмъ условіямъ, которыя были получены въ параграфѣ 2-омъ при непосредственномъ примѣненіи признака (3) къ разсматриваемому здѣсь уравненію.

Дѣйствительно, въ предположеніи $\mu > 0$, на которомъ мы здѣсь остановились, эти условія приводятъ, между прочимъ, къ заключенію, что неравенство $A^2 < 1$ имѣетъ мѣсто всякій разъ, когда при $\mu \leqq \lambda^2$

$$\lambda^2 + \mu \leqq \frac{1}{4}.$$

Условіе-же (60) не позволяетъ сдѣлать подобнаго заключенія, ибо нетрудно убѣдиться, что при выполненіи этого условія величина $\lambda^2 + \mu$ въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ никогда не можетъ достигать $\frac{1}{4}$.

Чтобы показать это, мы замѣчаемъ, что первая часть неравенства (60) не менѣе величины

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^4),$$

которая равна

$$\frac{1}{2}\left\{\lambda^2 + \mu + (\lambda^2 - \mu)(1 - \lambda^2 - \mu)\right\}$$

и слѣдовательно въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ и при $\lambda^2 < \frac{2}{\pi^2}$, что необходимо имѣетъ мѣсто при условіи (60), не менѣе

$$\frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu).$$

Мы должны поэтому заключить, что при условіи (60) въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ всегда будетъ

$$\lambda^2 + \mu \leqq \frac{2}{\pi^2},$$

гдѣ знакъ равенства можетъ имѣть мѣсто только при $\mu = \lambda^2$.

Такимъ образомъ условіе (60) можетъ быть полезно только въ случаѣ $\mu > \lambda^2$. Но и въ этомъ случаѣ къ нему должно обращаться лишь при условіи

$$\eta = \frac{\mu - \lambda^2}{\lambda} > 1,$$

ибо въ предположеніи $\mu > \lambda^2$, $\eta \leqq 1$ въ параграфахъ 9-омъ и 10-омъ были указаны другіе признаки неравенства $A^2 < 1$, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ, а именно тотъ, который выражается условіемъ (30), всегда приводитъ къ лучшимъ выводамъ, чѣмъ нашъ новый признакъ (60).

Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$\lambda\eta = \mu - \lambda^2 = \zeta,$$

то условіе (60) напишется такъ:

$$f(\zeta) \leqq \frac{1}{\pi^2},$$

гдѣ

$$f(\zeta) = \lambda^2 \Big\{ S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta) S_1(\zeta) \Big\} + \frac{\zeta^2}{2} S(\zeta) S_1(\zeta),$$

условіе-же (30) приведется къ виду

$$\varphi(\zeta) \leqq \frac{1}{\pi^2},$$

гдѣ

$$\varphi(\zeta) = \lambda^2 \frac{(1+\zeta)\left(1 + 3\zeta + \frac{5}{2}\zeta^2\right)}{(1+2\zeta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{1+\zeta}{\sqrt{1+2\zeta}}.$$

Но можно показать, что

$$f(\zeta) > \varphi(\zeta) \tag{61}$$

при всякомъ положительномъ ζ.

Для этого обращаемся къ выраженіямъ $S(\zeta)$ и $S_1(\zeta)$ подъ видомъ рядовъ.

Имѣемъ

$$S(\zeta) = 1 + \zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^4 + \cdots,$$

$$S_1(\zeta) = 1 + \frac{1}{2}\zeta^2 + \cdots.$$

Отсюда выводимъ

$$(1+2\zeta)\, S^2(\zeta)\, S_1^2(\zeta) = 1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + \cdots,$$

гдѣ при $\zeta > 0$ всѣ члены положительны.

Вслѣдствіе этого имѣемъ

$$(1+2\zeta)\, S^2(\zeta)\, S_1^2(\zeta) > (1+\zeta)^2$$

и слѣдовательно

$$S(\zeta) S_1(\zeta) > \frac{1+\zeta}{\sqrt{1+2\zeta}} \tag{62}$$

при всякомъ положительномъ ζ.

