К-55485 Кафедра прикладной мате
К-583
№ 245.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IV, №№ 1 et 2.

91
84
430
565

# СООБЩЕНІЯ

## ХАРЬКОВСКАГО

# МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

**Томъ IV.**

№№ 1 и 2; 3, 4, 5, 6

**ХАРЬКОВЪ.**
Типографія и Литографія Зильберберга, Рыбная—№ 25-й.
1893.

92
1893-95
57

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IV.

Український Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 565
Математичних Нау

# СООБЩЕНІЯ ХАРЬКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

пр-55485/2

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

**Томъ IV.**

(Съ портретомъ П. Л. Чебышева).

ХАРЬКОВЪ.
Типографія Зильберберга, Рыбная ул., № 25.
1895.

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *К. Андреевъ.*

К-583
Центральна наукова бібліотека
ХНУ ім. В.Н.Каразіна
інв. № НС 55485 у2 №2

# СОДЕРЖАНІЕ

## IV-го тома.


Стр.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества къ 1-му Января 1895 г. . . . . I—II

О числѣ классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя; *В. А. Маркова* . . 1—59

Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими пріемами разысканія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій; *В. Г. Имшенецкаго* . . . . . 60—80

Новый случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла въ жидкости; *А. М. Ляпунова* 81—85

Исчисленіе положенія; *А. И. Богуславскаго* . . . . . 86—122

Объ одномъ свойствѣ дифференціальныхъ уравненій задачи о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку; *А. М. Ляпунова* . . . . . 123—140

О высшихъ предѣлахъ корней алгебраическихъ уравненій; *П. Н. Рахманова* . . . . . 141—145

Извлеченіе изъ письма академика *А. А. Маркова* къ проф. К. А. Андрееву . . . . . 146—149

Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій; *К. А. Андреева* . . . . . 150—160

Дополненіе къ сочиненію „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости“; *В. А. Стеклова* . . . . . 161—164

Къ теоріи осмотическаго давленія; *А. П. Грузинцева* . . 165—174

По поводу комментарія профессора К. А. Андреева; *А. А. Маркова* . . . . . 175—176

О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя; *К. А. Андреева*. . . . . 177—205

Нѣкоторые результаты наблюденій, произведенныхъ на астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета съ маятниками Реберъ-Пашвица; *Г. В. Левицкаго* . . . . . 206—208

Стр.

Гипотетическая среда Больтцмана и теорія Герца; *А. П. Грузинцева* . . . . . 209—224

Нахожденіе алгебраическихъ раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ алгебраическими раціональными коэффиціентами; *П. А. Некрасова* . . . . . 225—252

Объ автоморфной функціи аналогичной экспонентной; *В. П. Алексѣевскаго* . . . . . 253—262

Пафнутій Львовичъ Чебышевъ, очеркъ *А. М. Ляпунова* (съ портретомъ П. Л. Чебышева) . . . . . 263—273

Списокъ сочиненій акад. П. Л. Чебышева . . . . . 274—280

Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій . . . . . 281—291

Приложеніе къ протоколу засѣданія Харьк. Матем. Общ. 10-го Мая 1893 г. . . . . 292—297

Приложеніе къ протоколу засѣданія Харьк. Матем. Общ. 19-го Сентября 1893 г. . . . . 298

# Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

## къ 1-му Января 1895 года.

### A. Распорядительный Комитетъ.

1. Предсѣдатель, К. А. Андреевъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ и В. Л. Кирпичевъ.
3. Секретарь, В. А. Стекловъ.

### B. Почетные члены.

1. Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ, академикъ.
2. Бугаевъ Николай Васильевичъ, проф. Моск. унив.

### C. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. Технол. Инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. унив.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьк. унив.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
6. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. Коммерч. учил.
7. Влезковъ Сергѣй Ѳедоровичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
8. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директоръ С.П.Б. Техн. Институт.
9. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. Техн. Институт.
10. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумск. Реальн. учил.
11. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
12. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьк. унив.
13. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, сверхшт. астрон. Харьк. астр. обс.
14. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
15. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Харьк. Техн. Инст.
16. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежск. кадетск. корп.
17. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
18. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьк. Технол. Инст.
19. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьк. унив.

20. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьк. прогимн.
21. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
22. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
23. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевск. унив.
24. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. институт. благ. дѣв. въ Харьк.
25. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьк. унив.
26. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
27. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
28. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьк. унив.
29. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
30. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Новорос. унив.
31. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
32. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
33. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. реальн. уч.
34. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспекторъ Харьк. учебн. окр.
35. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
36. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. Урюпинск. реальн. учил.
37. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Изюмск. реальн. учил.
38. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, стипенд. Харьк. унив.
39. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
40. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
41. Струве Людвикъ Оттоновичъ, проф. Харьк. унив.
42. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
43. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лаборантъ Харьк. унив.
44. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Харьк. реальн. учил.
45. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
46. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьк. унив.
47. Шиховъ Василій Васильевичъ, директоръ Харьк. реальн. учил.
48. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
49. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.

## D. Члены-Корреспонденты.

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. С.П.Б. унив.
2. Богуславскій Анатолій Ивановичъ, приватъ-доцентъ Моск. унив.
3. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. унив. Св. Владим.
4. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Моск. унив.
5. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. С.П.Б. унив.
6. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. С.П.Б. унив., академикъ.
7. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. С.П.Б. унив.
8. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. С.П.Б. унив.
9. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варш. унив.
10. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермск. гимн.

# О числѣ классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя.

**В. А. Маркова.**

§ 1. Въ 41 томѣ журнала Крелля Эйзенштейнъ далъ безъ доказательства формулы для счета числа классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя съ цѣлыми коэффиціентами въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣлитель не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.

Въ настоящей статьѣ я дамъ доказательства этихъ формулъ.

Всѣ формы, о которыхъ будемъ говорить, будемъ предполагать квадратичными и положительными, а коэффиціенты ихъ числами цѣлыми.

Бинарную форму

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

будемъ обозначать для краткости чрезъ

$$(a, b, c).$$

Условимся еще обозначать число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія

$$xz - y^2 = d, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ $d$ нѣкоторое данное число, такихъ, что

$$z > x > y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$y$ и по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ $x$ и $z$ нечетное, чрезъ

$$f(d),$$

а число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія (1), для которыхъ кромѣ условій (2) имѣютъ мѣсто еще слѣдующія

$$f_1' \equiv a_1',\ f_1'' \equiv a_1'' \ldots \pmod 2,\quad f_2' \equiv a_2',\ f_2'' \equiv a_2'' \ldots \pmod 4,$$

$$\varphi_1' > 0,\ \varphi_1'' > 0 \ldots \varphi_2' \geqq 0,\ \varphi_2'' \geqq 0 \ldots \varphi_3' < 0,\ \varphi_3'' < 0 \ldots \varphi_4' \leqq 0,\ \varphi_4'' \leqq 0, \ldots,$$

гдѣ

$$a_1',\ a_1'', \ldots a_2',\ a_2'', \ldots$$

данныя цѣлыя числа, а

$$f_1',\ f_1'', \ldots,\ f_2',\ f_2'', \ldots,\ \varphi_1',\ \varphi_1'', \ldots,\ \varphi_2',\ \varphi_2'', \ldots,\ \varphi_3',\ \varphi_3'', \ldots,\ \varphi_4',\ \varphi_4'' \ldots$$

данныя линейныя функціи отъ $x$, $y$ и $z$ съ цѣлыми коэффиціентами, чрезъ

$$f[d,\ f_1' \equiv a_1', \ldots, \pmod 2,\ f_2' \equiv a_2', \ldots, \pmod 4,\ \varphi_1' > 0, \ldots,\ \varphi_2' \geqq 0, \ldots,$$
$$\varphi_3' < 0, \ldots,\ \varphi_4' \leqq 0, \ldots]$$

Число чисто-коренныхъ (proprie primitivae) классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$ будемъ обозначать чрезъ

$$h^{(1)}(d),$$

число нечисто-коренныхъ классовъ чрезъ

$$h^{(2)}(d),$$

число чисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, эквивалентныхъ формамъ, у которыхъ коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю, чрезъ

$$\omega^{(1)}(d),$$

а число нечисто-коренныхъ классовъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$\omega^{(2)}(d).$$

Если $d$ не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей и кромѣ того

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

то, какъ извѣстно, всѣ бинарныя формы опредѣлителя $-d$ будутъ чисто-коренныя и раздѣлятся на два такихъ разряда, содержащихъ по одному и тому же числу классовъ

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2},$$

что всѣ нечетныя числа, которыя могутъ быть представлены формами перваго разряда, при дѣленіи на 4 даютъ въ остаткѣ 1, а всѣ нечетныя

числа, которыя могутъ быть представлены формами второго разряда, при дѣленіи на 4 даютъ въ остаткѣ 3.

Число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, принадлежащихъ къ первому разряду и эквивалентныхъ формамъ, въ которыхъ коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю, будемъ обозначать чрезъ

$$\omega_1(d),$$

а число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, принадлежащихъ ко второму разряду и удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$\omega_2(d).$$

Замѣтимъ еще, что двѣ формы нечисто (improprie) эквивалентныя всегда принадлежатъ къ одному и тому же разряду и что число

$$a + c - 2b$$

представляется бинарною формою $(a, b, c)$ при

$$x = 1, \qquad y = -1.$$

§ 2. **Лемма 1.** *Каково бы ни было нечетное и положительное число $d$, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, имѣетъ мѣсто равенство*

$$f(d) = h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d);$$

*если же*

$$d \equiv 1 \pmod 4,$$

*то кромѣ того*

$$f[d,\ x + z - 2y \equiv 1 \pmod 4] = \frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_1(d),$$

$$f[d,\ x + z - 2y \equiv 3 \pmod 4] = \frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_2(d).$$

*Доказательство.* Какъ извѣстно, каждая бинарная форма опредѣлителя $-d$ эквивалентна нѣкоторой приведенной формѣ $(a, b, c)$ Гаусса или Лагранжа, т. е. такой, для которой

$$c \geqq a \geqq 2b.$$

Двѣ же различныя приведенныя формы $(a, b, c)$ и $(a', b', c')$ эквивалентны только тогда, когда или

$$a = c = a' = c', \qquad b' = -b,$$

или

$$a = a', \quad b = -b', \quad c = c', \quad a = |2b|\ ^{1}).$$

---

[1]) Чрезъ $|A|$ мы обозначаемъ абсолютную величину числа $A$.

Исключимъ изъ числа приведенныхъ формъ опредѣлителя $-d$ нечисто-коренныя (такъ какъ опредѣлитель $-d$ не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, то всѣ формы опредѣлителя $-d$ коренныя) и тѣ изъ чисто-коренныхъ, для которыхъ или

$$b = 0,$$

или

$$a = c, \quad b < 0,$$

или

$$a = -2b.$$

Тогда между оставшимися приведенными формами опредѣлителя $-d$ будетъ заключаться по одной и только одной формѣ изъ каждаго чисто-коренного класса бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, не содержащаго формы, въ которой коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю.

Всѣ эти формы разобьемъ на четыре слѣдующія группы:

1) $b$ нечетное и положительное,
2) $b$ нечетное и отрицательное,
3) $b$ четное и положительное,
4) $b$ четное и отрицательное.

Такъ какъ не чисто-коренныя формы исключены, то въ формахъ первыхъ двухъ группъ одно и только одно изъ чиселъ $a$ и $c$ четное, а въ формахъ двухъ послѣднихъ группъ оба числа $a$ и $c$ нечетныя.

Если

$$d \equiv 1 \pmod 4,$$

то число формъ первой группы, принадлежащихъ къ первому изъ упомянутыхъ въ § 1 разрядовъ, очевидно, равно

$$f[d,\ x + z - 2y \equiv 1 \pmod 4,\ x - 2y \geqq 0],$$

а число формъ первой группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d,\ x + z - 2y \equiv 3 \pmod 4,\ x - 2y \geqq 0].$$

Число же всѣхъ формъ первой группы, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod 4,$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod 4,$$

равно

$$f(d,\ x - 2y \geqq 0).$$

Каждая форма $(a, b, c)$ второй группы, для которой $a$ число четное, посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = \eta$$

переходитъ въ бинарную форму $(a', b', c')$ такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = a > b' = a + b, \quad c' > 2b' > a',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

и обратно, каждая бинарная форма $(a', b', c')$ такая, что

$$c' > a' > b', \quad c' > 2b' > a',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$
$$y = \eta$$

переходитъ въ форму второй группы, для которой $a$ число четное.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ къ первому разряду, для которыхъ $a$ число четное, равно

$$f[d,\ x \equiv 0 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 1 \pmod 4,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0],$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ ко второму разряду, для которыхъ $a$ число четное, равно

$$f[d,\ x \equiv 0 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 3 \pmod 4,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ второй группы, для которыхъ $a$ число четное, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod 4,$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod 4,$$

равно

$$f[d,\ x \equiv 0 \pmod 2,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0].$$

Каждая форма второй группы, для которой $a$ число нечетное и, слѣдовательно, $c$ число четное, посредствомъ нечистой (impropria) подстановки

$$x = \eta,$$
$$y = \xi + \eta$$

переходитъ въ бинарную форму $(a', b', c')$ такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = c > b' = c + b, \quad 2b' > c',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

и обратно каждая бинарная форма $(a', b', c')$ такая, что

$$c' > a' > b', \quad 2b' > c',$$
$$a' \text{ четное}, \quad b' \text{ и } c' \text{ нечетныя},$$

посредствомъ нечистой подстановки

$$x = -\xi + \eta,$$
$$y = \xi$$

переходитъ въ форму второй группы, для которой $a$ число нечетное.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

число формъ второй группы, принадлежащихъ къ первому рязряду, для которыхъ $a$ число нечетное, равно

$$f[d,\ x \equiv 0 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 1 \pmod 4,\ z - 2y < 0],$$

а число формъ второй группы, принадлежащихъ ко второму разряду, для которыхъ $a$ число нечетное, равно

$$f[d,\ x \equiv 0 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 3 \pmod 4,\ z - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ второй группы, для которыхъ $a$ число нечетное, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod 4,$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod 4,$$

равно

$$f[d,\ x \equiv 0 \pmod 2,\ z - 2y < 0].$$

Каждая форма $(a, b, c)$ третьей группы посредствомъ подстановки

$$x = -\eta,$$
$$y = \xi + \eta$$

переходитъ въ бинарную форму $(a', b', c')$ такую, что

$$c' = a + c - 2b > a' = c > b' = c - b, \quad 2b' \geqq c',$$
$$a' \text{ и } b' \text{ нечетныя}, \quad c' \text{ четное},$$

и обратно, каждая бинарная форма $(a', b', c')$ такая, что

$$c' > a' > b', \quad 2b' \geqq c',$$
$$a' \text{ и } b' \text{ нечетныя}, \quad c' \text{ четное},$$

посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = -\xi$$

переходитъ въ форму третьей группы.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

число формъ третьей группы, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 1 \pmod 4,\ z - 2y \leqq 0],$$

а число формъ третьей группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 3 \pmod 4,\ z - 2y \leqq 0].$$

Число же всѣхъ формъ третьей группы, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod 4,$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod 4,$$

равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod 2,\ z - 2y \leqq 0].$$

Каждая форма четвертой группы посредствомъ подстановки

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = \eta$$

переходитъ въ бинарную форму $(a', b', c')$ такую, что

$$c' = a + c + 2b > a' = a > b' = a + b, \quad a' < 2b' < c',$$

$a'$ и $b'$ нечетныя, $c'$ четное,

и обратно, каждая бинарная форма $(a', b', c')$ такая, что

$$c' > a' > b', \quad a' < 2b' < c',$$

$a'$ и $b'$ нечетныя, $c'$ четное,

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$
$$y = \eta$$

переходитъ въ форму четвертой группы.

Поэтому при

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

число формъ четвертой группы, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 1 \pmod 4,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0],$$

а число формъ четвертой группы, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod 2,\ x + z - 2y \equiv 3 \pmod 4,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0].$$

Число же всѣхъ формъ четвертой группы, какъ при

$$d \equiv 1 \pmod 4,$$

такъ и при

$$d \equiv 3 \pmod 4,$$

равно

$$f[d,\ x \equiv 1 \pmod 2,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0].$$

Принимая во вниманіе все изложенное, заключаемъ, что при

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

число

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2} - \omega_1(d),$$

равное числу формъ всѣхъ четырехъ группъ, принадлежащихъ къ первому разряду, равно

$$f[d,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4,\ x-2y\geqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4,\ z-2y>0,\ x-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4,\ z-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4,\ z-2y\leqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4,\ z-2y>0,\ x-2y<0]=$$
$$=f[d,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4],$$

а число

$$\frac{h^{(1)}(d)}{2}-\omega_2(d),$$

равное числу формъ всѣхъ четырехъ группъ, принадлежащихъ ко второму разряду, равно

$$f[d,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4,\ x-2y\geqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4,\ z-2y>0,\ x-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4,\ z-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4,\ z-2y\leqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1 \pmod 2,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4,\ z-2y>0,\ x-2y<0]=$$
$$=f[d,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4].$$

Число же

$$h^{(1)}(d)-\omega^{(1)}(d),$$

равное числу всѣхъ формъ всѣхъ четырехъ группъ, какъ при

$$d\equiv 1 \pmod 4,$$

такъ и при

$$d\equiv 3 \pmod 4,$$

равно

$$f[d,\ x-2y\geqq 0]+f[d,\ x\equiv 0 \pmod 2,\ z-2y>0,\ x-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 0 \pmod 2,\ z-2y<0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1 \pmod 2,\ z-2y\leqq 0]+$$
$$+f[d,\ x\equiv 1 \pmod 2,\ z-2y>0,\ x-2y<0]=f(d).$$

§ 3. **Лемма 2.** *Каково бы ни было цѣлое и положительное число $d$, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1 и удовлетворяющее сравненію*

$$d\equiv 3 \pmod 4,$$

*имѣетъ мѣсто равенство*

$$f[d,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4] = f[d,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4] = \frac{h^{(1)}(d)-\omega^{(1)}(d)}{2}.$$

*Доказательство.* Прежде всего замѣтимъ, что если рѣшеніе

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ таково, что $\eta$ и одно изъ чиселъ $\xi$ и $\zeta$ нечетныя, то одно изъ чиселъ $\xi$ и $\zeta$ дѣлится на 4.

Дѣйствительно, изъ равенства

$$\xi\zeta-\eta^2=d$$

и сравненій

$$-\eta^2\equiv 3,\quad d\equiv 3 \pmod 4$$

вытекаетъ сравненіе

$$\xi\zeta\equiv 0 \pmod 4,$$

которое и показываетъ, что одно изъ чиселъ $\xi$ и $\zeta$ дѣлится на 4.

Каждому рѣшенію

$$x=\xi_1,\quad y=\eta_1,\quad z=\zeta_1 \quad\ldots\ldots\ldots (3)$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ такому, что

$$\zeta_1>\xi_1>\eta_1,$$

$$\xi_1 \text{ и } \eta_1 \text{ нечетныя, } \zeta_1 \text{ четное,}$$

соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\left.\begin{aligned} x=\xi_1' &= \text{меньшему изъ чиселъ } \zeta_1 \text{ и } \xi_1+\zeta_1-2\eta_1,\\ y=\eta_1' &= \zeta_1-\eta_1,\\ z=\zeta_1' &= \text{большему изъ чиселъ } \zeta_1 \text{ и } \xi_1+\zeta_1-2\eta_1 \end{aligned}\right\}\ldots (4)$$

такое, что

$$\zeta_1'>\xi_1'>\eta_1',$$

$$\eta_1' \text{ и одно изъ чиселъ } \xi_1' \text{ и } \zeta_1' \text{ нечетныя,}$$

$$\xi_1'+\zeta_1'-2\eta_1'=\xi_1\equiv\xi_1+\zeta_1-2\eta_1+2 \pmod 4,$$

а каждому рѣшенію

$$x = \xi_2, \quad y = \eta_2, \quad z = \zeta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

уравненія (1) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ такому, что

$$\zeta_2 > \xi_2 > \eta_2,$$

$\xi_2$ четное, $\eta_2$ и $\zeta_2$ нечетныя,

соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi_2' = \text{меньшему изъ чиселъ } \xi_2 \text{ и } \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2, \\ x &= \eta_2' = \xi_2 - \eta_2, \\ z &= \zeta_2' = \text{большему изъ чиселъ } \xi_2 \text{ и } \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

такое, что

$$\zeta_2' > \xi_2' > \eta_2',$$

$\eta_2'$ и одно изъ чиселъ $\xi_2'$ и $\zeta_2'$ нечетныя,

$$\xi_2' + \zeta_2' - 2\eta_2' = \zeta_2 \equiv \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 + 2 \pmod 4.$$

Притомъ рѣшенія (6), получаемыя по указанному сейчасъ способу изъ рѣшеній (5), отличны отъ рѣшеній (4), получаемыхъ по указанному выше способу изъ рѣшеній (3).

Дѣйствительно, изъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 &= \xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1, \\ \xi_2 - \eta_2 &= \zeta_1 - \eta_1, \\ \xi_2 &= \zeta_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

вытекаютъ, какъ слѣдствія, равенства

$$\xi_2 = \zeta_1, \quad \eta_2 = \eta_1, \quad \zeta_2 = \xi_1,$$

которыя невозможны, такъ какъ

$$\zeta_1 > \xi_1, \quad \zeta_2 > \xi_2,$$

а потому и равенства (7) невозможны. Равенства же

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1, \\ \xi_2 - \eta_2 &= \zeta_1 - \eta_1, \\ \xi_2 + \zeta_2 - 2\eta_2 &= \zeta_1 \end{aligned}$$

невозможны потому, что $\xi_2$ число четное, а $\xi_1 + \zeta_1 - 2\eta_1$ число нечетное.

Также очевидно, что рѣшенія (4), получаемыя изъ различныхъ рѣшеній (3), различны между собою, а рѣшенія (6), получаемыя изъ различныхъ (5), различны между собою.

Принимая во вниманіе все сказанное, заключаемъ, что

$$f[d,\ x+z-2y\equiv 1 \pmod 4] = f[d,\ x+z-2y\equiv 3 \pmod 4] = \frac{h^{(1)}(d)-\omega^{(1)}(d)}{2}.$$

§ 4. **Лемма 3.** *Пусть $P$ нечетное число, большее 1 и не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.*

*Обозначимъ число разложеній $P$ на три множителя*

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

*такихъ, что*

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod 4,$$

*чрезъ*

$$\Phi(P),$$

*число остальныхъ разложеній $P$ на три множителя*

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

*чрезъ*

$$\Psi(P),$$

*а число всѣхъ разложеній $P$ на три множителя*

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

*чрезъ*

$$\psi(P).$$

*Пусть, далѣе, $d$ будетъ дѣлитель числа $P$, удовлетворяющій сравненію*

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

*и отличный отъ 1; мы положимъ*

$$\Omega_1(d) = \omega_1(d), \quad \Omega_2(d) = \omega_2(d),$$

*если*

$$P \equiv 1 \pmod 4,$$

*и*

$$\Omega_1(d) = \omega_2(d), \quad \Omega_2(d) = \omega_1(d),$$

*если*

$$P \equiv 3 \pmod 4.$$

*Пусть, наконецъ, въ суммѣ*

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

*суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1, въ суммѣ*

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$$

*суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, удовлетворяющіе сравненію*

$$d \equiv 3 \pmod 4,$$

*а въ суммахъ*

$$\sum_1 \Omega_1(d) \quad \text{и} \quad \sum_1 \Omega_2(d)$$

*суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, удовлетворяющіе сравненію*

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

*и отличные отъ 1.*

*Въ такомъ случаѣ*

$$\sum \omega^{(1)}(d) = 3\psi(P) + 1,$$

*и кромѣ того*

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + 1,$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P),$$

*если*

$$P \equiv 1 \pmod 4;$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \frac{1}{2},$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P) + \frac{1}{2},$$

*если*

$$P \equiv 3 \pmod 4.$$

*Доказательство.* Сумма

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$$

равна половинѣ числа приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители $-d$ которыхъ, взятые съ обратными знаками, дѣлятъ $P$ и удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 3 \pmod 4,$$

и въ которыхъ коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю.