Далѣе, находимъ

$$(1+2\zeta)\Big(S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta)\, S_1(\zeta)\Big)^2 = 1 + 4\zeta + 9\zeta^2 + 17\zeta^3 + 24\zeta^4 + \cdots,$$

а сравнивая это выраженіе, въ которомъ при $\zeta > 0$ всѣ члены положительны, съ слѣдующимъ:

$$\left(1 + 2\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2\right)^2 = 1 + 4\zeta + 7\zeta^2 + 6\zeta^3 + \frac{9}{4}\zeta^4,$$

получаемъ

$$(1+2\zeta)\Big(S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta)\, S_1(\zeta)\Big)^2 > \left(1 + 2\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2\right)^2,$$

откуда

$$S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta)\, S_1(\zeta) > \frac{1 + 2\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2}{\sqrt{1+2\zeta}}$$

для всякаго положительнаго ζ.

Но, замѣчая, что

$$(1+\zeta)\left(1+3\zeta+\frac{5}{2}\zeta^2\right)=(1+2\zeta)\left(1+2\zeta+\frac{3}{2}\zeta^2\right)-\frac{1}{2}\zeta^3,$$

въ томъ-же предположеніи $\zeta > 0$ находимъ

$$1+2\zeta+\frac{3}{2}\zeta^2 > \frac{(1+\zeta)\left(1+3\zeta+\frac{5}{2}\zeta^2\right)}{1+2\zeta}.$$

Вслѣдствіе этого при $\zeta > 0$ имѣемъ

$$S^2(\zeta)+\zeta\, S(\zeta)\, S_1(\zeta) > \frac{(1+\zeta)\left(1+3\zeta+\frac{5}{2}\zeta^2\right)}{(1+2\zeta)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (63)$$

Неравенства-же (62) и (63) обнаруживаютъ справедливость (61).

Изъ доказаннаго сейчасъ слѣдуетъ, что при $\lambda > 0$, $\eta > 0$ или, что все равно, при $\mu > \lambda^2$ условіе (30) будетъ выполняться всякій разъ, когда выполнено условіе (60), но что обратное не всегда будетъ имѣть мѣсто. Вслѣдствіе этого при η, лежащемъ между 0 и 1, когда условіе (30) служитъ признакомъ неравенства $A^2 < 1$, оно должно быть предпочитаемо условію (60).

Должно, впрочемъ, замѣтить, что разница въ выводахъ, получаемыхъ изъ этихъ условій при η, непревосходящемъ 1, довольно незначительна.

Такъ, въ случаѣ $\eta = 1$ условіе (60), приводящееся тогда къ виду

$$\lambda^2\left\{S^2(\lambda)+\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)S(\lambda)\,S_1(\lambda)\right\} \leqq \frac{1}{\pi^2},$$

требуетъ, чтобы λ^2 не превосходило числа 0,053 ...; условіе-же (30), какъ было указано въ параграфѣ 11-омъ, даетъ въ этомъ случаѣ для высшаго предѣла λ^2 число, близкое къ 0,05659.

21. Мы предложили преобразованіе, показанное въ параграфѣ 18-омъ, имѣя въ виду случай когда

$$\int_0^\sigma p\, ds \geqq 0.$$

Но преобразованіе это можетъ быть полезно и въ случаѣ, когда

$$\int_0^\sigma p\, ds < 0,$$

ибо въ этомъ случаѣ, опредѣливши функцію v, какъ было предложено, при помощи уравненія

$$v' = k(p - \Omega),$$

мы можемъ иногда выборомъ параметра k распорядиться такъ, чтобы было

$$\Omega + (1 - k)(p - \Omega) + v^2 \leqq 0 \tag{64}$$

для всѣхъ значеній s; а всякій разъ, когда это удастся сдѣлать, мы будемъ имѣть $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній t и слѣдовательно будемъ въ правѣ заключить о существованіи неравенства $A > 1$.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} - (\lambda^2 - \mu \sin s)\, x = 0,$$

съ которымъ мы уже имѣли дѣло въ параграфѣ 6-омъ.

Изъ уравненія

$$v' = k\mu \sin s$$

при условіи (47) находимъ

$$v = -k\mu \cos s.$$

Вслѣдствіе этого условіе (64) обращается въ нашемъ случаѣ въ слѣдующее:

$$-\lambda^2 + (1 - k)\mu \sin s + k^2\mu^2 \cos^2 s \leqq 0$$

или

$$k^2\mu^2 \sin^2 s - (1 - k)\mu \sin s + \lambda^2 - k^2\mu^2 \geqq 0, \tag{65}$$

и мы видимъ, что, между прочимъ, условію этому можно удовлетворить независимо отъ s всякій разъ, когда вещественный параметръ k можетъ быть выбранъ такъ, чтобы уравненіе

$$k^2\mu^2 z^2 - (1 - k)\mu z + \lambda^2 - k^2\mu^2 = 0 \tag{66}$$

имѣло мнимые или равные корни.

Найдемъ условіе, которому должны удовлетворять для этого λ и μ.

Чтобы сдѣлать это, мы должны выразить, что надлежащимъ выборомъ k возможно удовлетворить условію

$$(1 - k)^2 - 4k^2(\lambda^2 - k^2\mu^2) \leqq 0.$$

Но послѣднее приводится къ виду

$$\lambda^2 \geqq k^2\mu^2 + \frac{(1-k)^2}{4k^2}$$

и требуетъ, чтобы наименьшее изъ всѣхъ возможныхъ значенiй функцiи

$$\mu^2 k^2 + \frac{(1-k)^2}{4k^2}$$

не превосходило λ^2; а это наименьшее значенiе получимъ, принимая за k единственный положительный корень уравненiя

$$\frac{1-k}{4k^4} = \mu^2. \tag{67}$$

Такимъ образомъ, разумѣя подъ k этотъ корень и замѣчая, что въ силу (67)

$$k^2\mu^2 + \frac{(1-k)^2}{4k^2} = \frac{(1-k)(2-k)}{4k^2},$$

мы должны имѣть

$$\lambda^2 \geqq \frac{(1-k)(2-k)}{4k^2}, \tag{68}$$

или, такъ-какъ разсматриваемая величина k, очевидно, менѣе 1,

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{4}\left(\sqrt{32\lambda^2+1}+3\right).$$

Послѣднее-же при существованiи (67) требуетъ, чтобы было

$$1024\mu^2 \leqq \left(\sqrt{32\lambda^2+1}-1\right)\left(\sqrt{32\lambda^2+1}+3\right)^3, \tag{69}$$

что и представляетъ искомое условiе.

Таково условiе, при которомъ корни уравненiя (66) надлежащимъ выборомъ k всегда могутъ быть сдѣланы мнимыми или равными.

Но это, очевидно, не единственный способъ, которымъ можно удовлетворить условiю (65) независимо отъ s, ибо послѣднее будетъ выполняться также и въ случаѣ, когда названные корни вещественны и различны, если только ихъ численныя величины не менѣе 1, а знаки одинаковы.

Можно однако показать, что тѣмъ не менѣе найденное нами условiе (69) не только достаточно для возможности (65), но и необходимо.

Будемъ разсматривать вмѣсто (69) равносильное ему условіе (68), гдѣ k означаетъ положительный корень уравненія (67).

Полагая

$$1-k=\alpha^2,$$

это условіе приведемъ къ виду

$$\lambda^2 \geqq \frac{\alpha^2(1+\alpha^2)}{4(1-\alpha^2)^2}, \tag{70}$$

при чемъ α можемъ опредѣлить, какъ вещественный корень уравненія

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}=2\mu, \tag{71}$$

численно не превосходящій 1.

Допустимъ теперь, что условіе (70) не выполнено, и покажемъ, что тогда, каково-бы ни было вещественное число k, перемѣнному s всегда можно приписать такое вещественное значеніе, при которомъ выраженіе

$$k^2\mu^2\sin^2 s-(1-k)\mu\sin s+\lambda^2-k^2\mu^2 \tag{72}$$

сдѣлается отрицательнымъ.