Совокупность этихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(X).$$

Сумма

$$\sum_1 \Omega_1(d)$$

равна числу приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители $-d$ которыхъ дѣлятъ $P$, удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

и отличны отъ 1, въ которыхъ коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю и которые принадлежатъ къ первому или второму изъ упомянутыхъ въ § 1 разрядовъ, смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 1 \pmod 4$$

или

$$P \equiv 3 \pmod 4.$$

Совокупность всѣхъ этихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(Y).$$

Сумма

$$\sum_1 \Omega_2(d)$$

равна числу приведенныхъ формъ Гаусса, опредѣлители $-d$ которыхъ дѣлятъ $P$, удовлетворяютъ сравненію

$$d \equiv 1 \pmod 4$$

и отличны отъ 1, въ которыхъ коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю и которые принадлежатъ ко второму или первому разряду, смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 1 \pmod 4$$

или

$$P \equiv 3 \pmod 4.$$

Совокупность всѣхъ этихъ послѣднихъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(Z).$$

Наконецъ сумма

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

равна числу формъ, заключающихся во всѣхъ трехъ совокупностяхъ $(X)$, $(Y)$ и $(Z)$.

Каждому разложенію $P$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы $(a, 0, c)$ изъ совокупностей $(X)$, $(Y)$ и $(Z)$:

1) $a = d_1$, $c = d_2$, опредѣлителя $-d_1 d_2$,
2) $a = d_2$, $c = d_3$, опредѣлителя $-d_2 d_3$,
3) $a = d_1$, $c = d_3$, опредѣлителя $-d_3 d_1$.

Всѣ эти формы принадлежатъ къ совокупности $(Y)$, если

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod 4.$$

Во всѣхъ же остальныхъ случаяхъ двѣ формы принадлежатъ къ совокупности $(X)$ и одна къ совокупности $(Z)$.

Разложенію

$$P = 1 . 1 . P$$

соотвѣтствуетъ одна форма $(a, 0, c)$ изъ совокупностей $(X)$, $(Y)$ и $(Z)$,

$$a = 1, \quad c = P, \text{ опредѣлителя } -P,$$

которая принадлежитъ къ совокупности $(X)$ или $(Y)$, смотря по тому, будетъ-ли

$$P \equiv 3 \pmod 4$$

или

$$P \equiv 1 \pmod 4.$$

Кромѣ получающихся по указаннымъ сейчасъ способамъ изъ различныхъ разложеній $P$ на три множителя формъ, принадлежащихъ къ совокупностямъ $(X)$, $(Y)$ и $(Z)$, другихъ нѣтъ.

Поэтому при

$$P \equiv 1 \pmod 4$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + 1,$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P),$$

при

$$P \equiv 3 \pmod 4$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_1(d) = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \frac{1}{2},$$

$$\sum_3 \frac{\omega^{(1)}(d)}{2} + \sum_1 \Omega_2(d) = 2\Psi(P) + \frac{1}{2},$$

и наконецъ, какъ при

$$P \equiv 1 \pmod 4,$$

такъ и при

$$P \equiv 3 \pmod 4,$$

$$\sum \omega^{(1)}(d) = 3\psi(P) + 1.$$

§ 5. **Лемма 4.** *Каково бы ни было четное и положительное число $d$, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, имѣетъ мѣсто равенство*

$$f(d) = \frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2}.$$

*Доказательство.* Такъ какъ $d$ число четное и не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей, то всѣ формы опредѣлителя $-d$ чисто-коренныя.

Такъ какъ, далѣе, уравненія

$$x^2 - y^2 = d,$$
$$y(2z - y) = d$$

не имѣютъ рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ, то между формами $(a, b, c)$ опредѣлителя $-d$ нѣтъ ни такихъ, для которыхъ

$$a = c,$$

ни такихъ, для которыхъ

$$a = |2b|,$$

и, слѣдовательно, между приведенными формами Гаусса опредѣлителя $-d$ нѣтъ эквивалентныхъ между собою.

Разобьемъ всѣ приведенныя формы Гаусса опредѣлителя $-d$, для которыхъ коэффиціентъ при $xy$ не равенъ нулю, на 6 группъ:

1) $b$ нечетное и положительное, $a$ и $c$ нечетныя,
2) $b$ нечетное и отрицательное, $a$ и $c$ нечетныя,
3) $b$ четное и положительное, $a$ четное, $c$ нечетное,
4) $b$ четное и отрицательное, $a$ четное, $c$ нечетное,
5) $b$ четное и положительное, $a$ нечетное, $c$ четное,
6) $b$ четное и отрицательное, $a$ нечетное, $c$ четное.

Очевидно, что число формъ второй группы равно числу формъ первой группы, число формъ четвертой группы равно числу формъ третьей группы, а число формъ шестой группы равно числу формъ пятой группы.

Число формъ первой группы очевидно равно

$$f(d,\ x-2y>0)=f(d,\ x-2y\geqq 0).$$

Каждая форма $(a,\ b,\ c)$ третьей группы посредствомъ подстановки

$$x=-\eta,$$
$$y=\xi+\eta,$$

переходитъ въ бинарную форму $(a',\ b',\ c')$ такую, что

$$c'=a+c-2b>a'=c>b'=c-b,\quad 2b'>c',$$
$$a',\ b'\ \text{и}\ c'\ \text{нечетныя},$$

и обратно, каждая бинарная форма $(a',\ b',\ c')$ такая, что

$$c'>a'>b',\quad 2b'>c',$$
$$a',\ b'\ \text{и}\ c'\ \text{нечетныя},$$

переходитъ посредствомъ подстановки

$$x=\xi+\eta,$$
$$y=-\xi,$$

въ форму третьей группы.

Поэтому число формъ третьей группы равно

$$f(d,\ z-2y<0)=f(d,\ z-2y\leqq 0).$$

Каждая форма $(a,\ b,\ c)$ шестой группы посредствомъ подстановки

$$x=\xi+\eta,$$
$$y=\eta,$$

переходитъ въ бинарную форму $(a',\ b',\ c')$ такую, что

$$c'=a+c+2b>a'=a>b'=a+b,\quad c'>2b'>a',$$
$$a',\ b'\ \text{и}\ c'\ \text{нечетныя},$$

и обратно, каждая бинарная форма $(a',\ b',\ c')$ такая, что

$$c'>a'>b',\quad c'>2b'>a',$$
$$a',\ b'\ \text{и}\ c'\ \text{нечетныя},$$

НС 554852

посредствомъ подстановки

$$x = \xi - \eta,$$
$$y = \eta,$$

переходитъ въ форму шестой группы.

Поэтому число формъ шестой группы равно

$$f(d,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0).$$

Число же

$$\frac{h^{(1)}(d) - \omega^{(1)}(d)}{2},$$

равное половинѣ числа всѣхъ шести группъ, равно

$$f(d,\ x - 2y \geqq 0) + f(d,\ z - 2y \leqq 0) + f(d,\ z - 2y > 0,\ x - 2y < 0) = f(d).$$

§ 6. **Лемма 5.** *Каково бы ни было нечетное и положительное число* $P > 1$,

$$\sum \omega^{(1)}(2d) = 2 \sum \omega^{(1)}(d) = 2\,[3\psi(P) + 1],$$

*причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители* $d$ *числа* $P$, *отличные отъ* 1.

*Доказательство.* Сумма

$$\sum \omega^{(1)}(2d)$$

равна числу приведенныхъ бинарныхъ формъ Гаусса, опредѣлители которыхъ четные, дѣлятъ $2P$ и отличны отъ 2, и въ которыхъ коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю.

Совокупность всѣхъ такихъ формъ обозначимъ чрезъ $(A)$.

Сумма

$$\sum \omega^{(1)}(d)$$

равна числу приведенныхъ бинарныхъ формъ Гаусса, опредѣлители которыхъ дѣлятъ $P$ и отличны отъ 1, и въ которыхъ коэффиціентъ при $xy$ равенъ нулю.

Совокупность всѣхъ такихъ формъ обозначимъ чрезъ $(B)$.

Каждой формѣ

$$ax^2 + cy^2$$

изъ совокупности $(B)$ соотвѣтствуютъ двѣ формы:

$$ax^2 + 2cy^2,$$
$$a'x^2 + c'y^2,$$

гдѣ

$a'$ равно меньшему изъ чиселъ $2a$ и $c$,

$c'$ равно большему изъ чиселъ $2a$ и $c$,

изъ совокупности $(A)$.

Кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу изъ формъ совокупности $(B)$ въ совокупности $(A)$ другихъ нѣтъ.

Поэтому

$$\sum\omega^{(1)}(2d) = 2\sum\omega^{(1)}(d) = 2\,[3\psi(P)+1].$$

§ 7. Будемъ называть, слѣдуя Зеллингу, тройничную форму

$$g(y-z)^2+h(z-x)^2+k(x-y)^2+lx^2+my^2+nz^2$$

приведенною, если между числами

$$\left.\begin{matrix} g\,,\ h\,,\ k\,, \\ l\,,\ m\,,\ n \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

нѣтъ отрицательныхъ *).

Всѣ приведенныя формы даннаго опредѣлителя

$$D = gl(h+k+m+n)+hm(k+g+n+l)+kn(g+h+l+m)+ \\ +g(hn+km)+l(hk+mn),$$

который мы предположимъ $>1$, разобьемъ на пять группъ перваго порядка:

1) ни одно изъ чиселъ таблицы (8) не равно нулю;

2) одно и только одно изъ этихъ чиселъ равно нулю;

3) два числа, стоящія въ одномъ столбцѣ таблицы (8), равны нулю, всѣ прочія числа этой таблицы отличны отъ нуля;

4) два числа таблицы (8), не стоящія въ одномъ столбцѣ, равны нулю, всѣ прочія числа этой таблицы отличны отъ нуля;

5) три числа таблицы (8) равны нулю.

Приведенныя формы второй группы перваго порядка разобьемъ на шесть группъ второго порядка:

1) $g=0$, 2) $h=0$, 3) $k=0$, 4) $l=0$, 5) $m=0$, 6) $n=0$.

*) Въ этомъ параграфѣ и слѣдующихъ мы предполагаемъ, что читатель знакомъ съ первой частью мемуара Зеллинга: „Des formes quadratiques binaires et ternaires“ (Journ. de Liouville, 1877), или съ тремя первыми главами сочиненія Борисова: „О приведеніи положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ по способу Зеллинга“.

Приведенныя формы третьей группы перваго порядка разобьемъ на три группы второго порядка:

$$1)\ g=l=0,\quad 2)\ h=m=0,\quad 3)\ k=n=0.$$

Приведенныя формы четвертой группы перваго порядка разобьемъ на двѣнадцать группъ второго порядка:

1) $g=h=0$, 5) $h=k=0$, 8) $k=l=0$, 10) $l=m=0$, 12) $m=n=0$.
2) $g=k=0$, 6) $h=l=0$, 9) $k=m=0$, 11) $l=n=0$,
3) $g=m=0$, 7) $h=n=0$,
4) $g=n=0$,

Приведенныя формы пятой группы перваго порядка разобьемъ на шестнадцать группъ второго порядка:

1) $g=h=k=0$,
2) $g=h=l=0$,
3) $g=h=m=0$,
4) $g=k=l=0$,
5) $g=k=n=0$,
6) $g=l=m=0$,
7) $g=l=n=0$,
8) $g=m=n=0$,
9) $h=k=m=0$,
10) $h=k=n=0$,
11) $h=l=m=0$,
12) $h=l=n=0$,
13) $h=m=n=0$,
14) $k=l=m=0$,
15) $k=l=n=0$,
16) $k=m=n=0$.

(Случаи

$$1)\ g=h=n=0,\quad 2)\ g=k=m=0,\quad 3)\ h=k=l=0,\quad 4)\ l=m=n=0$$

невозможны).

Обозначимъ число чисто-коренныхъ классовъ тройничныхъ формъ опредѣлителя $D$ чрезъ

$$H^{(1)}(D),$$

а число нечисто-коренныхъ классовъ чрезъ

$$H^{(2)}(D),$$

число чисто-коренныхъ классовъ тройничныхъ формъ опредѣлителя $D$, эквивалентныхъ приведеннымъ формамъ $i$-ой группы перваго порядка и такихъ, что число $\mu$ подстановокъ, посредствомъ которыхъ форма переходитъ сама въ себя, равно $\alpha$, чрезъ

$$H_i^{(1)}(D,\alpha),$$

число нечисто-коренныхъ классовъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$H_i^{(2)}(D, \alpha),$$

число различныхъ чисто-коренныхъ приведенныхъ формъ, принадлежащихъ къ $i$-ой группѣ 1-го порядка, для которыхъ $\mu = \alpha$, чрезъ

$$F_i^{(1)}(D, \alpha),$$

число различныхъ нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_i^{(2)}(D, \alpha),$$

наконецъ число чисто-коренныхъ приведенныхъ формъ, принадлежащихъ къ $i$-ой группѣ перваго порядка и $j$-ой группѣ второго порядка, для которыхъ $\mu = \alpha$, чрезъ

$$F_{i,j}^{(1)}(D, \alpha),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F_{i,j}^{(2)}(D, \alpha).$$

Мы будемъ имѣть, каковы бы ни были возможныя значенія $i$, $p$, $q$, $j$ и $\mu$,

$$F_{i,p}^{(j)}(D, \mu) = F_{i,q}^{(j)}(D, \mu)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
H_1^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_1^{(j)}(D, \mu)}{24} \\
H_2^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_2^{(j)}(D, \mu)}{2.24} = \frac{\mu 6 F_{2,1}^{(j)}(D, \mu)}{2.24} = \frac{\mu F_{2,1}^{(j)}(D, \mu)}{8}, \\
H_3^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_3^{(j)}(D, \mu)}{3.24} = \frac{\mu 3 F_{3,1}^{(j)}(D, \mu)}{3.24} = \frac{\mu F_{3,1}^{(j)}(D, \mu)}{24}, \\
H_4^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_4^{(j)}(D, \mu)}{6.24} = \frac{\mu 12 F_{4,1}^{(j)}(D, \mu)}{6.24} = \frac{\mu F_{4,1}^{(j)}(D, \mu)}{12}, \\
H_5^{(j)}(D, \mu) &= \frac{\mu F_5^{(j)}(D, \mu)}{16.24} = \frac{\mu 16 F_{5,1}^{(j)}(D, \mu)}{16.24} = \frac{\mu F_{5,1}^{(j)}(D, \mu)}{24}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Поэтому для нашей цѣли достаточно разобрать слѣдующіе типы приведенныхъ формъ:

ни одно изъ чиселъ $g, h, k, l, m, n$ не равно нулю . . (1),

$g = 0, h, k, l, m, n$ отличны отъ нуля . . . . . (2,1),

$g = l = 0, h, k, m, n$ отличны отъ нуля . . . . . (3,1),

$g = h = 0, k, l, m, n$ отличны отъ нуля . . . . . (4,1),

$g = h = k = 0, l, m, n$ отличны отъ нуля . . . . . (5,1).

Мы ограничимся во всемъ дальнѣйшемъ разборомъ двухъ слѣдующихъ случаевъ:

$$D = P, \quad D = 2P,$$

гдѣ чрезъ $P$ обозначено нѣкоторое нечетное число, не имѣющее квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1. Въ этихъ случаяхъ всѣ тройничныя формы опредѣлителя $D$ коренныя.

Прежде всего докажемъ, что для формъ типовъ (1) и (2,1)

$$\mu = 1 \text{ или } 2,$$

для формъ типа (3,1)

$$\mu = 1, 2 \text{ или } 6,$$

для формъ типа (4,1)

$$\mu = 2, 4 \text{ или } 12,$$

и для формъ типа (5,1)

$$\mu = 4 \text{ или } 8.$$

Дѣйствительно, каковъ бы ни былъ опредѣлитель $D$, для формъ типа (1)

$$\mu > 2$$

только въ слѣдующихъ случаяхъ

1) $g = h = l = m$; 2) $h = k = m = n$; 3) $k = g = n = l$;

4) $g = l, h = m, k = n$;

5) $g = h = k, l = m = n$; 6) $g = h = n, l = m = k$;

7) $h = k = l, m = n = g$; 8) $k = g = m, n = l = h$.

Но при

$$g = h = l = m = \varrho$$

имѣемъ

$$D = 2\varrho^2(2\varrho + k + n) + 4\varrho kn + 2\varrho^2(k+n) = 4\varrho(\varrho+k)(\varrho+n) \equiv 0 \pmod 4;$$

а потому первый изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ невозможенъ.

Точно также невозможны случаи второй и третій.

Случай четвертый невозможенъ, такъ какъ при

$$g = l = \varrho, \quad h = m = \sigma, \quad k = n = \tau$$

имѣемъ

$$D = 2\varrho^2(\sigma+\tau) + 2\sigma^2(\tau+\varrho) + 2\tau^2(\varrho+\sigma) + 4\varrho\sigma\tau =$$
$$= 2(\varrho+\sigma)(\sigma+\tau)(\tau+\varrho) \equiv 0 \pmod 4.$$

При

$$g = h = k = \varrho, \quad l = m = n = \sigma$$

опредѣлитель

$$D = 6\varrho\sigma(\varrho+\sigma) + 2\varrho^2\sigma + \sigma(\varrho^2+\sigma^2) = \sigma(3\varrho+\sigma)^2$$

дѣлится на квадратъ $> \sqrt[3]{D}$, а потому случай пятый невозможенъ.

Также невозможны и остальные три случая.

Итакъ, для формъ типа (1)

$$\mu = 1 \text{ или } 2.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель $D$, для формъ типа (2,1)

$$\mu > 2$$

только при

$$n = h, \quad k = m.$$

Но при

$$n = h = \varrho, \quad k = m = \sigma$$

имѣемъ

$$D = 2\varrho\sigma(\varrho+\sigma+l) + 2\varrho\sigma l = 2\varrho\sigma(\varrho+\sigma+2l) \equiv 0 \pmod 4,$$

а потому при нашемъ предположеніи для формъ типа (2,1)

$$\mu = 1 \text{ или } 2.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель $D$, для формъ тина (3,1) $\mu$ можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$1, 2, 4, 6 \text{ и } 24,$$

причемъ

$$\mu = 4 \text{ или } 24$$

только въ слѣдующихъ случаяхъ:

$$1)\ h = k,\ m = n, \quad 2)\ h = m,\ k = n, \quad 3)\ h = n,\ k = m.$$

Но при

$$g = l = 0,\ h = k = \varrho,\ m = n = \sigma$$

имѣемъ

$$D = \varrho\sigma(\varrho + \sigma) + \varrho\sigma(\varrho + \sigma) = 2\varrho\sigma(\varrho + \sigma) \equiv 0 \pmod 4,$$

а потому первый изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ невозможенъ.

Также невозможны и остальные случаи.

Итакъ, для формы типа (3,1)

$$\mu = 1,\ 2 \text{ или } 6.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель $D$, для формъ типа (4,1) $\mu$ можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$2,\ 4 \text{ и } 12.$$

Каковъ бы ни былъ опредѣлитель $D$, для формъ типа (5,1) $\mu$ можетъ имѣть только слѣдующія значенія:

$$4,\ 8 \text{ и } 24,$$

причемъ значеніе

$$\mu = 24$$

получается только при

$$l = m = n.$$

Но при

$$l = m = n = \varrho$$

имѣемъ

$$D = \varrho^3,$$

а потому для формы типа (5,1)

$$\mu = 4 \text{ или } 8.$$

Принимая во вниманіе сейчасъ доказанное, изъ формулъ (9) выводимъ

$$\left.\begin{aligned}
H^{(j)}(D,2) &= \frac{F_1^{(j)}(D,2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(j)}(D,2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(j)}(D,2)}{12} + \frac{F_{4,1}^{(j)}(D,2)}{6}, \\
H^{(j)}(D,4) &= \frac{F_{4,1}^{(j)}(D,4)}{3} + \frac{F_{5,1}^{(j)}(D,4)}{6}, \\
H^{(j)}(D,6) &= \frac{F_{3,1}^{(j)}(D,6)}{4}, \\
H^{(j)}(D,8) &= \frac{F_{5,1}^{(j)}(D,8)}{3}, \\
H^{(j)}(D,12) &= F_{4,1}^{(j)}(D,12).
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

§ 8. Обратимся къ подробному разбору формъ типа (5,1). Всѣ формы этого типа, очевидно, чисто-коренныя и слѣдовательно

$$F_{5,1}^{(2)}(D,4) = F_{5,1}^{(2)}(D,8) = 0,$$
$$H^{(2)}(D,8) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Для формъ разсматриваемаго типа

$$D = lmn.$$

Значеніе $\mu = 8$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (5,1), для которыхъ два изъ чиселъ

$$l,\ m \text{ и } n$$

равны между собою, а это имѣетъ мѣсто только въ трехъ слѣдующихъ случаяхъ:

1) $l=D$, $m=n=1$, 2) $l=1$, $m=D$, $n=1$, 3) $l=m=1$, $n=D$,

такъ какъ $D$ не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1.

Слѣдовательно

$$F_{5,1}^{(1)}(D,8) = 3,$$
$$H^{(1)}(D,8) = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Для всѣхъ остальныхъ формъ типа (5,1)

$$\mu = 4.$$

Каждому разложенію $D$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < D$$

соотвѣтствуютъ шесть формъ типа (5,1), для которыхъ

$$\mu = 4,$$

а именно:

$$\begin{aligned}
&1)\ l = d_1, \quad m = d_2, \quad n = d_3,\\
&2)\ l = d_1, \quad m = d_3, \quad n = d_2,\\
&3)\ l = d_2, \quad m = d_1, \quad n = d_3,\\
&4)\ l = d_2, \quad m = d_3, \quad n = d_1,\\
&5)\ l = d_3, \quad m = d_1, \quad n = d_2,\\
&6)\ l = d_3, \quad m = d_2, \quad n = d_1,
\end{aligned}$$

и кромѣ получающихся по указанному сейчасъ способу изъ всевозможныхъ разложеній $D$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < D$$

формъ типа (4,1), для которыхъ

$$\mu = 4,$$

другихъ нѣтъ.

Поэтому

$$F^{(1)}_{5,1}(D, 4) = 6\psi(D),$$

гдѣ

$$\psi(D)$$

означаетъ, какъ и въ § 4 число разложеній $D$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3.$$

§ 9. Разсмотримъ формы типа (4,1).

Для формъ этого типа

$$D = n(lm + mk + kl).$$

Значеніе $\mu = 12$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ, для которыхъ

$$k = l = m.$$

Это имѣетъ мѣсто только тогда, когда

$$D \equiv 0 \pmod 3,$$
$$k = l = m = 1, \quad n = \frac{D}{3},$$

т. е. только для формы

$$(x-y)^2 + x^2 + y^2 + \frac{D}{3}z^2 = 2x^2 + 2y^2 + \frac{D}{3}z^2 - 2xy,$$

чисто-коренной при

$$D = P$$

и нечисто-коренной при

$$D = 2P.$$

Итакъ, при

$$D = P$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D, 12) &= F^{(1)}_{4,1}(D, 12) = \alpha, \\ H^{(2)}(D, 12) &= F^{(2)}_{4,1}(D, 12) = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

гдѣ

$$\alpha = 1 \text{ при } P \equiv 0 \pmod 3,$$
$$\alpha = 0 \text{ при } P \text{не} \equiv 0 \pmod 3,$$

а при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D, 12) &= F^{(1)}_{4,1}(D, 12) = 0, \\ H^{(2)}(D, 12) &= F^{(2)}_{4,1}(D, 12) = \beta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

гдѣ

$$\beta = 1 \text{ при } P \equiv 0 \pmod 3,$$
$$\beta = 0 \text{ при } P \text{не} \equiv 0 \pmod 3.$$

Значеніе $\mu = 4$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (4,1), которыя принадлежатъ къ одному изъ трехъ слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$l = m \text{ не} = k, \quad \ldots\ldots\ldots (4,1,1)$$
$$m = k \text{ не} = l, \quad \ldots\ldots\ldots (4,1,2)$$
$$k = l \text{ не} = m. \quad \ldots\ldots\ldots (4,1,3)$$

Каждый изъ типовъ (4,1,1), (4,1,2) и (4,1,3) содержитъ, очевидно, какъ одно и то же число чисто-коренныхъ формъ, такъ и одно и то же число нечисто-коренныхъ формъ.

При

$$l = m = \varrho$$

имѣемъ

$$D = n\varrho(\varrho + 2k).$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Въ этомъ случаѣ существуютъ только чисто-коренныя формы.

Если

$$P \text{не} \equiv 0 \pmod 3,$$

то каждому разложенію $P$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = d_1, \quad \varrho = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2)\ n = d_2, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3)\ n = d_3, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2}.$$

Разложенію же

$$P = 1 . 1 . P$$

соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n = 1, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{P-1}{2}.$$

Поэтому при

$$D = P \text{не} \equiv 0 \pmod 3$$

число формъ типа (4,1,1) равно

$$3\psi(P) + 1,$$

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 4) = 9\psi(P) + 3,$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F^{(1)}_{4,1}(D, 4)}{3} + \frac{F^{(1)}_{5,1}(D, 4)}{6} = 4\psi(P) + 1.$$

Если

$$D = P \equiv 0 \pmod 3,$$

то каждому разложенію $P$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P,$$

за исключеніемъ разложенія

$$P = 1.3.\frac{P}{3},$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = d_1,\quad \varrho = l = m = d_2,\quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2)\ n = d_2,\quad \varrho = l = m = d_1,\quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3)\ n = d_3,\quad \varrho = l = m = d_1,\quad k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

разложенію

$$P = 1.3.\frac{P}{3} \text{ при } P > 3$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (4,1,1)

$$1)\ n = 1,\quad \varrho = l = m = 3,\quad k = \frac{\frac{P}{3} - 3}{2},$$

$$2)\ n = 3,\quad \varrho = l = m = 1,\quad k = \frac{\frac{P}{3} - 1}{2},$$

разложенію же

$$P = 1.1.P$$

при $P > 3$ соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n = 1,\quad \varrho = l = m = 1,\quad k = \frac{P-1}{2},$$

а при $P = 3$ ни одной.

Поэтому при

$$D = P \equiv 0 \pmod 3$$

число формъ типа (4,1,1) равно

$$3\psi(P),$$

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 4) = 9\psi(P),$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F^{(1)}_{4,1}(D, 4)}{3} + \frac{F^{(1)}_{5,1}(D, 4)}{6} = 4\psi(P).$$

Всѣ эти разсужденія показываютъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$H^{(1)}(D, 4) = 4\psi(P) + 1 - \alpha. \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Разсмотримъ теперь случай

$$D = 2P.$$

Въ этомъ случаѣ существуютъ какъ чисто-коренныя, такъ и нечисто-коренныя формы.

Изъ равенства

$$D = 2P = n\varrho(\varrho + 2k)$$

слѣдуетъ, что для формъ типа (4,1,1) число $n$ должно быть четнымъ, а число $\varrho = l = m$ нечетнымъ.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго форма

$$k(x - y)^2 + \varrho x^2 + \varrho y^2 + nz^2$$

типа (4,1,1) чисто-коренная или нечисто-коренная, смотря по тому, четное или нечетное число $k$.

Если

$$P \text{не} \equiv 0 \pmod 3,$$

то каждому разложенію $P$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = 2d_1, \quad \varrho = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2)\ n = 2d_2, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3)\ n = 2d_3, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

всѣ чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod 4$$

имѣютъ мѣсто; въ противномъ же случаѣ только одна изъ указанныхъ сейчасъ формъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P = 1 . 1 . P$$

соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n = 2, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{P-1}{2},$$

чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod 4$$

и нечисто-коренныя при

$$P \equiv 3 \pmod 4.$$

Поэтому при

$$D = 2P \text{не} \equiv 0 \pmod 3$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$3\Phi(P) + \Psi(P) + \gamma,$$

гдѣ

$$\gamma = 1 \text{ при } P \equiv 1 \pmod 4,$$
$$\gamma = 0 \text{ при } P \equiv 3 \pmod 4,$$

а число нечисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$2\Psi(P) + 1 - \gamma.$$

Слѣдовательно, при

$$D = 2P \text{не} \equiv 0 \pmod 3$$

имѣемъ

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 4) = 9\Phi(P) + 3\Psi(P) + 3\gamma,$$
$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F^{(1)}_{4,1}(D, 4)}{3} + \frac{F^{(1)}_{5,1}(D, 4)}{6} = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma,$$
$$F^{(2)}_{4,1}(D, 4) = 6\Psi(P) + 3(1 - \gamma),$$
$$H^{(2)}(D, 4) = \frac{F^{(2)}_{4,1}(D, 4)}{3} = 2\Psi(P) + 1 - \gamma.$$

Пусть теперь

$$D = 2P \equiv 0 \pmod 3.$$

Въ такомъ случаѣ каждому разложенію $P$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P,$$

за исключеніемъ разложенія

$$1.3.\frac{P}{3},$$

соотвѣтствуютъ три формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = 2d_1, \quad \varrho = l = m = d_2, \quad k = \frac{d_3 - d_2}{2},$$

$$2)\ n = 2d_2, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_3 - d_1}{2},$$

$$3)\ n = 2d_3, \quad \varrho = l = m = d_1, \quad k = \frac{d_2 - d_1}{2},$$

всѣ чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod 4$$

имѣютъ мѣсто; въ противномъ же случаѣ только одна изъ указанныхъ сейчасъ формъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P = 1.3.\frac{P}{3} \text{ при } P > 3$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (4,1,1):

$$1)\ n = 2, \quad \varrho = l = m = 3, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 3}{2},$$

$$2)\ n = 6, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{\frac{P}{3} - 1}{2},$$

изъ которыхъ одна чисто-коренная, другая нечисто-коренная.

Наконецъ разложенію

$$P = 1.1.P$$

при $P > 3$ соотвѣтствуетъ одна форма типа (4,1,1):

$$n = 2, \quad \varrho = l = m = 1, \quad k = \frac{P-1}{2},$$

чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod 4$$

и нечисто-коренная при

$$P \equiv 3 \pmod 4$$

а при

$$P = 3$$

ни одной.

Поэтому при

$$D = 2P \equiv 0 \pmod 3$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$3\Phi(P) + \Psi(P) + \gamma,$$

а число нечисто-коренныхъ формъ типа (4,1,1) равно

$$2\Psi(P) + (1-\gamma) - 1$$

и, слѣдовательно,

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 4) = 9\Phi(P) + 3\Psi(P) + 3\gamma,$$

$$H^{(1)}(D, 4) = \frac{F^{(1)}_{4,1}(D, 4)}{3} + \frac{F^{(1)}_{5,1}(D, 4)}{6} = 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma,$$

$$F^{(2)}_{4,1}(D, 4) = 6\Psi(P) + 3(1-\gamma) - 1,$$

$$H^{(2)}(D, 4) = 2\Psi(P) + (1-\gamma) - 1.$$

Всѣ разсужденія, относящіяся къ случаю

$$D = 2P,$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D, 4) &= 3\Phi(P) + \Psi(P) + \psi(2P) + \gamma, \\ H^{(2)}(D, 4) &= 2\Psi(P) + (1-\gamma) - \beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

§ 10. Обратимся къ опредѣленію чиселъ

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2) \text{ и } F^{(2)}_{4,1}(D, 2).$$

Изъ равенства

$$D = n(lm + mk + kl)$$

видно, что для любой формы типа (4,1) число

$$lm + mk + kl$$

должно быть дѣлителемъ $D$.

Формы типа (4,1) для которыхъ $\mu = 2$ и число

$$lm + mk + kl$$

равно дѣлителю $d$ опредѣлителя $D$, будемъ называть принадлежащими къ дѣлителю $d$ опредѣлителя $D$.

Число чисто-коренныхъ формъ типа (4,1), принадлежащихъ къ дѣлителю $d$ опредѣлителя $D$, обозначимъ чрезъ

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2, d)$$

а число нечисто-коренныхъ формъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ, чрезъ

$$F^{(2)}_{4,1}(D, 2, d).$$

Очевидно, что

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2, 1) = F^{(2)}_{4,1}(D, 2, 1) = 0,$$

а при $D$ четномъ кромѣ того

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2, 2) = F^{(2)}_{4,1}(D, 2, 2) = 0.$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Въ этомъ случаѣ

$$F^{(2)}_{4,1}(D, 2) = 0.$$

Число

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2, d)$$

очевидно равно числу бинарныхъ формъ

$$k(x - y)^2 + lx^2 + my^2$$

опредѣлителя $-d$, приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ всѣ три коэффиціента $k$, $l$, $m$ отличны отъ нуля и различны между собою.

Слѣдовательно,

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2, d) = 3(h^{(1)}[d) + h^{(2)}(d) - \Omega(d)],$$

гдѣ

$$\Omega(d)$$

обозначаетъ число классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, для которыхъ въ соотвѣтственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два изъ нихъ равны между собою, и

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2) = \sum F^{(1)}_{4,1}(D, 2, d) = 3\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\} - 3\sum \Omega(d),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Сумма

$$\sum \Omega(d)$$

равна числу классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ, взятые съ обратнымъ знакомъ, дѣлятъ $P$ и отличны отъ 1, и для которыхъ въ соотвѣтственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ коэффиціентъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(T).$$

Каждому разложенію $P$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности $(T)$, эквивалентныхъ одной изъ трехъ слѣдующихъ приведенныхъ формъ Зеллинга:

$$1)\ d_1x^2 + d_2y^2,$$
$$2)\ d_2x^2 + d_3y^2,$$
$$3)\ d_3x^2 + d_1y^2,$$

въ которыхъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, и три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности $(T)$, эквивалентныхъ одной изъ трехъ слѣдующихъ приведенныхъ формъ Зеллинга:

$$1)\ d_2x^2 + d_2y^2 + \frac{d_3 - d_2}{2}(x-y)^2,$$
$$2)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_3 - d_1}{2}(x-y)^2,$$
$$3)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_2 - d_1}{2}(x-y)^2,$$

въ которыхъ по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Разложенію же

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности $(T)$, эквивалентныхъ приведенной формѣ Зеллинга

$$x^2 + Py^2,$$

въ которой одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, и одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности $(T)$, эквивалентныхъ приведенной формѣ Зеллинга

$$x^2 + y^2 + \frac{P-1}{2}(x-y)^2,$$

въ которой по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Поэтому при

$$D = P$$

имѣемъ

$$\sum \Omega(d) = 6\psi(P) + 2,$$

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2) = 3\left\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} - 18\psi(P) - 6 \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Для того чтобы форма

$$k(x-y)^2 + lx^2 + my^2 + nz^2$$

типа (4,1) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы $n$ было четное и чтобы бинарная форма

$$k(x-y)^2 + lx^2 + my^2$$

опредѣлителя

$$-\frac{2P}{n},$$

приведенная по Зеллингу, была нечисто-коренною.

(Первое изъ этихъ условій, очевидно, вытекаетъ изъ второго какъ слѣдствіе).

Принимая во вниманіе сейчасъ сказанное и пользуясь соображеніями, аналогичными тѣмъ, которыми мы пользовались для случая

$$D = P,$$

легко найдемъ, что

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2, d) = 3\{h^{(1)}(d) - \Omega^{(1)}(d)\},$$

$$F^{(2)}_{4,1}(D, 2, d) = 3\{h^{(2)}(d) - \Omega^{(2)}(d)\},$$

гдѣ

$$\Omega^{(1)}(d) \quad \text{и} \quad \Omega^{(2)}(d)$$

обозначаютъ соотвѣтственно числа чисто-коренныхъ и нечисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ опредѣлителя $-d$, для которыхъ въ соотвѣтственной приведенной формѣ Зеллинга или одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою; и

$$F_{4,1}^{(1)}(D, 2) = 3\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d)\} - 3\{\sum \Omega^{(1)}(2d) + \sum \Omega^{(1)}(d)\},$$
$$F_{4,1}^{(2)}(D, 2) = 3\sum h^{(2)}(d) - 3\sum \Omega^{(2)}(d),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$ отличные отъ 1.

Сумма

$$\sum \Omega^{(1)}(2d)$$

равна числу классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ четные, дѣлятъ $D$ и отличны отъ 2, и для которыхъ въ соотвѣтствующей приведенной формѣ Зеллинга одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, такъ какъ для четныхъ, но не дѣлящихся на 4, опредѣлителей не существуетъ приведенныхъ бинарныхъ формъ Зеллинга, въ которыхъ два или всѣ три коэффиціента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(S).$$

Суммы

$$\sum \Omega^{(1)}(d) \quad \text{и} \quad \sum \Omega^{(2)}(d)$$

равны соотвѣтственно числамъ чисто-коренныхъ и нечисто-коренныхъ классовъ бинарныхъ формъ, опредѣлители которыхъ дѣлятъ $P$ и отличны отъ 1, и для которыхъ въ соотвѣтствующей приведенной формѣ Зеллинга или одинъ коэффиціентъ равенъ нулю, или по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Совокупность всѣхъ такихъ бинарныхъ формъ обозначимъ чрезъ

$$(R).$$

Каждому разложенію $D = 2P$ на три множителя

$$d_1 \equiv 0 \pmod 2,\ d_2 \text{ и } d_3,$$

изъ которыхъ каждый отличенъ отъ $P$ и $2P$, соотвѣтствуютъ два класса бинарныхъ формъ изъ совокупности $(S)$, эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$1)\ d_1x^2 + d_2y^2,$$
$$2)\ d_1x^2 + d_3y^2.$$

Разложенію

$$D = 2.1.P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности $(S)$, эквивалентныхъ формѣ

$$2x^2 + Py^2.$$

Наконецъ разложенію

$$D = 1.1.2P$$

соотвѣтствуетъ также одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности $(S)$, эквивалентныхъ формѣ

$$x^2 + 2Py^2.$$

Поэтому

$$\sum \Omega^{(1)}(2d) = 2\psi(2P).$$

Каждому разложенію числа $P$ на три множителя

$$d_1 < d_2 < d_3 < P$$

соотвѣтствуютъ три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности $(R)$, эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$1)\ d_1x^2 + d_2y^2,$$
$$2)\ d_2x^2 + d_3y^2,$$
$$3)\ d_3x^2 + d_1y^2,$$

приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю и которыя всѣ чисто-коренныя, и три класса бинарныхъ формъ изъ совокупности $(R)$, эквивалентныхъ одной изъ формъ:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ d_2x^2 + d_2y^2 + \frac{d_3 - d_2}{2}(x-y)^2, \\ &2)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_3 - d_1}{2}(x-y)^2, \\ &3)\ d_1x^2 + d_1y^2 + \frac{d_2 - d_1}{2}(x-y)^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

приведенныхъ по Зеллингу, въ которыхъ по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою.

Всѣ формы (18) чисто-коренныя, если сравненія

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod 4$$

имѣютъ мѣсто, въ противномъ же случаѣ только одна изъ нихъ чисто-коренная.

Разложенію

$$P = 1.1.P$$

соотвѣтствуетъ одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности $(R)$, эквивалентныхъ чисто-коренной формѣ

$$x^2 + Py^2,$$

приведенной по Зеллингу, въ которой одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю, и одинъ классъ бинарныхъ формъ изъ совокупности $(R)$, эквивалентныхъ формѣ

$$x^2 + y^2 + \frac{P-1}{2}(x-y)^2,$$

приведенной по Зеллингу, въ которой по крайней мѣрѣ два коэффиціента равны между собою и которая чисто-коренная при

$$P \equiv 1 \pmod 4$$

и нечисто-коренная при

$$P \equiv 3 \pmod 4.$$

Поэтому

$$\sum \Omega^{(1)}(d) = 6\Phi(P) + 4\Psi(P) + 1 + \gamma,$$
$$\sum \Omega^{(2)}(d) = 2\Psi(P) + 1 - \gamma,$$

и слѣдовательно при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$F^{(1)}_{4,1}(D, 2) = 3\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d)\} - 6\psi(2P) - 18\Phi(P) - 12\Psi(P) - 3 - 3\gamma =$$
$$= 3\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d)\} - 9\psi(2P) - 9\Phi(P) - 3\Psi(P) - 3\beta, \quad . \quad (19)$$

такъ какъ

$$\psi(2P) = 3\psi(P) + 1 = 3\Phi(P) + 3\Psi(P) + 1,$$

и

$$F^{(2)}_{4,1}(D, 2) = 3\sum h^{(2)}(d) - 6\Psi(P) - 3(1-\gamma) \ldots\ldots (20)$$

§ 11. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію формъ типа (3,1). Для формъ этого типа

$$D = hm(k+n) + kn(h+m) \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

Значеніе $\mu = 6$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (3,1), для которыхъ три изъ коэффиціентовъ

$$h,\ k,\ m \text{ и } n$$

равны между собою, а это возможно только при

$$D \equiv 1 \pmod 3$$

и только для четырехъ слѣдующихъ формъ типа (3,1):

$$1)\ h = k = m = 1, \quad n = \frac{D-1}{3},$$

$$2)\ k = m = n = 1, \quad h = \frac{D-1}{3},$$

$$3)\ m = n = h = 1, \quad k = \frac{D-1}{3},$$

$$4)\ n = h = k = 1, \quad m = \frac{D-1}{3}.$$

Всѣ эти формы чисто-коренныя при

$$D = P$$

и нечисто-коренныя при

$$D = 2P.$$

Итакъ, при

$$D = P$$

имѣемъ

$$F^{(1)}_{3,1}(D, 6) = 4\delta,$$

$$H^{(1)}(D, 6) = \frac{F^{(1)}_{3,1}(D, 6)}{4} = \delta, \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ

$$\delta = 0, \text{ при } P \text{не} \equiv 1 \pmod 3,$$

$$\delta = 1, \text{ при } P \equiv 1 \pmod 3,$$

а при

$$D = 2P$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(D,6) &= \frac{F_{3,1}^{(1)}(D,6)}{4} = 0, \\ F_{3,1}^{(2)}(D,6) &= 4\varepsilon, \\ H^{(2)}(D,6) &= \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

гдѣ

$$\varepsilon = 0, \text{ при } P \text{ не} \equiv 2 \pmod 3,$$
$$\varepsilon = 1, \text{ при } P \equiv 2 \pmod 3.$$

Значеніе $\mu = 2$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (3,1), въ которыхъ два и только два изъ коэффиціентовъ

$$h, k, m \text{ и } n$$

равны между собою.

Всѣ такія формы мы разобьемъ на шесть слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$h = k$ и не $=$ ни $m$, ни $n$ . . . . . (3,1,1)

$h = m$ и не $=$ ни $k$, ни $n$ . . . . . (3,1,2)

$h = n$ и не $=$ ни $k$, ни $m$ . . . . . (3,1,3)

$k = m$ и не $=$ ни $h$, ни $n$ . . . . . (3,1,4)

$k = n$ и не $=$ ни $h$, ни $m$ . . . . . (3,1,5)

$m = n$ и не $=$ ни $h$, ни $k$. . . . . (3,1,6)

Каждый изъ типовъ (3,1,1), (3,1,2), (3,1,3), (3,1,4), (3,1,5) и (3,1,6) содержитъ по одному и тому же числу формъ, такъ какъ вторая часть равенства (21) симметрична относительно $h$, $k$, $m$ и $n$.

При

$$h = k = \varrho$$

имѣемъ

$$D = \varrho m(\varrho + n) + \varrho n(\varrho + m). \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

Разсмотримъ сначала случай

$$D = P.$$

Изъ равенства (24) получаемъ такое

$$2P = \varrho(2\varrho m + 2\varrho n + 4mn) = \varrho\{(2\varrho + m + n)(m + n) - (m - n)^2\},$$

изъ котораго слѣдуетъ, что числа $m + n$ и $m - n$ нечетныя.

Если

$$P\text{не} \equiv 1 \pmod 3,$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = 2d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = 2d_1, \quad xz - y^2 = 2d_2, \ldots, \quad xz - y^2 = 2d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \quad d_2, \ldots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители $P$, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta, \quad \zeta - \xi = \frac{2P}{d_s},$$

$\eta$ нечетное,

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1)\ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi - \eta}{2},$$

$$2)\ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad n = \frac{\xi + \eta}{2},$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D = P\text{не} \equiv 1 \pmod 3$$

число формъ типа (3,1,1) равно

$$2\sum f\left(2d,\ z - x = \frac{2P}{d}\right),$$

$$F^{(1)}_{3,1}(D, 2) = 12\sum f\left(2d,\ z - x = \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Если же

$$D = P \equiv 1 \pmod{3},$$

то каждому рѣшенію

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz - y^2 = 2d_s$$

изъ уравненій

$$xz - y^2 = 2d_1, \quad xz - y^2 = 2d_2, \ldots, \quad xz - y^2 = 2d_t,$$

гдѣ

$$d_1, \quad d_2, \ldots, \quad d_t$$

всѣ дѣлители $P$, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta > \xi > \eta, \quad \zeta - \xi = \frac{2P}{d_s},$$

$\eta$ нечетное,

за исключеніемъ рѣшенія

$$x = \frac{P+2}{3}, \quad y = \frac{P-4}{3}, \quad z = \frac{P+8}{3}$$

уравненія

$$xz - y^2 = 2P,$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1) \ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad n = \frac{\xi-\eta}{2},$$

$$2) \ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s}, \quad m = \frac{\xi-\eta}{2}, \quad n = \frac{\xi+\eta}{2},$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по указанному сейчасъ способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D = P \equiv 1 \pmod{3}$$

число формъ типа (3,1,1) равно

$$2\left\{\sum f\left(2d,\ z-x=\frac{2P}{d}\right)-1\right\},$$

$$F^{(1)}_{3,1}(D,2)=12\left\{\sum f\left(2d,\ z-x=\frac{2P}{d}\right)-1\right\},$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$.