Это очевидно для случая, когда произведеніе корней уравненія (66) менѣе или равно 1, ибо при сдѣланномъ допущеніи эти корни будутъ вещественными и различными, каково-бы ни было вещественное значеніе k.

Мы можемъ поэтому ограничиться предположеніемъ, что названное произведеніе, равное

$$\frac{\lambda^2-k^2\mu^2}{k^2\mu^2},$$

болѣе 1, что выразится условіемъ

$$\lambda^2>2k^2\mu^2,$$

или, если предположимъ $\lambda>0$,

$$|k\mu|<\frac{\lambda}{\sqrt{2}}. \tag{73}$$

Въ этомъ-же предположеніи нетрудно показать, что выраженіе (72) сдѣлается отрицательнымъ или при $\sin s=1$, или при $\sin s=-1$.

Чтобы на чемъ-нибудь остановиться, мы допустимъ, что $\mu > 0$, и разсмотримъ величину

$$\lambda^2 + k\mu - \mu,$$

въ которую обращается (72) при $\sin s = 1$.

На основаніи (73) величина эта менѣе слѣдующей

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \mu.$$

Послѣдняя-же, когда условіе (70) не выполнено, навѣрно отрицательна.

Дѣйствительно, изъ неравенства

$$\lambda^2 < \frac{\alpha^2(1+\alpha^2)}{4(1-\alpha^2)^2},$$

имѣя въ виду (71), выводимъ

$$1 - \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\mu} > 1 - \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{2} - (1-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2}},$$

а вторая часть послѣдняго неравенства, приводящаяся къ виду

$$\frac{1-\alpha}{2}\left\{(1+\alpha)\left(1-\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2}}\right) + (1+\alpha^2)\left(1 - \frac{1+\alpha}{\sqrt{2(1+\alpha^2)}}\right)\right\},$$

очевидно, положительна, ибо α есть правильная дробь.

Мы находимъ поэтому

$$1 - \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\mu} > 0,$$

и слѣдовательно

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \mu < 0.$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что, когда условіе (70) не выполнено, выраженіе (72) всегда можно сдѣлать отрицательнымъ.

Мы должны поэтому заключить, что найденное нами условіе есть наиболѣе широкій признакъ неравенства $A > 1$, къ которому можетъ привести разсматриваемая метода.

22. Сравнимъ условіе (69) или равносильное ему условіе (70) съ тѣми признаками неравенства $A > 1$, которые были получены нами для разсматриваемаго здѣсь уравненія въ параграфѣ 6-омъ.

Такъ-какъ въ случаѣ, когда численная величина μ не превосходитъ λ^2, $p \leqq 0$ для всѣхъ значеній s, то мы будемъ теперь предполагать $\mu > \lambda^2$, и въ этомъ предположеніи прежде всего преобразуемъ наше условіе къ нѣсколько иному виду, болѣе удобному для нашей настоящей цѣли.

Замѣчая, что при μ и α положительныхъ изъ (70) и (71) слѣдуетъ

$$\frac{\lambda^2}{\mu} \geqq \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{2},$$

заключаемъ, что вещественное число β, опредѣляемое уравненіемъ

$$\frac{\beta(1+\beta^2)}{2} = \frac{\lambda^2}{\mu}, \tag{74}$$

необходимо болѣе α, а такъ-какъ это число въ предположеніи $\mu > \lambda^2$, очевидно, менѣе 1, то на основаніи (71) находимъ

$$2\mu \leqq \frac{\beta}{(1-\beta^2)^2};$$

послѣднее-же вслѣдствіе (74) даетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{\beta^2(1+\beta^2)}{4(1-\beta^2)^2}. \tag{75}$$

Это условіе, въ которомъ β означаетъ единственный вещественный корень уравненія (74), и представляетъ искомое преобразованіе *).

Переходя теперь къ нашей задачѣ, мы начнемъ съ признака неравенства $A > 1$, выражаемаго условіемъ (15), которое въ предположеніи $\varepsilon^2 > 1$ можно представить подъ видомъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Такъ-какъ здѣсь

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda^2},$$

*) Нетрудно убѣдиться, что въ предположеніи $\mu > \lambda^2$ не только (75) есть слѣдствіе (70), но и (70) есть слѣдствіе (75).