Всѣ разсужденія, относящіяся къ случаю

$$D=P,$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$F^{(1)}_{3,1}(D,2)=12\left\{\sum f\left(2d,\ z-x=\frac{2P}{d}\right)-\delta\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Пусть теперь

$$D=2P.$$

Изъ равенства (24) выводимъ такое

$$4P=\varrho\{(2\varrho+m+n)(m+n)-(m-n)^2\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $\varrho$ число нечетное, а $m+n$ и $m-n$ числа четныя, и слѣдовательно

$$\frac{m+n}{2} \quad \text{и} \quad \frac{m-n}{2}$$

числа цѣлыя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго заключаемъ, что для того чтобы форма

$$\varrho(z-x)^2+\varrho(x-y)^2+my^2+nz^2$$

типа (3,1,1) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы $m$ и $n$ были числа нечетныя.

Изъ равенства (26) слѣдуетъ, что

$$P=\varrho\left\{\left(\varrho+\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m+n}{2}\right)-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right\},$$

откуда видно, что

$$\frac{m-n}{2}$$

число нечетное.

Если

$$P\text{не}\equiv 2 \pmod 3,$$

то каждому рѣшенію

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz-y^2=d_s$$

изъ уравненій

$$xz-y^2=d_1,\quad xz-y^2=d_2,\ \ldots,\ xz-y^2=d_t,$$

гдѣ

$$d_1,\quad d_2,\ \ldots,\ d_t$$

всѣ дѣлители $P$, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta>\xi>\eta,\quad \zeta-\xi=\frac{P}{d_s}$$

$\eta$ и одно изъ чиселъ $\xi$ и $\zeta$ нечетныя,

соотвѣтствуютъ двѣ формы типа (3,1,1):

$$1)\ \varrho=h=k=\frac{P}{d_s},\quad m=\xi+\eta,\quad n=\xi-\eta,$$

$$2)\ \varrho=h=k=\frac{P}{d_s},\quad m=\xi-\eta,\quad n=\xi+\eta,$$

чисто-коренныя, если

$$\xi+\zeta\pm 2\eta=\frac{m+n}{2}+\frac{m+n}{2}+\varrho-2\frac{m-n}{2}=2n+\varrho\equiv\frac{P}{d_s}=\varrho\ (\text{mod. }4),$$

и нечисто-коренныя, если

$$\xi+\zeta\pm 2\eta=2n+\varrho\equiv\frac{P}{d_s}+2\ (\text{mod. }4),$$

и другихъ формъ типа (3,1,1) кромѣ получаемыхъ по сейчасъ указанному способу нѣтъ.

Поэтому при

$$D=2P\text{не}\equiv 1\ (\text{mod. }3)$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\ (\text{mod. }4),\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

$$F^{(1)}_{3,1}(D,2)=12\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\ (\text{mod. }4),\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

число нечисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

а

$$F^{(2)}_{3,1}(D,2)=12\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\ (\mathrm{mod.}\ 4),\ z-x=\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Если же

$$P\equiv 2\ (\mathrm{mod.}\ 4),$$

то каждому рѣшенію

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta$$

какого-либо уравненія

$$xz-y^2=d_s$$

изъ уравненій

$$xz-y^2=d_1,\quad xz-y^2=d_2,\ \ldots,\ xz-y^2=d_t,$$

гдѣ

$$d_1,\quad d_2,\ \ldots,\ d_t$$

всѣ дѣлители $P$, отличные отъ 1, въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, такому что

$$\zeta>\xi>\eta,\quad \zeta-\xi=\frac{P}{d_s},$$

$\eta$ и одно изъ чиселъ $\xi$ и $\zeta$ нечетныя,

за исключеніемъ рѣшенія

$$x=\xi=\frac{P+1}{3},\quad y=\eta=\frac{P-2}{3},\quad z=\zeta=\frac{P+4}{3}$$

уравненія

$$xz-y^2=P,$$

для котораго

$$\xi+\zeta-2\eta=\frac{P+1}{3}+\frac{P+4}{3}-2\frac{P-2}{3}=3\equiv\frac{P}{d}+2\ (\mathrm{mod.}\ 4),$$

соотвѣтствуютъ двѣ формы:

$$1)\ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s},\quad m = \xi + \eta,\quad n = \xi - \eta,$$

$$2)\ \varrho = h = k = \frac{P}{d_s},\quad m = \xi - \eta,\quad n = \xi + \eta,$$

чисто-коренныя, если

$$\xi + \zeta - 2\eta \equiv \frac{P}{d_s} \pmod 4$$

и нечисто-керенныя, если

$$\xi + \zeta - 2\eta \equiv \frac{P}{d_s} + 2 \pmod 4.$$

Поэтому при

$$D = 2P \equiv 1 \pmod 3$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod 4,\ z - x = \frac{P}{d}\right),$$

$$F^{(1)}_{3,1}(D, 2) = 12\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod 4,\ z - x = \frac{P}{d}\right),$$

число нечисто-коренныхъ формъ типа (3,1,1) равно

$$2\left\{\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod 4,\ z - x = \frac{P}{d}\right) - 1\right\},$$

а

$$F^{(2)}_{3,1}(D, 2) = 12\left\{\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod 4,\ z - x = \frac{P}{d}\right) - 1\right\},$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Всѣ разсужденія, относящіяся къ случаю

$$D = 2P$$

показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$F^{(1)}_{3,1}(D, 2) = 12\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} \pmod 4,\ z - x = \frac{P}{d}\right), \quad (27)$$

$$F^{(2)}_{3,1}(D, 2) = 12\left\{\sum f\left(d,\ x + z - 2y \equiv \frac{P}{d} + 2 \pmod 4,\ z - x = \frac{P}{d}\right) - \varepsilon\right\}. \quad (28)$$

§ 12. Разсмотримъ теперь формы типа (2,1).

Значеніе $\mu = 2$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ этого типа, которыя принадлежатъ къ одному изъ четырехъ слѣдующихъ типовъ

$$h = k, \quad m = n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,1)$$
$$h = m, \quad k = n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,2)$$
$$h = n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,3)$$
$$k = m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2,1,4)$$

При

$$g = 0, \quad h = k = \varrho, \quad m = n = \sigma$$

имѣемъ

$$2D = 4\varrho\sigma(\varrho + \sigma + l) + 2l(\varrho^2 + \sigma^2) = (\varrho + \sigma)\{(2\varrho + l)(2\sigma + l) - l^2\}. \quad (29)$$

Изъ равенства (29) слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

число $l$ нечетное.

Принявъ это во вниманіе, посредствомъ разсужденій совершенно аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались для формъ типа (3,1), легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (2,1,1) равно

$$2\sum f\left(2d, \; x + z - 2y = \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (29) слѣдуетъ, что $\varrho + \sigma$ число нечетное, а $l$ число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно $\frac{l}{2}$ число цѣлое нечетное.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго всѣ формы

$$\varrho(z - x)^2 + \varrho(x - y)^2 + lx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$$

типа (2,1,1) чисто-коренныя.

Изъ равенства (29) получаемъ

$$P=(\varrho+\sigma)\left\{\left(\varrho+\frac{l}{2}\right)\left(\sigma+\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D=2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,1) равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y=\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

При

$$h=m=\varrho,\quad k=n=\sigma$$

имѣемъ

$$2D=2\varrho^2(2\sigma+l)+2\sigma^2(2\varrho+l)+4l\varrho\sigma=(\varrho+\sigma)\{(2\varrho+l)(2\sigma+l)-l^2\}. \quad (30)$$

Изъ равенства (30) видно, что при

$$D=P$$

$l$ число нечетное.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D=P$$

число формъ типа (2,1,2) равно

$$2\sum f\left(2d,\ x+z-2y=\frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D=2P.$$

Изъ равенства (30) видно, что $\varrho+\sigma$ число нечетное, а $l$ число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно $\frac{l}{2}$ число цѣлое нечетное.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго всѣ формы

$$\varrho(z-x)^2+\sigma(x-y)^2+lx^2+\varrho y^2+\sigma z^2$$

чисто коренныя.

Изъ равенства (30) вытекаетъ такое

$$P=(\varrho+\sigma)\left\{\left(\varrho+\frac{l}{2}\right)\left(\sigma+\frac{l}{2}\right)-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,2) равно

$$2\sum f\left(d_1 x+z-2y=\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

При

$$h=n=\varrho$$

имѣемъ

$$2D=\varrho\{(2\varrho+4l+k+m)(k+m)-(k-m)^2\}. \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Изъ равенства (31) видно, что при

$$D=P$$

$k-m$ число нечетное.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D=P$$

число формъ типа (2,1,3), равное числу формъ типа (2,1,4), равно

$$2\sum f\left(2d,\ z-x>\frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Далѣе изъ равенства (31) слѣдуетъ, что при

$$D=2P$$

$\varrho$ число нечетное, а $k-m$ и $k+m$ числа четныя, и слѣдовательно $\frac{k+m}{2}$ и $\frac{k-m}{2}$ числа цѣлыя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\varrho(z-x)^2+k(x-y)^2+lx^2+my^2+\varrho z^2$$

была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы число $k+l$ было нечетное.

Равенство (31) при

$$D = 2P$$

приводится къ такому

$$P = \varrho\left\{\left(\varrho + 2l + \frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k+m}{2}\right) - \left(\frac{k-m}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = 2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,3), равное числу чисто-коренныхъ формъ типа (2,1,4), равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod 4,\ z-x > \frac{P}{d}\right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ типа (2,1,3), равное числу нечисто-коренныхъ формъ типа (2,1,4), равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y \equiv \frac{P}{d}+2 \pmod 4,\ z-x > \frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Всѣ разсужденія настоящаго параграфа показываютъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$F_{2,1}^{(1)}(D, 2) = 4\sum f\left(2d,\ x+z-2y = \frac{2P}{d}\right) + 4\sum f\left(2d,\ z-x > \frac{2P}{d}\right), \quad (32)$$

а при

$$D = 2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned} F_{2,1}^{(1)}(D, 2) &= 4\sum f\left(d,\ x+z-2y = \frac{P}{d}\right) + \\ &+ 4\sum f\left(d,\ x+z-2y \equiv \frac{P}{d} \pmod 4,\ z-x > \frac{P}{d}\right), \\ F_{2,1}^{(2)}(D, 2) &= 4\sum f\left(d,\ x+z-2y \equiv \frac{P}{d}+2,\ z-x > \frac{P}{d}\right), \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1, такъ какъ на основаніи § 7 ни одна тройничная форма не можетъ принадлежать заразъ къ двумъ различнымъ изъ типовъ (2,1,1,), (2,1,2), (2,1,3) и (2,1,4).

*

§ 13. Обратимся наконецъ къ формамъ типа (1).

Значеніе $\mu = 2$ соотвѣтствуетъ только такимъ формамъ типа (1), которыя принадлежатъ къ одному изъ девяти слѣдующихъ частныхъ типовъ:

$$g = l, \quad h = m, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,1)$$
$$h = m, \quad k = n, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,2)$$
$$k = n, \quad g = l, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,3)$$
$$g = h, \quad l = m, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,4)$$
$$h = k, \quad m = n, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,5)$$
$$k = g, \quad n = l, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,6)$$
$$g = m, \quad h = l, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,7)$$
$$h = n, \quad k = m, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,8)$$
$$k = l, \quad g = n, \ldots\ldots\ldots\ldots (1,9)$$

При

$$g = l = \varrho, \quad h = m = \sigma$$

имѣемъ

$$2D = 2\varrho^2(2\sigma + k + n) + 2\sigma^2(2\varrho + k + n) + 4kn(\varrho + \sigma) + 4\varrho\sigma(k + n) =$$
$$= (\varrho + \sigma)\{4\varrho\sigma + 2(k + n)(\varrho + \sigma) + 4kn\} =$$
$$= (\varrho + \sigma)\{(2\varrho + k + n)(2\sigma + k + n) - (k - n)^2\}. \ldots (34)$$

Изъ равенства (34) слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

числа $\varrho + \sigma$, $k + n$ и $k - n$ нечетныя.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (1,1) или, что тоже, число формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4\sum f\left(2d,\ x + z - 2y > \frac{2P}{d},\ z - x < \frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (34) слѣдуетъ, что $\varrho+\sigma$ число нечетное, а $k+n$ и $k-n$ числа четныя, и что кромѣ того $k-n$ не дѣлится на 4; слѣдовательно число $\frac{k-n}{2}$ и одно изъ чиселъ $\varrho+\frac{k+n}{2}$ и $\sigma+\frac{k+n}{2}$ нечетныя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\varrho(y-z)^2+\sigma(z-x)^2+k(x-y)^2+\varrho x^2+\sigma y^2+nz^2$$

была нечисто-коренною необходимо и достаточно, чтобы числа $k$ и $n$ были нечетныя.

Изъ равенства (34) вытекаетъ такое

$$P=(\varrho+\sigma)\left\{\left(\frac{k+n}{2}+\varrho\right)\left(\frac{k+n}{2}+\sigma\right)-\left(\frac{k-n}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D=2P$$

число чисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\ (\text{mod. }4),\ x+z-2y>\frac{P}{d},\ z-x<\frac{P}{d}\right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,1), (1,2) и (1,3) равно

$$4\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\ (\text{mod. }4),\ x+z-2y>\frac{P}{d},\ z-x<\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

При

$$g=h=\varrho,\quad l=m=\sigma$$

имѣемъ

$$2D=4\varrho\sigma\{\varrho+\sigma+k+n)+4kn(\varrho+\sigma)+2\varrho(\varrho n+k\sigma)+2\sigma(\varrho k+n\sigma)=$$
$$=(\varrho+\sigma+2k)(2n\varrho+2n\sigma+4\varrho\sigma)=(\varrho+\sigma+2k)\{(2\varrho+n)(2\sigma+n)-n^2\}.\quad(35)$$

Изъ равенства (35) слѣдуетъ, что при

$$D=P$$

числа $\varrho+\sigma+2k$ и $n$ нечетныя.

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = P$$

число формъ типа (1,4) или, что тоже, число формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8) и (1,9) равно

$$2\sum f\left(2d,\ x+z-2y<\frac{2P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Пусть теперь

$$D = 2P.$$

Изъ равенства (35) слѣдуетъ, что $\varrho+\sigma$ число нечетное, а $n$ число четное, не дѣлящееся на 4, и слѣдовательно $\frac{n}{2}$ и одно изъ чиселъ $\varrho+\frac{n}{2}$ и $\sigma+\frac{n}{2}$ нечетныя.

На основаніи сейчасъ замѣченнаго, для того чтобы форма

$$\varrho(y-z)^2+\varrho(z-x)^2+k(x-y)^2+\sigma x^2+\sigma y^2+nz^2$$

типа (1,4) была нечисто-коренною, необходимо и достаточно, чтобы число $k$ было нечетное.

Изъ равенства (35) вытекаетъ такое

$$P=(\varrho+\sigma+2k)\left\{\left(\varrho+\frac{n}{2}\right)\left(\sigma+\frac{n}{2}\right)-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right\}.$$

Принявъ это во вниманіе, легко найдемъ, что при

$$D = 2P$$

число чисто-коренныхъ формъ типа (1,4) или, что тоже, число чисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ типовъ (1,4), (1,5), (1,6), (1,7) (1,8) и (1,9) равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\ (\text{mod. } 4),\ x+z-2y<\frac{P}{d}\right),$$

а число нечисто-коренныхъ формъ въ каждомъ изъ этихъ типовъ равно

$$2\sum f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\ (\text{mod. } 4),\ x+z-2y<\frac{P}{d}\right),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1.

Всѣ разсужденія настоящаго параграфа показываютъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$F_1^{(1)}(D, 2) = 12\sum f\left(2d,\ x+z-2y > \frac{2P}{d},\ z-x < \frac{2P}{d}\right) +$$
$$+ 12\sum f\left(2d,\ x+z-2y < \frac{2P}{d}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

а при

$$D = 2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned} F_1^{(1)}(D, 2) &= 12\sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} (\text{mod. } 4), x+z-2y > \frac{P}{d}, z-x < \frac{P}{d}\right) \\ &+ 12\sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d} (\text{mod. } 4), x+z-2y < \frac{P}{d}\right), \\ F_1^{(2)}(D, 2) &= 12\sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d}+2 (\text{mod. } 4), x+z-2y > \frac{P}{d}, z-x < \frac{P}{d}\right) \\ &+ 12\sum f\left(d, x+z-2y \equiv \frac{P}{d}+2 (\text{mod. } 4), x+z-2y < \frac{P}{d}\right), \end{aligned}\right\} (37)$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1, такъ какъ на основаніи § 7 ни одна тройничная форма не можетъ принадлежать къ двумъ разнымъ изъ типовъ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8) и (1,9).

§ 14. Изъ формулъ (25), (27), (28), (32), (33), (36) и (37), на основаніи леммъ 1-ой, 2-ой, 3-й и 4-й, слѣдуетъ, что при

$$D = P$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$\frac{F_1^{(1)}(D, 2)}{12} + \frac{F_{2,1}^{(1)}(D, 2)}{4} + \frac{F_{3,1}^{(1)}(D, 2)}{12} =$$
$$= \sum\left\{f\left(2d,\ x+z-2y > \frac{2P}{d},\ z-x < \frac{2P}{d}\right) +\right.$$
$$+ f\left(2d,\ x+z-2y < \frac{2P}{d}\right) + f\left(2d,\ x+z-2y = \frac{2P}{d}\right)$$
$$\left. + f\left(2d,\ z-x > \frac{2P}{d}\right) + f\left(2d,\ z-x = \frac{2P}{d}\right)\right\} - \delta =$$
$$= \sum f(2d) - \delta = \frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d) - \frac{1}{2}\sum \omega^{(1)}(2d) - \delta =$$
$$= \frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d) - 3\psi(P) - 1 - \delta \ldots\ldots\ldots (38)$$

а при

$$D = 2P$$

имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{F_1^{(1)}(D,2)}{12}+\frac{F_{2,1}^{(1)}(D,2)}{4}+\frac{F_{3,1}^{(1)}(D,2)}{12}=$$

$$=\sum\left\{f\left(d, x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\,(\text{mod. }4), x+z-2y>\frac{P}{d}, z-x<\frac{P}{d}\right)\right.$$

$$+f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\,(\text{mod. }4),\ x+z-2y<\frac{P}{d}\right)+$$

$$+f\left(d, x+z-2y=\frac{P}{d}\right)+f\left(d, x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\,(\text{mod. }4), z-x>\frac{P}{d}\right)$$

$$\left.+f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\,(\text{mod. }4), z-x=\frac{P}{d}\right)\right\}=$$

$$=\sum f[d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}\,(\text{mod. }4)]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)-\sum_3\frac{\omega^{(1)}(d)}{2}-\sum_1\Omega_1(d)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)-3\Phi(P)-\Psi(P)-\frac{1+\gamma}{2}\quad\ldots\ldots\quad(39)$$

и

$$\frac{F_1^{(2)}(D,2)}{12}+\frac{F_{2,1}^{(2)}(D,2)}{4}+\frac{F_{3,1}^{(2)}(D,2)}{12}=$$

$$=\sum\left\{f\left(d, x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\,(\text{mod. }4), x+z-2y>\frac{P}{d}, z-x<\frac{P}{d}\right)\right.$$

$$+f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\,(\text{mod. }4),\ x+z-2y<\frac{P}{d}\right)+$$

$$+f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\,(\text{mod. }4),\ z-x>\frac{P}{d}\right)+$$

$$\left.+f\left(d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\,(\text{mod. }4),\ z-x=\frac{P}{d}\right)-\varepsilon\right=$$

$$=\sum f[d,\ x+z-2y\equiv\frac{P}{d}+2\,(\text{mod. }4)]-\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)-\sum_3\frac{\omega^{(1)}(d)}{2}-\sum_1\Omega_2(d)-\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)-2\Psi(P)-\frac{1-\gamma}{2}-\varepsilon,\quad\ldots\ldots\quad(40)$$

причемъ суммированіе, указываемое знакомъ $\sum$, вездѣ распространяется на всѣ дѣлители $d$ числа $P$, отличные отъ 1, а суммы $\sum_1\Omega_1(d)$, $\sum_1\Omega_2(d)$ и $\sum_3\frac{\omega^{(1)}(d)}{2}$ имѣютъ то же значеніе, что и въ § 4.

§ 15. Положимъ

$$M^{(j)}(D) = \sum \frac{H^{(j)}(D, \mu)}{\mu},$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ возможныя значенія $\mu$.

Мы будемъ имѣть

$$H^{(j)}(D) = M^{(j)}(D) + \sum \frac{(\mu - 1) H^{(j)}(D, \mu)}{\mu} \ldots\ldots (41)$$

Числа

$$M^{(1)}(D) \quad \text{и} \quad M^{(2)}(D)$$

Эйзенштейнъ называетъ соотвѣтственно измѣреніями чисто и нечисто-коренныхъ классовъ опредѣлителя $D$.

Пусть

$$D = P$$

изъ формулы (41) и формулъ (10), (12), (13), (15), (17), (22) и (38) выводимъ

$$\begin{aligned}
H^{(1)}(P) &= \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \sum \frac{(\mu-1) H^{(1)}(P, \mu)}{\mu} - \frac{1}{24} = \\
&+ \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d) - 3\psi(P) - 1 - \delta\right\} + \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d) + \frac{1}{2}\sum h^{(2)}(d) - 3\psi(P) - 1\right\} + \\
&+ \frac{3}{4}\left\{4\psi(P) + 1 - \alpha\right\} + \frac{5}{6}\delta + \frac{7}{8} + \frac{11\alpha}{12} - \frac{1}{24} = \\
&= \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} - \\
&- \frac{1}{4} + \frac{7}{8} - \frac{1}{24} + \frac{\delta}{3} + \frac{\alpha}{6} = \\
&= \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \\
&+ \frac{7 + 4\delta + 2\alpha}{12} = \\
&= \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \left\{M^{(1)}(P) + \frac{1}{24}\right\} + \frac{\lambda}{12}, \quad (42)
\end{aligned}$$

гдѣ

$$\lambda = 9 \quad \text{при} \quad P \equiv 0 \pmod 3,$$
$$\lambda = 11 \quad \text{при} \quad P \equiv 1 \pmod 3,$$
$$\lambda = 7 \quad \text{при} \quad P \equiv 2 \pmod 3.$$

Пусть теперь

$$D=2P.$$

Изъ формулы (41) на основаніи формулъ (10), (11), (14), (16), (19), (20), (23), (39) и (40) выводимъ

$$H^{(1)}(2P)=M^{(1)}(2P)+\sum\frac{(\mu-1)\,H^{(1)}(2P,\,\mu)}{\mu}=$$

$$=M^{(1)}(2P)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)-3\Phi(P)-\Psi(P)-\frac{1+\gamma}{2}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(2d)+\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)-\frac{3}{2}\psi(2P)-\frac{3}{2}\Phi(P)-\frac{1}{2}\Psi(P)-\frac{1}{2}\gamma\right\}+$$

$$+\frac{3}{4}\left\{3\Phi(P)+\Psi(P)+\psi(2P)+\gamma\right\}+\frac{7}{8}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum h^{(1)}(2d)+\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)+M^{(1)}(2P)+\frac{5+2\gamma}{8}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum h^{(1)}(2d)+\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)+M^{(1)}(2P)+\frac{\nu}{8},\quad\ldots(43)$$

гдѣ

$$\nu=7\ \text{при}\ P\equiv 1\ (\text{mod. }4),$$

$$\nu=5\ \text{при}\ P\equiv 3\ (\text{mod. }4),$$

и

$$H^{(2)}(2P)=M^{(2)}(2P)+\frac{1}{24}+\sum\frac{(\mu-1)\,H^{(2)}(2P,\,\mu)}{\mu}-\frac{1}{24}=$$

$$=\left\{M^{(2)}(2P)+\frac{1}{24}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(1)}(d)-2\Psi(P)-\frac{1-\gamma}{2}-\varepsilon\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum h^{(2)}(d)-\Psi(P)-\frac{1-\gamma}{2}\right\}+\frac{3}{4}\left\{2\Psi(P)+1-\gamma-\beta\right\}+$$

$$+\frac{5}{6}\varepsilon+\frac{11}{12}\beta-\frac{1}{24}=\frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(d)+\sum h^{(2)}(d)\right\}+\left\{M^{(2)}(2P)+\frac{1}{24}\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{4}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\beta}{6}-\frac{1}{24}=\frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(d)+\sum h^{(2)}(d)\right\}+$$

$$+\left\{M^{(2)}(2P)+\frac{1}{24}\right\}+\frac{5-6\gamma+8\varepsilon+4\beta}{24}=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sum h^{(2)}(d)+\sum h^{(1)}(d)\right\}+\left\{M^{(2)}(2P)+\frac{1}{24}\right\}+\frac{\varrho}{24},\quad\ldots(44)$$

гдѣ

$$\varrho = 1 \text{ при } P \equiv 1 \pmod{12},$$
$$\varrho = 9 \text{ при } P \equiv 3 \pmod{12},$$
$$\varrho = 7 \text{ при } P \equiv 5 \pmod{12},$$
$$\varrho = 5 \text{ при } P \equiv 7 \pmod{12},$$
$$\varrho = 3 \text{ при } P \equiv 9 \pmod{12},$$
$$\varrho = 13 \text{ при } P \equiv 11 \pmod{12}.$$

Въ 35 томѣ журнала Крелля Эйзенштейнъ далъ безъ доказательства слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)}(P) &= \frac{2P-1}{24}, \\ M^{(1)}(2P) &= \frac{P}{8}, \\ M^{(2)}(2P) &= \frac{P-1}{24}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Эти формулы легко вывести изъ болѣе общихъ, данныхъ Смитомъ въ 157 томѣ Philosophical Transactions.