то вводя число β, опредѣляемое уравненіемъ (74), мы приведемъ это условіе къ виду

$$\lambda^2 \leqq \frac{\beta^2(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(4+3\beta^2+\beta^4)};$$

а вторая часть послѣдняго, очевидно, менѣе второй части условія (75).

Такимъ образомъ видимъ, что условіе (75) способно приводить къ болѣе широкимъ заключеніямъ.

Обращаемся теперь къ признаку неравенства $A > 1$, выражаемому условіями (12) и (18), въ которыхъ k представляетъ цѣлое число, не меньшее 2.

Такъ-какъ

$$\cos\frac{\pi}{2k} > 1 - \frac{\pi^2}{8k^2},$$

и вторая часть этого неравенства при указанныхъ сейчасъ величинахъ k положительна, то условіе (18) требуетъ, чтобы было

$$\varepsilon < \frac{k^2-1}{k^2-\frac{\pi^2}{8}};$$

а отсюда, предполагая $\varepsilon > 1$, выводимъ

$$k^2 < \frac{\frac{\pi^2}{8}\varepsilon - 1}{\varepsilon - 1}.$$

Вслѣдствіе этого, обращаясь къ условію (12), которое можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{k^2}{\varepsilon - 1},$$

заключаемъ, что для возможности этого условія необходимо слѣдующее неравенство:

$$\lambda^2 < \frac{\frac{\pi^2}{8}\varepsilon - 1}{(\varepsilon - 1)^2}.$$

Послѣднее-же, если согласно (74) положимъ

$$\varepsilon = \frac{2}{\beta(1+\beta^2)},$$

приведется къ виду

$$\lambda^2 < \frac{\beta(1+\beta^2)\left[\frac{\pi^2}{4} - \beta(1+\beta^2)\right]}{(1-\beta)^2(2+\beta+\beta^2)^2},$$

откуда, замѣчая, что

$$(2+\beta+\beta^2)^2 > 2(1+\beta^2)(1+\beta)^2,$$

найдемъ

$$\lambda^2 < \frac{\beta\left[\frac{\pi^2}{4} - \beta(1+\beta^2)\right]}{2(1-\beta^2)^2}.$$

Этому неравенству необходимо будетъ удовлетворять λ^2 всякій разъ, когда условія (12) и (18) выполняются при какой-либо величинѣ k, бóльшей или равной 2.

Но нетрудно видѣть, что условіе (75) даетъ для высшаго предѣла λ^2 бóльшее число.

Дѣйствительно, неравенство

$$\frac{\beta^2(1+\beta^2)}{4(1-\beta^2)^2} > \frac{\beta\left[\frac{\pi^2}{4} - \beta(1+\beta^2)\right]}{2(1-\beta^2)^2}$$

равносильно слѣдующему

$$\beta(1+\beta^2) > \frac{\pi^2}{6}$$

или

$$\varepsilon < \frac{12}{\pi^2};$$

а послѣднее необходимо допустить, въ чемъ убѣждаемся, замѣчая, что $\pi^2 < 8\sqrt{2}$, и принимая въ разсчетъ, что величина ε, удовлетворяющая условію (18) при $k \geqq 2$, не можетъ превышать числа $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что условіе (69) или равносильныя ему условія (70) и (75) представляютъ болѣе широкій признакъ неравенства $A > 1$, чѣмъ условія, найденныя въ параграфѣ 6-омъ.

23. Возвращаемся опять къ формуламъ преобразованія, указаннымъ въ параграфѣ 18-омъ.

Въ случаѣ отрицательной величины интеграла

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

этими формулами, очевидно, нельзя воспользоваться для того, чтобы сдѣлать $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s, ибо вслѣдствіе предполагаемаго нами условія

$$\int_0^\sigma v\,ds = 0$$

всегда существуютъ какъ такія значенія s, для которыхъ

$$v = 0, \qquad v' \geqq 0,$$

такъ и такія, для которыхъ

$$v = 0, \qquad v' \leqq 0,$$

а при $\Omega < 0$, приписывая s одно изъ значеній, для которыхъ

$$v = 0, \qquad \frac{1-k}{k}\,v' \leqq 0,$$

мы, очевидно, сдѣлаемъ $q < 0$.

Но въ этомъ случаѣ, когда не удается сдѣлать $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній s, параметръ k иногда можно подобрать такъ, чтобы было

$$\int_0^\tau q\,dt \geqq 0,$$

послѣ чего, повторяя то-же преобразованіе, мы придемъ къ новому уравненію вида

$$\frac{d^2z}{du^2} + rz = 0,$$

въ которомъ всегда можно будетъ сдѣлать $r \geqq 0$ для всѣхъ значеній u.

Мы видимъ такимъ образомъ, что при надлежащемъ выборѣ функціи v въ общихъ формулахъ преобразованія можно придти къ уравненію, въ которомъ будетъ $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній независимаго перемѣннаго, не только во всѣхъ случаяхъ, когда

$$\int_0^\sigma p\,ds \geqq 0,$$

но и во многихъ изъ тѣхъ случаевъ, когда

$$\int_0^\sigma p\,ds < 0.$$

Такъ напр. для уравненія, съ которымъ мы имѣли дѣло въ послѣднихъ параграфахъ, это навѣрно возможно, когда надлежащимъ выборомъ $\varkappa$ можно удовлетворить условію

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{2}(\mu^2 - \varkappa^2)\frac{S_1(\mu+\varkappa)}{S(\mu+\varkappa)},$$

гдѣ символы S и S_1 имѣютъ значеніе, указанное въ параграфѣ 19-омъ.

Къ этому замѣчанію относительно общихъ формулъ преобразованія прибавимъ, что въ случаѣ, когда интегралъ

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

не есть число отрицательное, функцію v никогда нельзя подобрать такъ, чтобы было $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній s, ибо, если условіе $q \leqq 0$, приводящееся къ виду

$$p - v' + v^2 \leqq 0,$$

выполняется для всѣхъ значеній s, то необходимо будетъ

$$\int_0^\sigma p\,ds + \int_0^\sigma v^2\,ds < 0$$

и слѣдовательно

$$\int_0^\sigma p\,ds < 0.$$

Отсюда видно, что, если при положительной или равной нулю величинѣ интеграла

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

для разсматриваемаго уравненія имѣетъ мѣсто неравенство $A > 1$, то это обстоятельство никогда не можетъ быть обнаружено на основаніи соображеній, которыми до сихъ поръ мы руководились.

Имѣя въ виду какъ эти, такъ и многіе другіе случаи, для которыхъ указанные выше пріемы могутъ оказаться недостаточными, мы разсмотримъ далѣе другіе способы рѣшенія нашего вопроса. Но прежде, чѣмъ закончить эту часть изслѣдованія, обратимъ вниманіе на нѣкоторыя общія заключенія относительно величины A, къ которымъ приводятъ соображенія, изложенныя выше.

24. Допустимъ, что изслѣдуемое дифференціальное уравненіе дано подъ видомъ

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \mu p x = 0,$$

гдѣ μ означаетъ нѣкоторый вещественный параметръ, который мы будемъ предполагать положительнымъ, а p независящую отъ него вещественную періодическую функцію s съ періодомъ σ.

Преобразовывая это уравненіе по формуламъ, предложеннымъ въ концѣ параграфа 15-го, и полагая по прежнему

$$\Omega = \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma p\,ds,$$

мы должны опредѣлить функцію v согласно уравненію

$$v' = \mu(p - \Omega),$$

откуда при условіи (47) найдемъ

$$v = \mu\varphi,$$

разумѣя подъ φ слѣдующую функцію

$$\varphi = \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \Big(p(s_1 + s) - \Omega\Big)\, s_1\, ds_1.$$

При этомъ мы придемъ къ уравненію

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = 0, \tag{76}$$

въ которомъ будетъ

$$q = \mu(\Omega + \mu\varphi^2)\, e^{-4\mu\int\varphi\, ds}.$$

Отсюда видно, что, если Ω есть число отрицательное, то дѣлая μ достаточно малымъ, мы всегда можемъ сдѣлать $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній s.