Подставляя въ формулы (42), (43) и (44) вмѣсто

$$M^{(1)}(P), \quad M^{(1)}(2P) \text{ и } M^{(2)}(2P)$$

ихъ значенія, даваемыя формулами (45), мы получимъ формулы

$$H^{(1)}(P) = \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(2d) + \sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \frac{P+\lambda}{12},$$
$$H^{(1)}(2P) = \frac{1}{4}\sum h^{(1)}(2d) + \frac{1}{2}\sum {}^{(1)}(d) + \frac{P+\gamma}{8},$$
$$H^{(2)}(2P) = \frac{1}{4}\left\{\sum h^{(1)}(d) + \sum h^{(2)}(d)\right\} + \frac{P+\varrho}{24},$$

для счета числа классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣлитель не имѣетъ квадратныхъ дѣлителей кромѣ 1, въ томъ видѣ, какъ онѣ даны Эйзенштейномъ.

# Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими пріемами разыскиванія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій.

**В. Г. Имшенецкаго** *).

§ 1. Дифференціальное уравненіе

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ $f$ есть раціональная цѣлая функція отъ всѣхъ перемѣнныхъ въ нее входящихъ, т. е. отъ $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$, можетъ допускать раціональныя рѣшенія, какъ цѣлыя, такъ и дробныя.

Въ XVI т. „Математическаго Сборника", издаваемаго Московскимъ Математическимъ Обществомъ, проф. Н. В. Бугаевъ показалъ, какимъ образомъ можно находить всѣ члены цѣлаго рѣшенія вида

$$y = \alpha x^{\lambda} + \beta x^{\mu} + \ldots + \omega x^{\nu}, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

если такое возможно для уравненія (1), начиная съ члена высшей степени или *старшаго*

$$[y] = \alpha x^{\lambda}$$

и послѣдовательно переходя къ слѣдующимъ $\beta x^{\mu}, \ldots, \omega x^{\nu}$, въ порядкѣ постепенно понижающихся показателей

$$\lambda > \mu > \ldots > \nu.$$

*) Посмертное изданіе произведенія найденнаго въ бумагахъ покойнаго Акад. В. Г. Имшенецкаго въ совершенно готовомъ для печати видѣ. Въ рукописяхъ В. Г. Имшенецкаго имѣется еще другая, менѣе обработанная редакція той же статьи, но содержащая интересные варіанты; послѣдніе приведены ниже въ извлеченіи. *Ред.*

Совокупность весьма простыхъ пріемовъ, служащихъ для этой цѣли, авторъ способа называетъ *началомъ наибольшихъ показателей.*

Замѣтимъ, что для примѣненія этого начала требуется замѣна въ дифференціальныхъ уравненіяхъ зависимой перемѣнной, производимая столько разъ, сколько должно быть различныхъ членовъ въ искомомъ цѣломъ рѣшеніи (2). Такъ, найдя старшій членъ $ax^\lambda$, нужно, для отысканія слѣдующаго низшаго члена, преобразовать дифференціальное уравненіе (1) отъ неизвѣстной $y$ къ $z$, полагая $y = ax^\lambda + z$ и т. д.

§ 2. Хотя проф. Бугаевъ въ заключеніи этого изслѣдованія, о цѣлыхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій, и высказываетъ мнѣніе, что эту работу его можно бы предпослать какъ полезное введеніе къ моей работѣ о дробныхъ рѣшеніяхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами *), но въ своемъ новомъ изслѣдованіи **) онъ имѣетъ въ виду дальнѣйшее распространеніе примѣненія начала наибольшихъ показателей къ разысканію дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій, не ограниченныхъ линейной формой.

Что касается рѣшенія этой задачи въ отношеніи уравненій линейныхъ, то предложенныя мною правила, въ дополненіе данныхъ Ліувилемъ, я думаю, вполнѣ достигаютъ цѣли простѣйшимъ путемъ, съ чѣмъ, мнѣ кажется, согласенъ и проф. Бугаевъ, судя по приведенной выше ссылкѣ въ заключеніи вышеупомянутой его статьи въ Математическомъ Сборникѣ.

По примѣру Ліувилля я не пытался рѣшать подобной задачи для дифференціальныхъ уравненій не линейныхъ.

Съ своей стороны проф. Бугаевъ, предложивъ себѣ общую задачу о нахожденіи рѣшеній дробныхъ дифференціальныхъ уравненій, далъ рѣшеніе ея, дѣйствительно обнимающее, кромѣ линейныхъ, вообще дифференціальныя уравненія раціональнаго вида относительно входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ $x$, $y\,\frac{dy}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^n y}{dx^n}$. Поэтому небезполезно будетъ разсмотрѣть теоретическія основанія его способа, для лучшей оцѣнки практической его стороны, въ сравненіи съ другими возможными пріемами рѣшенія той же задачи.

§ 3. Для соображенія числа различныхъ операцій, требуемыхъ способомъ проф. Бугаева (при отысканіи дробныхъ рѣшеній), постараемся сдѣлать возможно краткій ихъ перечень.

Положимъ, что уравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе вида

$$y = \theta(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

*) LV т. Зап. Имп. Ак. Наукъ. 1887.

**) LVII т. Зап. Имп. Ак. Наукъ. 1891.

съ цѣлой частью

$$\theta(x) = \alpha x^{\lambda} + \beta x^{\mu} + \ldots + \omega x^{\nu},$$

расположенной по нисходящимъ степенямъ перемѣной $x$, и съ дробной частью $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, въ которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Пусть $p$ означаетъ число членовъ функціи $\theta(x)$, которые, начиная со старшаго, мы получимъ согласно вышеизложеннаго для цѣлыхъ рѣшеній (§ 1), такъ что послѣ $p$ преобразованій дифференціальныхъ уравненій на основаніи положеній:

$$y = \alpha x^{\lambda} + y_1, \quad y_1 = \beta x^{\mu} + y_2, \ldots, \quad y_{p-1} = \omega x^{\nu} + y_p \quad \ldots \text{(a)}$$

будемъ имѣть дифференціальное уравненіе

$$f_1\left(x, y_p, \frac{dy_p}{dx}, \ldots, \frac{d^n y_p}{dx^n}\right) = 0,$$

допускающее частное рѣшеніе

$$y_p = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(b)}$$

Полагая теперь

$$y_p = \frac{1}{z},$$

выведемъ изъ предыдущаго дифференціальное уравненіе

$$f_2\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

допускающее частное рѣшеніе вида

$$z = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \theta_1(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

гдѣ $\theta_1(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ цѣлыя функціи, изъ которыхъ $\varphi_1(x)$ низшей степени чѣмъ $\psi_1(x)$.

Ясно, что задача вновь получила теперь свой первоначальный общій видъ, и весь кругъ требуемыхъ ею операцій завершенъ, такъ что при дальнѣйшемъ ея развитіи тѣ-же виды операціи лишь будутъ повторяться. Поэтому, если дѣйствительно данное уравненіе (1) допускаетъ раціональ-

ное дробное рѣшеніе, то оно, поэтому способу, получится въ видѣ непрерывной дроби

$$y = \theta(x) + \frac{1}{\theta_1(x)} + \frac{1}{\theta_2(x)} + \ldots + \frac{1}{\theta_k(x)}.$$

Мы видѣли, что, еще не приступая къ вычисленію функціи $\theta_1(x)$, потребуется произвести, на основаніи положеній (a) и (b), $p+1$ преобразованій дифференціальнаго уравненія, если $p$ означаетъ число членовъ функціи $\theta$. Подобнымъ образомъ, если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ означаютъ числа членовъ функцій $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_k(x)$, то прежде вычисленія послѣдней изъ нихъ потребуется

$$(p+1)+(p_1+1)+\ldots+(p_{k-1}+1)$$

преобразованій дифференціальнаго уравненія, да вычисленіе всѣхъ членовъ $\theta_k(x)$ потребуетъ $p_k - 1$ преобразованій, такъ что всѣхъ преобразованій дифференціальнаго уравненія для вычисленія непрерывной дроби $y$ потребуется

$$N=(p+1)+(p_1+1)+\ldots+(p_{k-1}+1)+(p_k-1).$$

Отсюда видно, что число требуемыхъ преобразованій дифференціальнаго уравненія будетъ въ большинствѣ случаевъ значительное, между тѣмъ какъ эти преобразованія, въ особенности для уравненій нелинейныхъ, довольно сложны.

Кромѣ того неудобно не имѣть критерія, по которому можно было бы судить, когда раціональныхъ дробныхъ рѣшеній вовсе не можетъ быть, чтобы не предпринимать напрасно сложныхъ вычисленій.

§ 4. Итакъ, при всей замѣчательной простотѣ своей теоріи способъ проф. Бугаева можетъ оказываться неудобопримѣнимымъ по только что указаннымъ причинамъ.

На уравненіяхъ линейныхъ мы показали, какъ устраняется излишняя сложность при рѣшеніи той-же задачи и какимъ образомъ получается ясное указаніе, если оно (линейное уравненіе) не имѣетъ предполагаемаго дробнаго рѣшенія.

Поэтому умѣстно показать здѣсь аналогичные пріемы рѣшенія поставленнаго вопроса, если не во всѣхъ случаяхъ, то для довольно обширнаго класса уравненій нелинейныхъ.

Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$Ly'' + (M+2Ny)y' + Py^2 + Qy + R = 0, \quad \ldots \quad (I)$$

гдѣ удареніями обозначаются производныя по $x$, такъ что, напримѣръ, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx}$, а $L$, $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$ суть данныя цѣлыя функціи отъ $x$.

Уравненіе (I), очевидно, можно еще написать въ такомъ видѣ

$$(Ly)'' + (M_1y)' + (Q_1y) + (Ny^2)' + (P_1y^2) + R = 0, \ldots \text{(II)}$$

гдѣ:

$$M_1 = M - 2L', \quad Q_1 = Q - M' + L'', \quad P_1 = P - N'.$$

Докажемъ слѣдующую теорему:

„Если уравненіе (I), или что то-же (II), допускаетъ раціональное *дробное* рѣшеніе $y = \frac{u}{v}$, то всегда можно составить дифференціальное уравненіе того-же типа какъ (I) и съ тѣмъ-же коэффиціентомъ $R$ члена безъ неизвѣстной функціи, т. е. уравненіе

$$lz'' + (m + 2nz)z' + pz^2 + qz + R = 0, \ldots \text{(III)}$$

въ которомъ цѣлые коэффиціенты $l$, $m$, $n$, $p$ и $q$ прочихъ членовъ можно опредѣлить такъ, чтобы этому уравненію (III) принадлежало раціональное *цѣлое* рѣшеніе, представляющее числитель $u$ дробнаго рѣшенія уравненія (I), если знаменатель $v$ этого рѣшенія опредѣленъ какъ такой общій дѣлитель функцій $L_1$, $M_1$ и $Q_1$, наивысшей степени, квадратъ котораго дѣлитъ функціи $N$ и $P_1$".

*Доказательство.* Уравненіе (III) сначала можно написать такимъ образомъ

$$(lz)'' + (m_1z)' + q_1z + (nz^2)' + (p_1z^2) + R = 0, \ldots \text{(IV)}$$

гдѣ будемъ имѣть:

$$m_1 = m - 2l', \quad q_1 = q - m' + l'', \quad p_1 = p - n', \ldots \text{(V)}$$

а потомъ слѣдующимъ

$$\left[v \cdot l \cdot \frac{z}{v}\right]'' + \left[vm_1 \cdot \frac{z}{v}\right]' + vq_1 \cdot \frac{z}{v} + \left[v^2n \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^2\right]' + v^2p_1 \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^2 + R = 0. \text{(VI)}$$

Полагая теперь

$$vl = L, \quad vm_1 = M_1, \quad vq_1 = Q_1, \quad v^2n = N, \quad v^2p_1 = P_1, \quad \text{(VII)}$$

можно удовлетворить этимъ условіямъ, такъ чтобы функціи $l$, $m_1$, $q_1$, $n$ и $p_1$ были цѣлыми, если $v$ будетъ такой общій дѣлитель $L$, $M_1$ и $Q_1$,

квадратъ котораго дѣлитъ $N$ и $P_1$. При томъ изъ всѣхъ дѣлителей, удовлетворяющихъ только что высказаннымъ условіямъ, мы примемъ какъ значеніе $v$ такой, котораго степень наивысшая (короче сказать *наибольшій* общій дѣлитель $L$, $M_1$, $Q_1$, квадратъ котораго дѣлитъ $N$ и $P_1$).

Вслѣдствіе равенствъ (VII) уравненія (II) и (VI) между собою тожественны, такъ-же какъ ихъ рѣшенія, такъ что вообще

$$y = \frac{z}{v}.$$

Но такъ какъ, по условію, уравненіе (II) допускаетъ дробное рѣшеніе

$$y = \frac{u}{v},$$

то, слѣдовательно, уравненіе (III) допускаетъ цѣлое рѣшеніе

$$z = u,$$

что и требовалось доказать.

Замѣтимъ далѣе, что, опредѣливъ значенія $l$, $m_1$, $q_1$, $n$ и $p_1$ изъ условій (VII), какъ сказано выше, мы найдемъ изъ уравненій (V) значенія:

$$m = m_1 + 2l', \quad q = q_1 + m' - l'', \quad p = p_1 + n'.$$

Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія

$$z = \frac{u_1}{v_1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}$$

Въ самомъ дѣлѣ, допуская противное, можно было бы составить уравненіе

$$l_2\zeta'' + (m_2 + 2n_2\zeta)\zeta' + p_2\zeta^2 + q_2\zeta + R = 0,$$

или

$$(l_2\zeta)'' + (m_3\zeta)' + q_3\zeta + (n_2\zeta^2)' + p_3\zeta^2 + R = 0,$$

гдѣ

$$m_3 = m_2 - 2l_2', \quad q_3 = q_2 - m_2' + l_2'', \quad p_3 = p_2 - n_2',$$

съ такими цѣлыми коэффиціентами $l_2$, $m_3$, $q_3$, $n_2$, $p_3$, что послѣднее уравненіе допускало бы цѣлое рѣшеніе

$$\zeta = u_1.$$

Для этого необходимо и достаточно, по вышедоказанному, только выполнить условія:

$$v_1 l_2 = l, \quad v_1 m_3 = m_1, \quad v_1 q_3 = q_1, \quad v_1^2 n_2 = n, \quad v_1^2 p_3 = p_1,$$

вслѣдствіе которыхъ $v_1$ должно быть такимъ общимъ дѣлителемъ $l$, $m_1$ и $q_1$, квадратъ котораго дѣлитъ $n$ и $p_1$.

Однако легко убѣдиться, что требуемаго дѣлителя, какъ цѣлой функціи отъ $x$, не можетъ быть или, лучше сказать, онъ равенъ постоянной величинѣ, ибо, умножая первыя три изъ послѣднихъ равенствъ на $v$, а два послѣднія на $v^2$ и принимая въ соображеніе (VII), получимъ

$$vv_1 \cdot l_2 = L, \quad vv_1 \cdot m_3 = M_1, \quad vv_1 \cdot q_3 = Q_1, \quad (vv_1)^2 \cdot n_2 = N, \quad (vv_1)^2 p_3 = P_1.$$

Чтобы не было противорѣчія между послѣдними равенствами и условіемъ, что $v$ есть наибольшій общій дѣлитель $L$, $M_1$ и $Q_1$, квадратъ котораго дѣлитъ $N$ и $P_1$, необходимо принять

$$v_1 = \text{const.}$$

Поэтому рѣшеніе (VIII) уравненія (III) не можетъ быть дробнымъ.

§ 5. Прежде чѣмъ мы приведемъ нѣкоторыя дополнительныя замѣчанія къ предыдущему способу, приложимъ его къ дифференціальному уравненію

$$(x^2+1)^3 y \frac{dy}{dx} + (x^2+1)^3 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+1)^2 y^2 = x^3 + 2x^2 - 9x - 2,$$

представляющему тотъ самый примѣръ, на которомъ проф. Бугаевъ иллюстрируетъ приложеніе своего способа нахожденія раціональнаго дробнаго рѣшенія.

Сравненіе послѣдняго уравненія съ (I) даетъ:

$$L = (x^2+1)^3, \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{2}(x^2+1)^3,$$

$$P = -(x^2+1)^2, \quad Q = 0, \quad R = -(x^3 + 2x^2 - 9x - 2),$$

слѣдовательно

$$M_1 = M - 2L' = -12x(x^2+1)^2,$$

$$Q_1 = Q - M' + L'' = 6(x^2+1)(5x^2+1)$$

$$P_1 = P - N' = -(3x+1)(x^2+1)^2.$$

Отсюда видно, что $L$, $M_1$ и $Q_1$ имѣютъ общій дѣлитель $x^2+1=v$, на квадратъ котораго, т. е. на $(x^2+1)^2$, дѣлятся $N$ и $P_1$, и нѣтъ дѣлителя болѣе высокой степени съ подобными-же свойствами.

Поэтому мы получимъ:

$$l=\frac{L}{x^2+1}=(x^2+1)^2,\ m_1=\frac{M_1}{x^2+1}=-12x(x^2+1),\ q_1=\frac{Q_1}{x^2+1}=6(5x^2+1),$$

$$n=\frac{N}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}(x^2+1),\quad p_1=\frac{P_1}{(x^2+1)^2}=-(3x+1)$$

и задача приведется къ разысканію цѣлаго рѣшенія дифференціальнаго уравненія

$$[(x^2+1)^2z]''-12[x(x^2+1)z]'+6(5x^2+1)z$$
$$+\frac{1}{2}[(x^2+1)z^2]'-(3x+1)z^2=x^3+2x^2-9x-2$$

или

$$(x^2+1)^2z''-4x(x^2+1)z'+2(3x^2-1)z$$
$$+(x^2+1)zz'-(2x+1)z^2=x^3+2x^2-9x-2\,.$$

Примѣняя для этого способъ проф. Бугаева, положимъ, что

$$[z]=\alpha x^\lambda$$

представляетъ *старшій* членъ искомаго цѣлаго рѣшенія.

Тогда высшіе показатели $x$ въ различныхъ членахъ уравненія будутъ:

$$\lambda+2,\quad \lambda+2,\quad \lambda+2,\quad 2\lambda+1,\quad 2\lambda+1,\quad 3;$$

сравниваніе ихъ между собою приводитъ къ опредѣленному значенію

$$\lambda=1\,.$$

Затѣмъ, при этомъ значеніи $\lambda$, найдемъ для коэффиціента $\alpha$, сравнивъ въ результатѣ подстановки $z=\alpha x+\ldots$, коэффиціенты при $x^3$, условіе

$$(\alpha-1)^2=0,\quad \text{откуда}\ \alpha=1\,.$$

Наконецъ преобразованіе послѣдняго дифференціальнаго уравненія посредствомъ подстановки

$$z=\zeta+x$$

дастъ

$$(x^2+1)^2\zeta''+(x^2+1)(\zeta+x)(\zeta'+1)-4x(x^2+1)(\zeta'+1)$$
$$(6x^2-2)(\zeta+x)-(2x+1)(\zeta^2+2x\zeta+x^2)=x^3+2x^2-9x-2\,.$$

Такъ какъ въ предыдущемъ выраженіи $z$, которое должно быть цѣлымъ, $x$ представляетъ *старшій* членъ, то $\zeta$ можетъ быть только постоянной величиной. Обозначивъ ее черезъ $a$, получимъ для ея опредѣленія слѣдующее условіе

$$(x^2+1)(x+a) - 4x(x^2+1) + (6x^2-2)(x+a) - (2x+1)(x^2+2ax+a^2) = x^3+2x^2-9x-2,$$

или

$$\left.\begin{array}{rrrr} x^3+ax^2 & +x & +a & \\ -4x^3 & -4x & & \\ +6x^3+6ax^2 & -2x & -2a & \\ -2x^3-x^2 & -2a^2x & -a^2 & \\ & -4ax^2-2ax & & \end{array}\right\} = x^3+2x^2-9x-2.$$

Здѣсь члены съ $x^3$ сократятся; члены съ $x^2$ сократятся, если $3a-1=2$, т. е. $a=1$; при этомъ значеніи $a$ сокращаются также члены съ $x$ и безъ $x$.

Итакъ,

$$z = x+1,$$

слѣдовательно

$$y = \frac{z}{x^2+1} = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

§ 6. На основаніи предыдущихъ общихъ выводовъ, подкрѣпленныхъ послѣднимъ примѣромъ, можно заключить, что для разысканія раціональнаго дробнаго рѣшенія, если оно возможно для уравненія вида (I), можно придерживаться слѣдующаго правила:

1) Разыскать алгебраически такого общаго дѣлителя $v$, наивысшей степени, для $L$, $M_1 = M - 2L'$ и $Q_1 = Q - M' + L''$, квадратъ котораго дѣлилъ бы $N$ и $P_1 = P - N'$.

2) Пріискать цѣлое рѣшеніе $z=u$, для дифференціальнаго уравненія

$$\left(\frac{L}{v}.z\right)'' + \left(\frac{M_1}{v}z\right)' + \frac{Q_1}{v}z + \left(\frac{N}{v^2}z^2\right)' + \left(\frac{P_1}{v^2}z^2\right) + R = 0.$$

Тогда искомое раціональное дробное рѣшеніе уравненія (I) будетъ

$$y = \frac{u}{v}.$$

Теперь самъ собою возникаетъ вопросъ о слѣдующихъ двухъ случахъ:
1) если упомянутый выше общій дѣлитель $v$ можетъ имѣть только постоянное значеніе,

2) если при $v$, равномъ цѣлой функціи отъ $x$, только что приведенное выше дифференціальное уравненіе (IV) не имѣетъ рѣшенія въ видѣ цѣлой функціи.

Спрашивается, правильно-ли сдѣлать заключеніе, что данное уравненіе (I) и въ томъ и въ другомъ случаѣ не будетъ имѣть раціональныхъ дробныхъ рѣшеній?

Не можетъ быть сомнѣнія, что во второмъ изъ этихъ случаевъ должно дать утвердительный отвѣтъ на предложенный вопросъ. Что-же касается перваго случая, то, чтобы съ увѣренностью отвѣтить на поставленный вопросъ, необходимо предварительно испытывать, нельзя-ли пріискать такого множителя $\mu$ (интегрирующаго), по умноженіи на который всѣхъ коэффиціентовъ даннаго уравненія (I), они пріобрѣли бы свойство доставлять, на основаніи даннаго выше правила, значеніе $v$ равное цѣлой функціи отъ $x$. Ясно, что простѣйшій видъ интегрирующаго множителя $\mu$ долженъ представлять неопредѣленную цѣлую положительную степень произведенія всѣхъ тѣхъ-же линейныхъ множителей, которые могутъ входить въ знаменателя дробнаго рѣшенія. Что касается этихъ послѣднихъ, то, подобно тому какъ въ случаѣ линейныхъ уравненій, по теоремѣ Ліувиля не трудно опредѣлить, въ которомъ изъ коэффиціентовъ $L$, $N$ или $P$ должны заключаться всѣ линейные множители дробнаго раціональнаго рѣшенія.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть это послѣднее имѣетъ видъ:

$$y = \frac{A}{(x-a)^{\alpha} B},$$

гдѣ $(x-a)$ одинъ изъ линейныхъ множителей знаменателя, входящій въ него въ степени $\alpha$; $A$ и $B$ цѣлыя функціи отъ $x$, не дѣлящіяся на $(x-a)$.

Очевидно, будемъ имѣть:

$$y' = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha+1} B_1}, \qquad y'' = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha+2} B_2},$$

$$y^2 = \frac{A^2}{(x-a)^{2\alpha} B^2}, \qquad yy' = \frac{AA_1}{(x-a)^{2\alpha+1} BB_1}.$$

Отсюда видно, что при подстановкѣ этихъ значеній $y$, $y'$, $y''$ въ уравненіе (I) линейный множитель $(x-a)$ войдетъ дѣлителемъ въ высшей степени въ томъ членѣ, котораго коэффиціентъ $2N$, если $\alpha > 1$. Въ члены $Ly''$ и $2Nyy'$ войдетъ дѣлитель $(x-a)$ въ равной степени только для $\alpha = 1$.

На основаніи этихъ соображеній, которыя безполезно развивать въ подробностяхъ, не трудно составить такое произведеніе, въ которое входили-бы всѣ линейные множители знаменателя искомаго дробнаго рѣшенія, причемъ кромѣ ихъ могутъ, конечно, быть введены и посторонніе множители. Принявъ неопредѣленную цѣлую положительную степень этого произведенія за значеніе $\mu$, нужно будетъ только опредѣлить показателя этой степени на основаніи даннаго выше условія для $v$.

Разсмотримъ для поясненія простой примѣръ:

$$x^2y'' + 12(xy' + 2y) - x^3yy' - 3x^2y^2 = -3x^2.$$

Мы имѣемъ здѣсь:

$$L = x^2, \quad M = 12x, \quad N = -\frac{1}{2}x^3, \quad P = -3x^2, \quad Q = 24;$$

поэтому

$$M_1 = M - 2L' = +8x, \quad Q_1 = Q - M' + L'' = 14, \quad P_1 = -\frac{3}{2}x^2.$$

Слѣдовательно, $L$, $M_1$, $Q_1$ имѣютъ общимъ дѣлителемъ постоянную величину; но отсюда еще не слѣдуетъ, чтобы данное дифференціальное уравненіе не имѣло раціональнаго дробнаго рѣшенія. Для выясненія этого вопроса возьмемъ интегрирующій множитель

$$\mu = x^n,$$

гдѣ $n$ пока неопредѣленное цѣлое число, а степень $x$ взята потому, что въ данномъ уравненіи коэффиціенты при $yy'$ и $y''$ имѣютъ линейныхъ множителей только равныхъ $x$. Теперь будемъ имѣть:

$$\mu L = x^{n+2}, \quad \mu M = 12x^{n+1}, \quad \mu N = -\frac{1}{2}x^{n+3}, \quad \mu P = -3x^{n+2}, \quad \mu Q = 24x^n;$$

поэтому

$$M_1 = \mu M - 2(\mu L)' = -2(n-4)x^{n+1},$$
$$Q_1 = \mu Q - (\mu M)' + (\mu L)'' = (n^2 - 9n + 14)x^n,$$
$$P_1 = \mu P - (\mu N)' = \left(-3 + \frac{n+3}{2}\right)x^{n+2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $x^n$, и всякая степень отъ $x$ ниже $n$-ной, будетъ общимъ дѣлителемъ для $\mu L$, $M_1$ и $Q_1$.

Далѣе, чтобы высшая степень общаго дѣлителя, возвышенная въ квадратъ, т. е. $x^{2n}$, дѣлила $\mu N$ и $P_1$, необходимо:

1) чтобы $n + 3 - 2n = 3 - n$ равнялось нулю или цѣлому положительному числу,

2) чтобы, при $3 - n = 0$, было $P_1 = 0$.

Такъ какъ послѣднее условіе выполняется, то, полагая $n = 3$, будемъ имѣть:

$$\frac{L\mu}{x^3} = x^2, \quad \frac{M_1}{x^3} = +2x, \quad \frac{Q_1}{x^3} = -4, \quad \frac{\mu N}{x^6} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{P_1}{x^6} = 0.$$

Слѣдовательно, заданное дифференціальное уравненіе приведется къ слѣдующему:

$$(x^2z)'' + 2(xz)' - 4z - \left(\frac{1}{2}z^2\right)' = -3x^5, \text{ гдѣ } z = x^3y,$$

или

$$x^2z'' + (6x - z)z' = -3x^5.$$

Для послѣдняго дифференціальнаго уравненія по способу наибольшихъ показателей находимъ цѣлое рѣшеніе

$$z = x^3 + 6x;$$

слѣдовательно, заданное дифференціальное уравненіе имѣетъ дробное рѣшеніе

$$y = \frac{z}{x^3} = \frac{x^3 + 6x}{x^3} = \frac{x^2 + 6}{x^2} = 1 + \frac{6}{x^2}.$$

---

## Извлеченіе изъ рукописи В. Г. Имшенецкаго, содержащей другую редакцію предыдущей статьи *).

..... Въ заключеніе предыдущихъ замѣтокъ **) кстати будетъ показать, что тѣ пріемы, которые послужили намъ для упрощенія рѣшенія задачи о нахожденіи раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій, могутъ, благодаря лишь небольшому видоизмѣненію, съ успѣхомъ быть приложены для рѣшенія такой-же задачи въ отношеніи одного довольно общаго и небезинтереснаго класса дифференціальныхъ уравненій не линейныхъ.

---

*) Изъ переписки В. Г. Имшенецкаго съ разными лицами видно, что эта рукопись представляетъ набросокъ сообщенія его О.-Пб—скому Математ. Обществу, сдѣланнаго 15 октября 1891 года. Послѣдняя редакція менѣе обработана авторомъ; тѣмъ не менѣе она содержитъ интересные варіанты его мыслей, заслуживающіе вниманія. Здѣсь трактуется иное дифференціальное уравненіе, болѣе сложное, чѣмъ уравненіе (I), сверхъ того здѣсь есть указаніе на то, что В. Г. Имшенецкій владѣлъ пріемами, которые примѣняются къ болѣе общимъ видамъ дифференціальныхъ уравненій. *Ред.*

**) Эти замѣтки по содержанію совпадаютъ съ тѣмъ, что изложено выше въ §§ 1, 2 и 3. *Ред.*

Этотъ классъ можно характеризовать слѣдующимъ образомъ. Къ нему принадлежатъ уравненія такого общаго вида, что въ нихъ какъ частные случаи заключаются дифференціальныя уравненія, получаемыя при пониженіи дифференціальнаго порядка на единицу однородныхъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, любого порядка, съ раціональными коэффиціентами.

Отсюда понятно, что дать способъ находить раціональныя дробныя рѣшенія для дифференціальныхъ уравненій описаннаго класса значитъ въ то-же время показать, какъ находятся для линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами частные интегралы вида $e^{\int y dx}$, гдѣ $y$ есть раціональная дробь.

Къ опредѣленному выше классу принадлежатъ слѣдующія дифференціальныя уравненія съ цѣлыми коэффиціентами: во 1-хъ уравненіе перваго порядка и второй степени

$$N + Py + Qy^2 + R\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

на которомъ Лагранжъ въ цитированномъ выше мемуарѣ *) показалъ примѣненіе своего способа интегрированія посредствомъ непрерывныхъ дробей, во 2-хъ уравненіе второго порядка и третьей степени

$$N + Py + Qy^2 + Ry^3 + (S + 2Ty)\frac{dy}{dx} + U\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad . \; . \; . \; (a)$$

и такъ далѣе.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ предлагаемаго нами способа, находить раціональныя дробныя рѣшенія, на уравненіи (a), съ цѣлыми коэффиціентами $N$, $S, \ldots, T$, $U$, такъ какъ пріемы, которые будутъ примѣнены для этой цѣли, безъ затрудненія переносятся на другія уравненія того-же класса.

Уравненіе (a) можно представить такимъ образомъ:

$$\frac{d^2}{dx^2}(Uy) + \frac{d}{dx}(S_1 y) + P_1 y + \frac{d}{dx}(Ty^2) + Q_1 y^2 + Ry^3 + N = 0\,, \quad . \; (a')$$

положивъ

$$S_1 = S - 2\frac{dU}{dx}\,, \quad P_1 = P - \frac{dS}{dx} + \frac{d^2U}{dx^2}\,, \quad Q_1 = Q - \frac{dT}{dx}\,.$$

Теперь можно слѣдующимъ образомъ обнаружить условія, при которыхъ данное дифференціальное уравненіе допускаетъ раціональное дробное рѣшеніе. Для этого допустимъ сначала, что оно, или ему равнозначущее уравненіе (a′), имѣетъ рѣшеніе

$$y = X\,,$$

*) Oeuvres complètes, t. IV.

гдѣ $X$ есть данная цѣлая функція отъ $x$, и составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2}{dx^2}(UYz)+\frac{d}{dx}(S_1Yz)+P_1Yz+$$

$$+\frac{d}{dx}(TY^2z^2)+Q_1Y^2z^2+RY^3z^3+N=0, \quad \ldots \quad (a'')$$

гдѣ $Y$ есть данная цѣлая функція отъ $x$, различная отъ $X$, а $z$ означаетъ неизвѣстную функцію отъ $x$.

На основаніи условія, что $y=X$ есть интегралъ уравненія (a′), очевидно, что уравненію (a″) удовлетворяетъ положеніе

$$Yz=X;$$

слѣдовательно, уравненіе (a″) имѣетъ раціональное дробное рѣшеніе

$$z=\frac{X}{Y}.$$

Обративъ вниманіе на то, какъ составляется уравненіе (a″), допускающее раціональное дробное рѣшеніе, не трудно сдѣлать общія заключенія о разысканіи сначала знаменателя, потомъ числителя дробнаго рѣшенія, если его имѣетъ уравненіе (a), не допускающее цѣлаго рѣшенія.

Это можетъ быть сдѣлано двоякимъ образомъ: въ однихъ случаяхъ *непосредственно*, т. е. съ помощію лишь даннаго уравненія (a); въ другихъ—*посредствомъ* разысканія нѣкотораго *множителя*.

Въ первомъ случаѣ нужно уравненіе (a) привести къ виду (a′) и для многочленовъ $U$, $S_1$ и $P_1$ отыскать общаго наибольшаго дѣлителя $D$. Далѣе, разложивъ $D$ на линейныхъ множителей получимъ, напр.

$$D=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$$

и составимъ произведеніе

$$Y=(x-a)^{\alpha'}(x-b)^{\beta'}\ldots(x-l)^{\lambda'},$$

гдѣ показатели $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'$ опредѣляются слѣдующими условіями: 1) $T$ и $Q_1$ должны дѣлиться на $Y^2$, а $R$ на $Y^3$; 2) $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'$ должны имѣть при этомъ наибольшія цѣлыя положительныя значенія, не превосходящія соотвѣтственно $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Полагая въ уравненіи (a′)

$$y=\frac{z}{Y}$$

и введя цѣлые полиномы:

$$\frac{U}{Y}=u,\quad \frac{S_1}{Y}=s,\quad \frac{P_1}{Y}=p,$$

$$\frac{T}{Y^2}=t,\quad \frac{Q_1}{Y^2}=q,\quad \frac{R}{Y^3}=r,$$

получимъ

$$\frac{d^2}{dx^2}(uz)+\frac{d}{dx}(sz)+pz+\frac{d}{dx}(tz^2)+qz^2+rz^3+N=0\ldots\ldots(b)$$

Всякому рѣшенію

$$z=X$$

уравненія (b) соотвѣтствуетъ рѣшеніе вида

$$y=\frac{X}{Y}$$

даннаго уравненія (a). Слѣдовательно, если можно 1) найти полиномъ $Y$, по меньшей мѣрѣ первой степени, удовлетворяющій указаннымъ выше условіямъ и 2) получить *цѣлое* рѣшеніе $z=X$ для уравненія (b), то данное уравненіе (a) имѣетъ раціональное дробное рѣшеніе $y=\frac{X}{Y}$.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда нельзя найти требуемаго полинома $Y$ *непосредственно* съ помощію даннаго уравненія, можно еще попытаться получить его посредствомъ предварительнаго умноженія даннаго уравненія на множитель $\mu$, который можно будетъ назвать *интегрирующимъ*, когда съ помощію коэффиціентовъ уравненія (a), умноженныхъ на $\mu$, требуемый полиномъ $Y$ можетъ быть найденъ.

Пусть $y=\frac{X}{Y}$ представляетъ рѣшеніе дифференціальнаго уравненія (a), имѣющее видъ несократимой дроби, и уравненію $Y=0$ принадлежитъ корень $a$ кратности $\alpha$, такъ что мы имѣемъ:

$$y=\frac{X}{(x-a)^{\alpha}Y_1},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{X_1}{(x-a)^{\alpha+1}Y_2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{X_2}{(x-a)^{\alpha+2}Y_3},\ldots.$$

гдѣ полиномы $X$, $X_1$, $X_2$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ не дѣлятся на $(x-a)$.

Внося предыдущее значеніе функціи $y$ и ея производныхъ въ уравненіе (a), легко замѣтить тотъ членъ, гдѣ въ знаменателѣ $(x-a)$ войдетъ въ самой высшей степени. Коэффиціентъ этого члена долженъ содержать всѣхъ различныхъ линейныхъ множителей знаменателя $Y$ дробнаго рѣшенія, по теоремѣ Ліувилля.

На этомъ основаніи неопредѣленная степень этого коэффиціента или, проще, произведенія его различныхъ линейныхъ множителей, можно принять за значеніе $\mu$ интегрирующаго множителя. Что-же касается показателя упомянутой неопредѣленной степени, то онъ можетъ быть найденъ по способу, сходному съ тѣмъ, который показанъ нами въ упомянутой выше статьѣ о нахожденіи раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій.

Изъ предыдущаго заключаемъ, что уравненіе (a) не имѣетъ раціональнаго дробнаго рѣшенія, 1) если требуемаго полинома $Y$ (который долженъ представлять знаменатель рѣшенія) нельзя опредѣлить по уравненію (a) ни непосредственно, ни посредствомъ множителя, или 2) если, найдя полиномъ $Y$, мы получимъ уравненіе (b), не допускающее цѣлаго рѣшенія.

Переходимъ къ приложеніямъ.

*Примѣръ 1.* Дано уравненіе

$$(x+3)^2\frac{d^2y}{dx^2}-(x+3)[x^2+2x-9+14(x+3)^4y]\frac{dy}{dx}+$$
$$+(x+3)^8y^3-42(x+3)^4y^2-2(2x^2+6x-3)y=x^2-6x+5.$$

Прилагая къ этому уравненію непосредственно предыдущій способъ, легко убѣждаемся, что такимъ образомъ нельзя найти полинома $Y$, который представлялъ-бы знаменателя искомаго дробнаго рѣшенія. Но въ виду коэффиціентовъ при $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $y^3$ заключаемъ, что $Y$ можетъ имѣть линейные множители лишь вида $x+3$; поэтому, умноживъ данное уравненіе на

$$\mu=(x+3)^n,$$

гдѣ $n$ неопредѣленное, будемъ имѣть:

$$U=(x+3)^{n+2},\quad T=-7(x+3)^{n+5},\quad S=-(x+3)^{n+1}(x^2+2x-9),$$
$$R=(x+3)^{n+8},\quad Q=-42(x+3)^{n+4},\quad P=-2(2x^2+6x-3)(x+3)^n,$$
$$N=-(x^2-6x+5)(x+3)^n.$$

Отсюда находимъ:

$$S_1=-(x+3)^{n+1}[x^2+2x-9+2(n+2)],$$
$$P_1=(x+3)^n[-2(2x^2+6x-3)+2(x+1)(x+3)+$$
$$+(n+1)(x^2+2x-9)+(n+2)(n+1)],$$
$$Q_1=7(n-1)(x+3)^{n+4},$$

и замѣчаемъ, что $(x+3)^n$ есть общій наибольшій дѣлитель $U$, $S_1$ и $P_1$. Полагая

$$D=(x+3)^n,$$

нужно выполнить условія, чтобы $R$ дѣлилось на $D^3$, а $T$ и $Q_1$ на $D^2$.

Нетрудно убѣдиться, что всѣмъ этимъ условіямъ можно удовлетворить, дѣлая

$$n=1.$$

При найденномъ значеніи $n=1$ будемъ имѣть:

$$U=(x+3)^3,\quad T=-7(x+3)^6,\quad S_1=-(x+3)^8(x-1),$$
$$P_1=0,\quad Q_1=0,\quad R=(x+3)^9,\quad N=-(x-1)(x-5)(x+3).$$

Полагая поэтому

$$Y=(x+3)^3$$

и дѣлая

$$y=\frac{z}{Y}=\frac{z}{(x+3)^3},$$

приведемъ данное дифференціальное уравненіе къ слѣдующему виду

$$\frac{d^2z}{dx^2}-7\frac{d}{dx}z^2-\frac{d}{dx}[(x-1)z]+z^3=(x-1)(x-5)(x+3)$$

или

$$\frac{d^2z}{dx^2}-14z\frac{dz}{dx}-(x-1)\frac{dz}{dx}-z+z^3=(x-1)(x-5)(x+3).$$

Найдя извѣстнымъ пріемомъ цѣлое рѣшеніе

$$z=x-1$$

послѣдняго уравненія, получимъ вмѣстѣ съ тѣмъ дробное рѣшеніе

$$y=\frac{x-1}{(x+3)^3}$$

заданнаго уравненія.

*Примѣръ 2.* Дано линейное уравненіе 3-го порядка

$$x\frac{d^3u}{dx^3}=(x^4+9x^2+12)u.$$

Полагая

$$u=e^{\int y dx},$$

получимъ

$$x\left(\frac{d^2y}{dx^2}+3y\frac{dy}{dx}+y^3\right)=x^4+9x^2+12\,.$$

Разыскивая дробный интегралъ послѣдняго уравненія и убѣждаясь, что безъ помощи множителя его получить нельзя, беремъ множитель

$$\mu=x^{n-1},$$

по умноженіи на который послѣднее уравненіе можно привести къ такому виду:

$$\frac{d^2}{dx^2}[x^ny]-2n\frac{d}{dx}[x^{n-1}y]+n(n-1)[x^{n-2}y]+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{d}{dx}[x^ny^2]-\frac{3}{2}nx^{n-1}y^2+x^ny^3=(x^4+9x^2+12)\,x^{n-1}\,.$$

Здѣсь имѣемъ

$$D=x^{n-2}$$

общій наибольшій дѣлитель коэффиціентовъ $y$ въ прямоугольныхъ скобкахъ $[\ldots]$ въ трехъ первыхъ членахъ.

Чтобы $x^n$ и $x^{n-1}$ дѣлились на $D^2$, а также $x^n$ дѣлилось на $D^3$, должны быть выполнены неравенства:

$$n-2(n-2)\geqq 0\,,\quad n-1-2(n-2)\geqq 0\,,\quad n-3(n-2)\geqq 0$$

или

$$4-n\geqq 0\quad\text{и}\quad 3-n\geqq 0\,,$$

откуда слѣдуетъ, что $n=3$, а $\mu=x^2$.

Поэтому будемъ имѣть

$$\frac{d^2}{dx^2}[x^3y]-6\frac{d}{dx}[x^2y]+6xy$$

$$+\frac{3}{2}\frac{d}{dx}[x^3y^2]-\frac{9}{2}x^2y^2+x^3y^3=x^6+9x^4+12x^2,$$

а полагая здѣсь

$$xy=z\,,$$

по приведеніи получимъ

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+2z+3xz\frac{dz}{dx}-3z^2+z^3=x^6+9x^4+12x^2\,.$$

Теперь, разыскивая для послѣдняго уравненія цѣлое рѣшеніе и означая старшій его членъ черезъ

$$[z] = ax^{\alpha},$$

находимъ рядъ показателей:

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 6,$$

сравненіе которыхъ между собою приведетъ къ слѣдующимъ возможнымъ значеніямъ

$$\alpha = 0,\ 6,\ 3,\ 2.$$

При нихъ предыдущій рядъ показателей соотвѣтственно обратится въ

$$\begin{array}{llllllll} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 6; \\ 6, & 6, & 6, & 12, & 12, & 18, & 6; \\ 3, & 3, & 3, & 6, & 6, & 9, & 6; \\ 2, & 2, & 2, & 4, & 4, & 6, & 6; \end{array}$$

слѣдовательно должно принять

$$\alpha = 2$$

и

$$[z] = ax^2.$$

Подстановка этого значенія $z$ въ дифференціальное уравненіе и сравненіе коэффиціентовъ $x^6$ въ обѣихъ частяхъ его даетъ условіе $a^3 = 1$, откуда $a = 1$. Далѣе, дѣлая

$$z = x^2 + v,$$

преобразуемъ предыдущее дифференціальное уравненіе въ слѣдующее

$$x^2 \frac{d^2v}{dx^2} + (3x^2 - 2)\, x \frac{dv}{dx} + (3x^4 + 2)\, v +$$

$$+ 3xv \frac{dv}{dx} + 3\,(x^2 - 1)\, v^2 + v^3 = 6x^4 + 12x^2.$$

Означая черезъ

$$[v] = bx^3$$

старшій членъ цѣлаго рѣшенія послѣдняго уравненія, получаемъ рядъ показателей

$$\beta,\ \beta + 2,\ \beta + 4,\ 2\beta,\ 2\beta + 2,\ 3\beta,\ 4,$$

сравненіе которыхъ между собою даетъ слѣдующія различныя значенія:

$$\beta = 0,\quad 4,\quad 2,\quad 1;$$

но изъ нихъ возможны только первое и послѣднее, дающія ряду показателей соотвѣтственно такой видъ:

$$0,\quad 2,\quad 4,\quad 0,\quad 2,\quad 0,\quad 4;$$
$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 2,\quad 4,\quad 3,\quad 4;$$

поэтому слѣдуетъ принять значеніе $\beta = 0$ и положить

$$v = b = \text{const.}$$

Это значеніе $v$ дѣйствительно удовлетворитъ дифференціальному уравненію при $b = 2$.