Чтобы достигнуть этого, мы должны взять

$$\mu \leqq -\frac{\Omega}{M^2},$$

гдѣ M означаетъ наибольшее численное значеніе функціи φ, и выбравши такимъ образомъ μ, можемъ быть увѣрены, что для нашего уравненія будетъ имѣть мѣсто неравенство $A > 1$.

Допустимъ теперь, что $\Omega \geqq 0$.

Въ этомъ случаѣ функція q будетъ всегда положительною, а дѣлая μ достаточно малымъ, мы сдѣлаемъ всѣ значенія этой функціи сколь угодно малыми, вслѣдствіе чего всегда можемъ удовлетворить извѣстнымъ признакамъ неравенства $A^2 < 1$.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ, пока μ не превосходитъ нѣкотораго предѣла, для нашего уравненія будетъ имѣть мѣсто неравенство $A^2 < 1$.

Нетрудно найти подобный предѣлъ въ зависимости отъ величинъ Ω и M.

Пусть интегралъ

$$\int \varphi \, ds,$$

фигурирующій въ выраженіи функціи q, никогда не дѣлается отрицательнымъ, но обращается въ нуль при нѣкоторыхъ значеніяхъ s, изъ которыхъ одно пусть будетъ α.

Останавливаясь на этомъ предположеніи, которымъ опредѣляется только постоянное произвольное въ названномъ интегралѣ, будемъ имѣть

$$q < \mu(\Omega + M^2\mu),$$

$$\int \varphi \, ds < M|s - \alpha|;$$

а въ силу послѣдняго неравенства, имѣя въ виду, что формула

$$\tau = \int_0^{\sigma} e^{2\mu \int \varphi \, ds} \, ds$$

можетъ быть замѣнена слѣдующею:

$$\tau = \int_{\alpha - \frac{\sigma}{2}}^{\alpha + \frac{\sigma}{2}} e^{2\mu \int \varphi \, ds} \, ds,$$

найдемъ

$$\tau < \int_{\alpha - \frac{\sigma}{2}}^{\alpha} e^{2M\mu(\alpha - s)}\,ds + \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{\sigma}{2}} e^{2M\mu(s-\alpha)}\,ds,$$

и слѣдовательно

$$\tau < \frac{e^{M\sigma\mu} - 1}{M\mu}.$$

Отсюда выводимъ

$$\tau^2 q < \left(\frac{\Omega}{M} + M\mu\right)\frac{(e^{M\sigma\mu} - 1)^2}{M\mu}.$$

Вслѣдствіе этого, если сдѣлаемъ

$$\mu \leqq \frac{\zeta}{M\sigma},$$

разумѣя подъ ζ положительный корень уравненія

$$\left(\frac{\sigma\Omega}{M} + \zeta\right)\frac{(e^{\zeta} - 1)^2}{\zeta} = \pi^2,$$

то будемъ имѣть

$$\tau^2 q < \pi^2$$

для всѣхъ значеній s, и такимъ образомъ для уравненія (76) удовлетворится признакъ неравенства $A^2 < 1$, предложенный профессоромъ Н. Е. Жуковскимъ.

Мы можемъ поэтому утверждать, что, если при положительной или равной нулю величинѣ Ω положительный параметръ μ не превосходитъ предѣла $\frac{\zeta}{M\sigma}$, для нашего дифференціальнаго уравненія навѣрно будетъ существовать неравенство $A^2 < 1$.

Отсюда для случая $\Omega = 0$ выводится слѣдующее предложеніе:

Всякій разъ, когда въ уравненіи

$$\frac{d^2x}{ds^2} + px = 0$$

функція p такова, что

$$\int_0^{\sigma} p\,ds = 0$$

и численныя значенія функціи

$$\int_0^\sigma p(s_1+s)\,s_1\,ds_1$$

не превосходятъ величины

$$\log(1+\pi)=1{,}42108\ldots,$$

для этого уравненія имѣетъ мѣсто неравенство

$$A^2<1.$$