Слѣдовательно, мы нашли:

$$v = 2,$$
$$z = x^2 + 2,$$
$$y = \frac{x^2+2}{x},$$
$$\int y dx = \frac{1}{2}x^2 + \log(x^2),$$
$$u = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Другой способъ рѣшенія послѣдней задачи. Сначала, отыскивая высшій членъ $ax^\alpha$ цѣлой части рѣшенія $y$ дифференціальнаго уравненія

$$x[y'' + 3yy' + y^3] = x^4 + 9x^2 + 12$$

и полагая $y = ax^\alpha + \ldots$, находимъ рядъ показателей:

$$\alpha - 1,\quad 2\alpha,\quad 3\alpha + 1,\quad 4. \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Черезъ сравненіе ихъ находимъ слѣдующія цѣлыя значенія $\alpha$: $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, для которыхъ рядъ $(\alpha)$ даетъ:

$$1,\quad 4,\quad 7,\quad 4;$$
$$0,\quad 2,\quad 4,\quad 4;$$

слѣдовательно нужно взять $\alpha = 1$; тогда для опредѣленія коэффиціента $a$ получимъ условіе

$$a^3 = 1, \text{ откуда } a = 1.$$

Полагая теперь $y = x + \eta$, получимъ

$$x[\eta'' + 3(\eta + x)(\eta' + 1) + \eta^3 + 3x\eta^2 + 3x^2\eta] = 9x^2 + 12$$

или

$$x[\eta'' + 3\eta\eta' + 3x\eta' + (3x^2 + 1)\eta + 3x\eta^2 + \eta^3] = 6x^2 + 12.$$

Въ цѣлой части значенія $\eta$ высшій членъ $bx^\beta$, при условіи $\beta < 1$, будетъ нулевой степени; слѣдовательно, должно положить просто

$$\eta = b + \ldots.$$

Но при подстановкѣ $b$ вмѣсто $\eta$ получается въ уравненіи только *одинъ* высшій членъ $3bx^3$; слѣд. $b = 0$.

Далѣе, замѣчая, что

$$\int E(y)\,dx = \int x dx = \frac{x^2}{2},\ ^*)$$

положимъ въ линейномъ уравненіи

$$x\frac{d^3u}{dx^3} = (x^4 + 9x^2 + 12)u$$

$$u = e^{\frac{x^2}{2}}v,$$

что доставитъ,

$$u' = e^{\frac{x^2}{2}}(v' + xv),$$

$$u'' = e^{\frac{x^2}{2}}(v'' + 2xv' + 1 + x^2 \mid v),$$

$$u''' = e^{\frac{x^2}{2}}(v''' + 2x + x \mid v'' + (x^2 + 1) + 2 + 2x^2 \mid v' + 2x + x + x^3 \mid v),$$

$$xv''' + 3x^2v'' + (3x^3 + 3x)v' - (6x^2 + 12)v = 0.$$

Полагая въ послѣднемъ уравненіи

$$v = cx^\gamma + \ldots.$$

найдемъ условное уравненіе

$$(\gamma - 2)c = 0,\ \text{откуда}\ \gamma = 2,\ c = \text{const.}$$

Слѣдовательно,

$$u = cx^2e^{\frac{x^2}{2}},$$

согласно съ доказаннымъ выше.

---

*) Символъ $E(y)$ означаетъ цѣлую часть выраженія $y$. *Ред.*

# Новый случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла въ жидкости.

**А. М. Ляпунова.**

Извѣстно, что вопросъ о движеніи твердаго тѣла въ неограниченной жидкости при отсутствіи внѣшнихъ силъ и при извѣстныхъ предположеніяхъ о характерѣ движенія жидкости зависитъ отъ интегрированія системы дифференціальныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial y_2},\\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial y_3},\\
\frac{dx_3}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial y_1},\\
\frac{dy_1}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_2},\\
\frac{dy_2}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial T}{\partial y_3},\\
\frac{dy_3}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T}{\partial y_1},
\end{aligned}$$

гдѣ $T$ есть нѣкоторая квадратичная форма перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_1$, $y_2$, $y_3$ съ постоянными коэффиціентами.

Уравненія эти во всякомъ случаѣ допускаютъ три слѣдующихъ интеграла:

$$T, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad \text{и} \qquad x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

[которые въ разсматриваемомъ вопросѣ всегда будутъ независимыми, такъ какъ форма $T$ въ этомъ вопросѣ такова, что при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ обращается въ *опредѣленную* (définie) форму перемѣнныхъ $y_1$, $y_2$, $y_3$], и всякій разъ, когда будетъ найденъ четвертый интегралъ, подобно указаннымъ сейчасъ независящій отъ $t$ и не приводящійся къ ихъ функціи, принципъ послѣдняго множителя, очевидно, приложимый къ разсматриваемой системѣ дифференціальныхъ уравненій, позволитъ интегрированіе ея выполнить посредствомъ квадратуръ.

Клебшъ указалъ три случая, когда такой интегралъ можетъ быть найденъ подъ видомъ цѣлой функціи величинъ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_1$, $y_2$, $y_3$ не выше второй степени (Math. Ann., Bd. 3).

Всѣ эти случаи относятся къ слѣдующему типу формы $T$:

$$T = \frac{1}{2}(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2) + b_1 x_1 y_1 + b_2 x_2 y_2 + b_3 x_3 y_3 + \frac{1}{2}(c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_3^2),$$

и первый изъ нихъ характеризуется условіемъ, что соотвѣтственные элементы двухъ какихъ-либо столбцовъ таблицы

$$\begin{array}{lll} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{array}$$

равны между собою.

Если это имѣетъ мѣсто напр. по отношенію ко второму и третьему столбцамъ, такъ что

$$a_2 = a_3, \qquad b_2 = b_3, \qquad c_2 = c_3,$$

то четвертымъ независимымъ интеграломъ можетъ служить $y_1$.

Второй изъ указанныхъ Клебшемъ случаевъ характеризуется равенствами

$$b_1 = b_2 = b_3$$

вмѣстѣ съ условіемъ, что при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ $a$ и $\tau$ коэффиціенты $a_1$, $a_2$, $a_3$ выражаются формулами

$$a_1 = a + \tau c_2 c_3,$$
$$a_2 = a + \tau c_3 c_1,$$
$$a_3 = a + \tau c_1 c_2.$$

Для того, чтобы случай этотъ не заключался въ предыдущемъ, коэффиціенты $c_1$, $c_2$, $c_3$ должны быть всѣ различными.

При этомъ условіи четвертымъ независимымъ интегралomъ будетъ служить функція

$$\tau(c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_3x_3^2)-(y_1^2+y_2^2+y_3^2).$$

Наконецъ, третій случай Клебша характеризуется условіями

$$b_1=b_2=b_3,$$
$$c_1=c_2=c_3,$$

при которыхъ, если между величинами $a_1$, $a_2$, $a_3$ существуютъ различныя, четвертымъ независимымъ интегралomъ можетъ служить функція

$$a_2a_3x_1^2+a_3a_1x_2^2+a_1a_2x_3^2-c(a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2),$$

гдѣ $c$ есть общая величина коэффиціентовъ $c_1$, $c_2$, $c_3$.

Когда $a_1$, $a_2$, $a_3$ всѣ различны, случай этотъ не заключается въ предыдущихъ, но, если угодно, его можно разсматривать, какъ нѣкоторый предѣльный второго, отъ котораго можно къ нему перейти, измѣняя $c_2$, $c_3$, $a$ и $\tau$ такъ, чтобы $c_2-c_1$ и $c_3-c_1$ дѣлались безконечно-малыми, $a$ и $\tau$ — безконечно-большими, а $a_1$, $a_2$, $a_3$ оставались неизмѣнными. Указанный сейчасъ интегралъ получится тогда, какъ предѣлъ нѣкоторой линейной комбинаціи четырехъ цѣлыхъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ второму случаю.

Можно замѣтить, что второй и третій случаи могутъ быть замѣнены однимъ, который характеризуется условіями:

$$b_1=b_2=b_3,$$
$$\frac{a_2-a_3}{c_1}+\frac{a_3-a_1}{c_2}+\frac{a_1-a_2}{c_3}=0.$$

Недавно В. А. Стекловымъ указанъ новый случай интегрируемости, въ которомъ, подобно предыдущимъ, четвертый независимый интегралъ также можетъ быть найденъ подъ видомъ цѣлой функціи второй степени величинъ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_1$, $y_2$, $y_3$ (Сообщ. Харьк. Мат. Общ., т. 3 и Math. Ann., Bd. 42).

Случай этотъ В. А. Стекловъ опредѣляетъ условіями

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\sigma c_2c_3, & a_1&=\sigma^2c_1(c_2^2+c_3^2),\\ b_2&=\sigma c_3c_1, & a_2&=\sigma^2c_2(c_3^2+c_1^2),\\ b_3&=\sigma c_1c_2, & a_3&=\sigma^2c_3(c_1^2+c_2^2), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

*

при выполненіи которыхъ разсматриваемыя дифференціальныя уравненія допускаютъ слѣдующій интегралъ:

$$\sigma^2 \mathrm{S}(c_2 - c_3)^2 x_1^2 - 2\sigma \mathrm{S} c_1 x_1 y_1 + \mathrm{S} y_1^2,$$

гдѣ $\mathrm{S}$ означаетъ суммированіе трехъ членовъ, получаемыхъ изъ написаннаго круговой перестановкой значковъ 1, 2, 3.

Для того, чтобы этими условіями опредѣлялся случай, не заключающійся въ предыдущихъ, постоянное $\sigma$ не должно быть нулемъ, а коэффиціенты $c_1$, $c_2$, $c_3$ должны быть всѣ различными. При этомъ послѣднемъ условіи указанный сейчасъ интегралъ навѣрно не будетъ функціей трехъ извѣстныхъ.

Къ перечисленнымъ случаямъ интегрируемости я могу здѣсь прибавить еще одинъ.

Случай этотъ характеризуется условіями

$$c_1 = c_2 = c_3 = c,$$

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c},$$

при которыхъ разсматриваемыя дифференціальныя уравненія допускаютъ, какъ нетрудно убѣдиться, слѣдующій интегралъ:

$$\mathrm{S} b_1 [(b_2 + b_3) x_1 + c y_1]^2,$$

не приводящійся къ функціи трехъ извѣстныхъ, если между величинами $b_1$, $b_2$, $b_3$ существуютъ различныя.

Когда $b_1$, $b_2$, $b_3$ всѣ различны, случай этотъ не заключается ни въ одномъ изъ предыдущихъ. Но если случай В. А. Стеклова надлежащимъ образомъ обобщить, указанный сейчасъ будетъ выводиться изъ него, какъ предѣльный, подобно тому, какъ третій случай Клебша выводится изъ второго.

Дѣйствительно, замѣчая, что, каковы бы ни были постоянныя $A$ и $B$, разсматриваемыя дифференціальныя уравненія отъ замѣны $T$ на

$$T + A(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + B(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

не мѣняются, условія (1) можемъ замѣнить слѣдующими:

$$b_1 = b + \sigma c_2 c_3,$$

$$b_2 = b + \sigma c_3 c_1,$$

$$b_3 = b + \sigma c_1 c_2.$$

$$a_1 = a + \sigma^2 c_1 (c_2 - c_3)^2 = a + \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1},$$

$$a_2 = a + \sigma^2 c_2 (c_3 - c_1)^2 = a + \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2},$$

$$a_3 = a + \sigma^2 c_3 (c_1 - c_2)^2 = a + \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3},$$

изъ которыхъ три послѣднихъ вслѣдствіе произвольности постояннаго $a$ равносильны такимъ:

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3}.$$

Чтобы перейти теперь къ указанному мною случаю, должно предположить, что $c_2 - c_1$ и $c_3 - c_1$ дѣлаются безконечно-малыми, а $b$ и $\sigma$— безконечно-большими, при томъ — такъ, что $b_1$, $b_2$, $b_3$ остаются неизмѣнными.

Въ заключеніе замѣчу, что послѣдніе два случая могутъ быть замѣнены однимъ, который характеризуется условіями:

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3},$$

$$\frac{b_2 - b_3}{c_1} + \frac{b_3 - b_1}{c_2} + \frac{b_1 - b_2}{c_3} = 0.$$

# Исчисленіе положенія.

**А. И. Богуславскаго** *).

## Глава I.

*Алгебраическія дѣйствія надъ величинами направленія и величинами положенія.*

§ 1. Понятіе о векторѣ. Алгебраическія дѣйствія съ векторами.

Прямолинейный путь, пройденный точкою при ея перемѣщеніи изъ положенія $A$ въ положеніе $B$, называется *векторомъ* и обозначается черезъ $AB$, гдѣ $A$ зовется *началомъ*, а $B$—*концомъ* вектора.

Векторы различаются длиною и направленіемъ въ пространствѣ. Чтобы различать между собою векторы на плоскости, необходимо принять нѣкоторый векторъ $AM$ за начальный, *векторъ единицу*. Тогда всякій векторъ плоскости можетъ быть обозначенъ черезъ $a_\varphi$, гдѣ $a$ *длина* вектора, а $\varphi$ *уголъ* вектора, отсчитываемый отъ начальнаго направленія $AM$ противъ часовой стрѣлки.

Векторъ плоскости $a_\varphi$ выражаетъ собою комплексное количество съ модулемъ $a$ и амплитудою $\varphi$, если считать начальный векторъ $AM$ равнымъ положительной единицѣ.

Чтобы въ пространствѣ различать векторы по ихъ длинѣ и направленію, необходиме принять нѣкоторую плоскость за начальную и въ ней выбрать начальный векторъ $AM$. Уголъ $\alpha$, заключенный между проекціей нѣкотораго вектора на начальную плоскость и векторомъ $AM$, условимся считать за *долготу* вектора; уголъ же $\beta$, составленный тою же проекціей съ самимъ векторомъ, за *широту* вектора, обозначая его черезъ $a_{\alpha,\beta}$.

Векторы, имѣющіе равныя абсолютныя длины и одинаковое направленіе, считаются *равными* между собою.

*) Читано авторомъ въ засѣданіи Харьковскаго Математическаго Общества 18 марта 1893 года.

Правило сложенія векторовъ. Чтобы сложить два вектора, надо къ концу одного вектора приложить начало другого, сохраняя ихъ направленія; сумма выразится векторомъ, соединяющимъ начало перваго съ концомъ второго вектора

$$AB+BC=AC. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Такъ какъ векторъ можно перенести параллельно самому себѣ, не мѣняя его длины и направленія, то форм. (1) позволяетъ складывать любые два вектора пространства.

Сложеніе векторовъ обладаетъ свойствами перемѣстительности и сочетательности, какъ это видно изъ слѣдующихъ формулъ, которыя легко провѣрить.

$$AB+BC=BC+AB=AC; \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(AB+BC)+CD=AB+(BC+CD)=AD. \quad \ldots\ldots (3)$$

Когда сложенные векторы совпадаютъ съ направленіемъ начальнаго вектора, правило сложенія векторовъ совпадаетъ съ правиломъ сложенія положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, выражаемыхъ слагаемыми векторами.

По формулѣ (1),

$$AB+BA=0 \quad \text{или} \quad AB=-BA, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

т. е. векторъ мѣняетъ свой знакъ на обратный при перемѣщеніи его начала и конца.

Разсматривая вычитаніе, какъ дѣйствіе обратное сложенію, мы можемъ изъ форм. (1) получить слѣдующую формулу вычитанія:

$$AC-AB=BC, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

откуда имѣемъ:

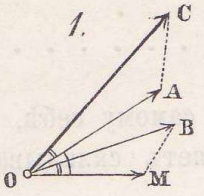
Правило вычитанія векторовъ. Разность двухъ векторовъ съ общимъ началомъ выражается векторомъ, заключеннымъ между ихъ концами и направленнымъ отъ конца вычитаемаго къ концу уменьшаемаго вектора.

Изъ форм. (5) слѣдуетъ, что *разность двухъ векторовъ не зависитъ отъ положенія ихъ общаго начала, а исключительно отъ положенія ихъ концовъ.*

Правило умноженія векторовъ. Чтобы векторъ $OA=a_\alpha$ умножить на векторъ $OB=b_\beta$, надо изъ вектора множимаго $OA$ получить векторъ произведеніе $OC$ помощію тѣхъ операцій, при помощи которыхъ векторъ множитель $OB$ полученъ изъ начальнаго вектора $OM$, равнаго единицѣ.

Такъ какъ (черт. 1) векторъ $OB$ получается изъ начальнаго вектора единицы $OM$, удлиннивъ его въ отношеніи $(b:1)$ и повернувъ его на уголъ $\beta$, то чтобы получить векторъ произведеніе

$$OC = OA \cdot OB,$$




достаточно построить на $OA$ треугольникъ $OAC$, подобный треугольнику $OMB$ и сходственно съ нимъ расположенный, и тогда

$$OC = (a \cdot b)_{\alpha+\beta},$$

такъ какъ длина и уголъ вектора $OC$ равны соотвѣтственно длинѣ и углу искомаго произведенія. Итакъ:

$$a_\alpha \cdot b_\beta = (a \cdot b)_{\alpha+\beta} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Изъ форм. (6) умноженія слѣдуютъ формулы *дѣленія векторовъ*, *возведенія вектора въ степень и извлеченія корня изъ вектора*, а именно:

$$a_\alpha : b_\beta = (a:b)_{\alpha-\beta}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$(a_\alpha)^m = (a^m)_{m\alpha}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\sqrt[m]{a_\alpha} = \left[\sqrt[m]{a}\right]_{\frac{\alpha+2k\pi}{m}} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Послѣдними двумя формулами намъ не придется ниже пользоваться.

Умноженіе векторовъ, какъ это видно изъ форм. (6), обладаетъ свойствами *перемѣстительности* и *сочетательности*. Кромѣ того умноженіе подчиняется закону *распредѣлительности*, а именно

$$(a_\alpha + b_\beta) \cdot c_\gamma = (a \cdot c)_{\alpha+\gamma} + (b \cdot c)_{\beta+\gamma} \cdot \quad \ldots\ldots (10)$$

Дѣйствительно, умноженіе на векторъ $c_\gamma$ можно разсматривать какъ два послѣдовательныя дѣйствія: умноженіе на векторъ $c_0$ и умноженіе на векторъ $1_\gamma$. Возьмемъ три вектора, составляющіе собою стороны треугольника; каждый изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ остальныхъ. Дѣйствіе умноженія на $c_0$ соотвѣтствуетъ удлиненію сторонъ этого треугольника въ отношеніи $(c:1)$, а умноженіе на $1_\gamma$ вращаетъ весь треугольникъ на уголъ $\gamma$. При томъ и другомъ дѣйствіи распредѣлительность, очевидно, имѣетъ мѣсто.

Такъ какъ векторы измѣряются комплексными числами, то формулы (1—10) выражаютъ собою также и свойства алгебраическихъ дѣйствій надъ комплексными количествами.

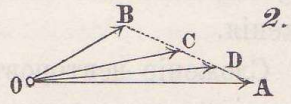
§ 2. Основаніе метода барицентрическаго исчисленія А. Ф. Мебіуса.

А. Ф. Мебіусъ въ своемъ Der barycentrische Calcul разсматриваетъ различныя точки пространства, какъ центры тяжести нѣсколькихъ матеріальныхъ точекъ съ соотвѣтственными массами, что даетъ ему особую систему аналитической геометріи.

При помощи теоріи векторовъ методъ барицентрическаго исчисленія можетъ быть развитъ весьма просто.

Разность двухъ векторовъ съ общимъ началомъ зависитъ исключительно отъ положенія концовъ. Сумму двухъ векторовъ также можно представить въ такомъ видѣ, чтобы она не зависѣла отъ положенія ихъ общаго начала, а исключительно отъ положенія ихъ концовъ.

Пусть $C$ средина линіи $AB$ (черт. 2), а точка $D$ взята такъ, что



2.

$$BD : DA = a : b,$$

гдѣ $a$ и $b$ произвольныя числа. Тогда, разсматривая треугольникъ $AOB$, какъ половину параллелограмма, имѣемъ

$$OA + OB = 2OC; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

а такъ какъ $b \cdot BD = a \cdot DA$, то, замѣнивъ векторы $BD$ и $DA$ разностями по форм. (5), будемъ имѣть

$$b \cdot (OD - OB) = a \cdot (OA - OD),$$

откуда

$$a \cdot OA + b \cdot OB = (a + b) \cdot OD. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Послѣдняя формула включаетъ въ себѣ предыдущую, какъ частный случай.

Въ формулахъ (11) и (12) за начало векторовъ $O$ можетъ быть принята вполнѣ произвольная точка пространства. Кромѣ того возможенъ цѣлый рядъ другихъ формулъ, не измѣняющихъ своего значенія, если *общее* начало *всѣхъ* векторовъ, въ нихъ входящихъ, перенести въ произвольную точку пространства. На этомъ основаніи въ Алгебрѣ плоскости и пространства мы предложили *) разсматривать отдѣльно *системы векторовъ, съ произвольнымъ но общимъ началомъ.*

Опредѣленіе. *Системою мѣрныхъ точекъ, или системою векторовъ положенія, условимся называть систему векторовъ, имѣющихъ произвольное общее начало.*

При векторѣ положенія всегда или имѣется на лицо или подразумѣвается числовой коэффиціентъ.

*) *А. Богуславскій.* Алгебра плоскости и пространства или исчисленіе положенія. Москва. 1891. § 3.

Векторъ положенія мы будемъ обозначать большою буквою, соотвѣтствующей положенію его конца, а дѣйствительный коэффиціентъ, при немъ стоящій, малою буквою. Согласно съ этимъ формулы (11), (12) и (5) напишутся такъ:

$$A+B=2C; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$aA+bB=(a+b).D; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$B-A=AB. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Послѣдняя формула позволяетъ намъ переходить отъ векторовъ положенія къ векторамъ съ опредѣленнымъ началомъ и концомъ.

Опредѣленіе. *Векторъ съ опредѣленнымъ началомъ и концомъ мы будемъ называть векторомъ направленія* въ отличіе отъ вектора положенія.

Сложеніе векторовъ положенія (ф. 14) подчиняется законамъ перемѣстительности и сочетательности, ибо, выбравъ опредѣленное начало, мы получимъ формулу, содержащую векторы направленія, а сложеніе векторовъ направленія подчиняется и тому и другому закону (ф. 2, 3).

Изъ формулы (14) слѣдуетъ правило вычитанія векторовъ положенія, а именно, конецъ вектора разности дѣлитъ внѣшнимъ образомъ отрѣзокъ между концами векторовъ уменьшаемаго и вычитаемаго въ отношеніи обратномъ отношенію ихъ коэффиціентовъ:

$$aA-bB=(a-b).E.$$

Если $b$ стремится къ значенію $a$, то въ предѣлѣ мы получаемъ

$$aA-aB=0.E,$$

но по формулѣ (15)

$$aA-aB=a.BA.$$

Итакъ, если сумма коэффиціентовъ двухъ векторовъ положенія стремится къ нулю, то положеніе конца вектора, равнаго ихъ алгебраической суммѣ, удаляется въ безконечность, а коэффиціентъ суммы стремится къ нулю, но въ то же самое время та же алгебраическая сумма въ предѣлѣ равна вектору направленія, соединяющему конецъ вычитаемаго съ концомъ уменьшаемаго и взятому съ ихъ общимъ коэффиціентомъ.

Принявъ двѣ произвольныя точки прямой за основныя, мы можемъ для всякой третьей точки прямой найти надлежащія числа, удовлетворяющія форм. (14); числа эти и суть *барицентрическія координаты* точки прямой.

Равнымъ образомъ, принявъ три точки плоскости, или четыре точки пространства за основныя, мы можемъ получить барицентрическія координаты точекъ плоскости и пространства.

§ 3. Значеніе векторовъ положенія въ геометріи.

Для лучшаго уясненія формулы (14) приведемъ нѣсколько простѣйшихъ примѣровъ.

1. Пусть $K$, $L$, $M$ суть средины сторонъ треугольника $ABC$, а $G$ центръ его тяжести. Примѣняя формулу (14) послѣдовательно, имѣемъ:

$$A+B+C=(A+B)+C=(B+C)+A=(C+A)+B=$$
$$=2K+C=2L+A=2M+B=3G.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *медіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ $G$ и дѣлятся въ ней въ отношеніи $1:2$.*

2. Пусть $K$, $L$, $M$, $N$, $P$ и $Q$ суть средины сторонъ и діагоналей четыреугольника $ABCD$; тогда изъ формулъ

$$A+B+C+D=4E=$$
$$=(A+B)+(C+D)=(A+D)+(B+C)=(A+C)+(B+D)=$$
$$=2(K+L)=2(M+N)=2(P+Q)$$

слѣдуетъ, что *линіи, соединяющія средины противоположныхъ сторонъ четыреугольника, и линія, соединяющая средины его діагоналей, пересѣкаются всѣ три въ одной точкѣ и дѣлятся въ ней пополамъ.*

3. *Пусть $E$, $F$, $G$ и $H$ суть центры тяжести тѣхъ четырехъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый ограниченъ парою смежныхъ сторонъ даннаго четыреугольника $ABCD$ и одною изъ его діагоналей.*

Тогда, вычитая одну изъ другой формулы

$$A+B+C=3E \quad \text{и} \quad A+B+D=3F,$$

имѣемъ

$$3EF=CD,$$

т. е. линія $EF$ параллельна $CD$ и составляетъ отъ нея одну треть; слѣдовательно, *четыреугольникъ $EFGH$ подобенъ данному четыреугольнику $ABCD$.*

4. *Пусть точки $D$ и $E$ дѣлятъ боковыя стороны даннаго треугольника $ABC$ въ одномъ и томъ же отношеніи;* тогда, вычитая равенства

$$aA+bB=(a+b)D \quad \text{и} \quad aA+bC=(a+b)E$$

имѣемъ

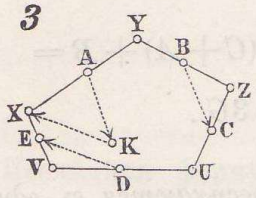
$$bBC=(a+b)DE,$$

т. е. *линія $DE$ параллельна основанію треугольника и относится къ нему по длинѣ, какъ $b:(a+b)$.*

5. *Требуется построить пятиугольникъ, если дано положеніе срединъ всѣхъ его сторонъ.* Обозначимъ положеніе искомыхъ вершинъ пятиугольника черезъ $X$, $Y$, $Z$, $U$ и $V$. Согласно даннымъ (черт. 3):

$$X+Y=2A;\ Y+Z=2B;\ Z+U=2C;\ U+V=2D;\ V+X=2E.$$

*3*




Умножимъ второе и четвертое уравненія на $(-1)$ и сложимъ затѣмъ всѣ уравненія; тогда послѣ сокращенія на два имѣемъ

$$X=A+BC+DE,$$

т. е., приложивъ къ вектору съ концомъ въ точкѣ $A$ векторы $BC$ и $DE$, мы получаемъ непосредственно положеніе вершины $X$ искомаго пятиугольника. Указанный способъ рѣшенія задачи остается въ силѣ для произвольнаго многоугольника съ *нечетнымъ* числомъ сторонъ.

6. *Пусть $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и $F$ суть средины послѣдовательныхъ сторонъ нѣкотораго шестиугольника*; тѣмъ же самымъ пріемомъ легко обнаружить, что

$$AB+CD+EF=0,$$

т. е. линіи $AB$, $CD$ и $EF$ по длинѣ и направленію равны тремъ сторонамъ нѣкотораго треугольника. Свойство это легко обобщается на средины сторонъ любого многоугольника съ *четнымъ* числомъ вершинъ. Отсюда ясно, почему не достаточно для построенія многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ знать положеніе срединъ его сторонъ; средины сторонъ такого многоугольника не могутъ быть взяты произвольно, ибо положеніе одной изъ нихъ опредѣляется остальными.

7. Для четыреугольника зависимость между срединами его сторонъ выражается векторнымъ равенствомъ:

$$AB+CD=0,$$

которое показываетъ, что *средины сторонъ четыреугольника служатъ вершинами параллелограмма.*

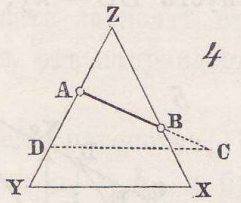
Преимущество разсмотрѣнныхъ только что выводовъ заключается въ томъ, что въ нихъ не входитъ никакихъ другихъ символовъ, кромѣ обозначеній положенія точекъ и простѣйшихъ операцій построенія.

§ 4. Примѣры рѣшенія задачъ методомъ эквиполленцъ Д. Беллавитиса.

Рѣшеніе векторныхъ уравненій составляетъ собою предложенный Д. Беллавитисомъ методъ, который онъ назвалъ теоріей эквиполленцъ, употребляя для краткости выраженіе „Equipollenze“ вмѣсто названія, предложеннаго имъ ранѣе „Equazioni geometriche“. Приведемъ два примѣра рѣшенія этимъ способомъ задачъ на построеніе.

1. *Построить треугольникъ, если даны длины двухъ его сторонъ a и c и положеніе двухъ точекъ A и B, дѣлящихъ стороны a и b въ данныхъ отношеніяхъ.*

Пусть (чер. 4) $XY = c$; $YZ = a$; $ZX = b$; длина послѣдней стороны не извѣстна. Если дано отношеніе, въ которомъ точка $A$ дѣлитъ сторону $a$, то извѣстны и длины $f$ и $g$ отрѣзковъ $YA$ и $AZ$. Поэтому, принявъ направленіе $AB$ за начальное, мы, на основаніи даннаго условія



4

$$XB = m\,BZ,$$

можемъ написать слѣдующее векторное уравненіе:

$$XY + YA + AB = m(BA + AZ),$$

или

$$c_u + f_v + AB = m(BA + g_v),$$

гдѣ неизвѣстны только два угла $u$ и $v$, составляемые сторонами $XY$ и $YZ$ искомаго треугольника съ линіей $AB$.

Отсюда имѣемъ:

$$c_u + (f - mg)\,1_v = (m+1)\,BA.$$

Обозначивъ длину $(f - mg)$ черезъ $h$, а $(m+1)\,BA$ черезъ $CA$, мы получимъ:

$$c_u + h_v = CA.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что для опредѣленія искомыхъ угловъ $u$ и $v$ достаточно построить на $CA$ треугольникъ по даннымъ тремъ его сторонамъ.

2. *Построить треугольникъ $ABX$ по данному его основанію $AB$, по углу $\beta$ при основаніи и по линейному соотношенію между длинами двухъ его боковыхъ сторонъ.*

Обозначимъ черезъ $x$ и $y$ длины боковыхъ сторонъ искомаго треугольника и черезъ $u$ уголъ стороны $x$ съ основаніемъ $AB$. Пусть данное линейное соотношеніе выражается равенствомъ

$$y = mx + n.$$

Тогда мы можемъ написать два уравненія:

$$x_u - y_\beta = AB; \qquad y_\beta = (mx + n)\,1_\beta;$$

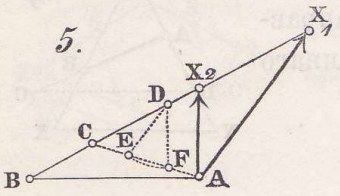
изъ нихъ, обозначивъ $AB + n_\beta$ черезъ $AC$, мы имѣемъ:

$$x_u - mx_\beta = AC, \text{ или } 1_u - m_\beta = \frac{1}{x}\,AC.$$

Въ послѣднемъ уравненіи неизвѣстны только длина одной изъ сторонъ треугольника и уголъ. Согласно этому имѣемъ слѣдующее построеніе задачи.

Примемъ (черт. 5) произвольную линію равную $DE$ за единицу и и пусть $BC = n_\beta$; тогда линія $AC$ извѣстна по длинѣ и направленію.

5.




Отложивъ $CD$ равную $m_\beta$, строимъ треугольники $CDE$ и $CDF$ по двумъ сторонамъ и по углу, лежащему противъ одной изъ нихъ. Линіи $DE$ и $DF$ даютъ направленія стороны $AX$, лежащей въ искомомъ треугольникѣ противъ даннаго угла $\beta$. Задача имѣетъ два рѣшенія.

Въ заключеніе приведемъ доказательство теоремы Птоломея при помощи метода эквиполленцъ. Возьмемъ векторное тождество:

$$DC.(DB - DA) + DB.(DA - DC) + DA.(DC - DB) = 0.$$

Замѣнивъ въ немъ разности векторовъ однимъ векторомъ, имѣемъ:

$$DC.AB + DB.CA + DA.BC = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Это равенство обнаруживаетъ замѣчательное свойство сторонъ и діагоналей всякаго четыреугольника, а именно: *три вектора, выражающіеся произведеніями паръ противоположныхъ сторонъ и діагоналей четыреугольника, составляютъ собою три стороны нѣкотораго треугольника.*

Если въ частномъ случаѣ вершины этого треугольника совпадаютъ съ прямой линіей, то равенство (16) обращается въ числовое и при этомъ углы векторовъ, выраженныхъ произведеніями

$$DA.BC \quad \text{и} \quad DC.AB,$$

равны между собою. Дѣля каждое изъ этихъ произведеній на $DC.BC$, мы заключаемъ, что углы векторовъ частныхъ

$$DA:DC \quad \text{и} \quad AB:BC$$

также равны между собою. Послѣднее показываетъ, что равенство (16), какъ числовое, имѣетъ мѣсто тогда, когда вершины четыреугольника лежатъ на окружности круга (или же на прямой линіи).

§ 5. Два особые вида умноженія векторовъ.

Общее алгебраическое произведеніе двухъ векторовъ

$$a_\varphi . b_\psi = ab.\mathrm{cs}(\varphi + \psi) + i\,ab.\mathrm{sn}(\varphi + \psi)$$

распадается естественно на двѣ части, дѣйствительную и мнимую. Каждую изъ этихъ частей можно разсматривать какъ результатъ особой

операціи надъ векторами. Такія двѣ операціи зависятъ отъ направленія вектора, принятаго за положительную единицу. Но если взять произведеніе

$$a_{-\varphi} . b_{\psi} = ab . \mathrm{cs}(\psi - \varphi) + i\, ab . \mathrm{sn}(\psi - \varphi) , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

то абсолютныя значенія дѣйствительной и мнимой части зависятъ отъ разности угловъ $\psi$ и $\varphi$ и, слѣдовательно, не зависятъ отъ направленія вектора единицы.

Условимся полученіе множителя при $i$ въ правой части равенства (17) разсматривать какъ особую операцію надъ векторами $a_{\varphi}$ и $b_{\psi}$ и будемъ ее называть *геометрическимъ умноженіемъ*, обозначая его такимъ образомъ:

$$ab . \mathrm{sn}(\psi - \varphi) = a_{\varphi} * b_{\psi} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Равнымъ образомъ полученіе перваго члена второй части равенства (17) мы будемъ также разсматривать какъ особую операцію надъ векторами $a_{\varphi}$ и $b_{\psi}$, называя ее *числовымъ умноженіемъ* и обозначая ее такъ.

$$ab . \mathrm{cs}(\psi - \varphi) = a_{\varphi} \circ b_{\psi} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Произведенія (18) и (19) зависятъ исключительно отъ длины векторовъ $a_{\varphi}$ и $b_{\psi}$ и величины угла между ними.

Оба разсматриваемыя дѣйствія обладаютъ свойствомъ *распредѣлительности*, что непосредственно слѣдуетъ изъ распредѣлительности совокупности ихъ въ произведеніи (17). Кромѣ того геометрическое умноженіе, какъ видно изъ формулы (18), обладаетъ слѣдующими свойствами:

$$a_{\varphi} * b_{\varphi} = 0 ; \quad a_{\varphi} * b_{\varphi + \frac{\pi}{2}} = ab ; \quad a_{\varphi} * b_{\psi} = - b_{\psi} * a_{\varphi} . \quad . \quad (20)$$

Числовое умноженіе обладаетъ свойствами (фор. 19):

$$a_{\varphi} \circ b_{\varphi} = ab ; \quad a_{\varphi} \circ b_{\varphi + \frac{\pi}{2}} = 0 ; \quad a_{\varphi} \circ b_{\psi} = b_{\psi} \circ a_{\varphi} . \quad . \quad . \quad (21)$$

Такимъ образомъ, *числовое умноженіе подчиняется закону перемѣстительности, геометрическое же умноженіе ему не подчиняется.*

На основаніи формулъ (20) и (21), разложивъ множители на слагаемыя по двумъ опредѣленнымъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, можно замѣнять какъ числовое, такъ и геометрическое произведенія произведеніемъ алгебраическимъ.

Геометрическое умноженіе Германъ Гюнтеръ Грассманъ въ своемъ Ausdehnungslehre зоветъ внѣшнимъ [1]) умноженіемъ, а числовое — внутреннимъ.

---

[1]) Ранѣе Г. Г. Грассмана понятіе о внѣшнемъ умноженіи установлено было его отцомъ и Saint-Venant'омъ.

§ 6. Значеніе геометрическаго умноженія въ геометріи.

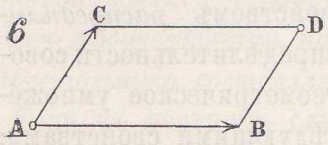
Пусть векторъ $a_\varphi$ движется своимъ началомъ вдоль вектора $b_\psi$, оставаясь параллельнымъ своему начальному положенію. Будемъ называть $a_\varphi$ *образующимъ*, а $b_\psi$ *направляющимъ* векторомъ и условимся считать площадь параллелограмма, описываемую образующимъ векторомъ, за *положительную* въ томъ случаѣ, если онъ движется *влѣво* относительно своего начальнаго положенія (для наблюдателя смотрящаго вдоль по его направленію).

Легко видѣть, что площадь параллелограмма, заключенная между векторами $a_\varphi$ и $b_\psi$, выражается (фор. 18) геометрическимъ произведеніемъ

$$a_\varphi * b_\psi . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Всѣ свойства геометрическаго умноженія (форм. 20) при этомъ имѣютъ мѣсто, а именно: площадь параллелограмма равна нулю, если уголъ между векторами равенъ нулю; она выражается произведеніемъ $a.b$, если этотъ уголъ прямой, и наконецъ, *площадь параллелограмма мѣняетъ свой знакъ на обратный при замѣнѣ образующаго вектора направляющимъ и обратно.*

Дѣйствительно, (чер. 6) если $AB = a_\varphi$ и $AC = b_\psi$, то $AB$ описываетъ площадь параллелограмма $ABDC$, перемѣщаясь влѣво относительно своего направленія, а $AC$ описываетъ ту-же площадь, двигаясь вправо относительно своего направленія.



*6*

Ниже мы увидимъ, что различіе между значеніями направляющаго и образующаго векторовъ вполнѣ соотвѣтствуетъ различію между началомъ и концомъ вектора при установленіи его знака.

Геометрическое произведеніе трехъ векторовъ направленія, не лежащихъ въ одной плоскости,

$$a_\varphi * b_\psi * c_\zeta$$

*выражаетъ собою объемъ параллелепипеда* съ соотвѣтствующими тремя ребрами.

Можно обнаружить, что всѣ свойства геометрическаго умноженія имѣютъ мѣсто при вычисленіи объема параллелепипеда по тремъ его ребрамъ [1]), но мы не будемъ на этомъ останавливаться, а замѣтимъ только, что умноженіе трехъ векторовъ пространства подчиняется закону сочетательности

$$a_\varphi * b_\psi * c_\zeta = (a_\varphi * b_\psi) * c_\zeta = a_\varphi * (b_\psi * c_\zeta).$$

---

[1]) *А. Богуславскій.* Алгебра плоскости и пространства. Москва. 1891. § 29.

# Отъ Харьковекаго Математичеекаго Общества.

Въ 1829 году нашъ знаменитый соотечественникъ Николай Ивановичъ Лобачевскій повѣдалъ въ первый разъ міру о результатахъ своихъ глубокихъ научныхъ изслѣдованій изъ теоріи параллельныхъ прямыхъ линій. Сила генія этого ученаго открыла цѣлую научную систему тамъ, гдѣ великіе умы многихъ предшествующихъ столѣтій видѣли только пробѣлъ въ стройномъ ученіи, завѣщанномъ намъ классическою Греціей.

Идеи Лобачевскаго не скоро были оцѣнены, но, какъ истинно доброе сѣмя, они все-таки не пропали безслѣдно. Усиліями знаменитыхъ ученыхъ западной Европы, направившихъ свои мысли на тотъ-же трудный предметъ, частію независимо отъ Лобачевскаго, частію-же вслѣдствіе знакомства съ основаніями его ученія, публикованными имъ въ 1840 году въ Берлинѣ, всѣ сомнѣнія, тяготѣвшія ранѣе надъ пониманіемъ основъ Геометріи, окончательно разъяснены, и этой наукѣ дано было такое широкое развитіе, возможности котораго нельзя было предвидѣть за нѣсколько десятковъ лѣтъ ранѣе.

Если не считать великаго Гаусса, несомнѣнно имѣвшаго всѣ средства, чтобы проложить этотъ новый научный путь и, однако, на него не выступившаго, то имя Лобачевскаго должно быть поставлено первымъ въ ряду названныхъ созидателей науки.

Въ настоящее время заслуги Лобачевскаго получили признаніе всего ученаго міра. Ученые стараго и новаго свѣта чтятъ его, какъ глубокомысленнаго научнаго изобрѣтателя, переводятъ его сочиненія и отводятъ имъ видное мѣсто въ общей сокровищницѣ современныхъ теоретическихъ знаній.

Уроженецъ сѣверо-восточнаго края, казанецъ по воспитанію, профессоръ, бывшій много лѣтъ ректоромъ Казанскаго университета, Лобачевскій долженъ быть почтенъ за свои заслуги прежде всего на своей родинѣ. Физико-Математическое Общество при Казанскомъ университетѣ охотно приняло на себя этотъ долгъ и рѣшилось сдѣлать починъ самаго достойнаго воздаянія памяти Лобачевскаго ко дню столѣтней годовщины его рожденія, 22 октября 1893 года. Съ Высочайшаго разрѣшенія оно открыло подписку для образованія фонда имени Лоба-

чевскаго съ цѣлью учредить премію за лучшія ученыя сочиненія изъ той области, въ которую его идеи внесли столько свѣта.

Тотъ же самый долгъ лежитъ, однако, на всѣхъ, кому дороги интересы науки и успѣхи человѣческаго знанія.

Харьковское Математическое Общество, раздѣляя вполнѣ побужденія своихъ казанскихъ собратій по наукѣ, пожелало и съ своей стороны оказать возможное содѣйствіе тому же предпріятію. Съ этою цѣлью оно постановило:

1) Устроить 22 октября особое публичное засѣданіе, посвященное воспоминанію жизни и трудовъ Лобачевскаго.

2) Открыть подписку на фондъ Лобачевскаго въ средѣ своихъ членовъ.

3) Обратиться чрезъ Господина Попечителя Харьковскаго Учебнаго Округа во всѣ высшія и среднія учебныя заведенія округа съ приглашеніемъ къ подпискѣ на тотъ же предметъ.

Взносы для препровожденія Комитету по составленію фонда имени Лобачевскаго въ Казани просятъ высылать въ Харьковъ, Математическому Обществу, въ университетъ.

Предсѣдатель Общества *К. Андреевъ.*

# ОБЪЯВЛЕНІЯ.

## ОБЪ ИЗДАНІИ

### Трудовъ Отдѣленія физическихъ наукъ Императорскаго Общества любителей Естествознанія.

Труды Отдѣленія выходятъ томами по два выпуска въ каждомъ. Издаются подъ редакціей предсѣдателя и секретаря отдѣленія. Получать можно въ книжномъ магазинѣ А. А. Ланга (Москва, Кузнецкій мостъ). Первый и второй томы (по одному выпуску) по два рубля; третій, четвертый и пятый томы (по два выпуска) по три рубля за томъ съ пересылкою.

# ОБЪ ИЗДАНІИ
# УНИВЕРСИТЕТСКИХЪ ИЗВѢСТІЙ

(Императорскаго Университета Св. Владиміра въ Кіевѣ)

**въ 1893 г.**

Цѣль настоящаго изданія остается прежнею: доставлять членамъ университетскаго сословія свѣдѣнія, необходимыя имъ по отношеніямъ ихъ къ Университету, и знакомить публику съ состояніемъ и дѣятельностію Университета и различныхъ его частей.

Согласно съ этою цѣлью, въ Университетскихъ Извѣстіяхъ печатаются:

1. Протоколы засѣданій университетскаго Совѣта.
2. Новыя постановленія и распоряженія по Университету.
3. Свѣдѣнія о преподавателяхъ и учащихся, списки студентовъ и постороннихъ слушателей.
4. Обозрѣнія преподаванія по полугодіямъ.
5. Программы, конспекты и библіографическіе указатели для учащихся.
6. Библіографическіе указатели книгъ, поступающихъ въ университетскую библіотеку и въ студенческій ея отдѣлъ.
7. Свѣдѣнія и изслѣдованія, относящіяся къ устройству и состоянію ученой, учебной, административной и хозяйственной части Университета.
8. Свѣдѣнія о состояніи коллекцій, кабинетовъ, музеевъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ заведеній Университета.
9. Годичные отчеты по Университету.
10. Отчеты о путешествіяхъ преподавателей съ учеными цѣлями.
11. Разборы диссертацій, представляемыхъ для полученія ученыхъ степеней, соисканія наградъ, pro venia legendi и т. п., а также и самыя диссертаціи.
12. Рѣчи, произносимыя на годичномъ актѣ и въ другихъ торжественныхъ собраніяхъ.
13. Вступительныя, пробныя, публичныя лекціи и полные курсы преподавателей.
14. Ученые труды преподавателей и учащихся.
15. Матеріалы и переводы научныхъ сочиненій.

Указанныя статьи распредѣляются на двѣ части—1)—оффиціальную и протоколы, отчеты и т. п. 2)—неоффиціальную (статьи научнаго содержанія) съ отдѣлами—*критико-библіографическимъ*, посвященнымъ критическому обозрѣнію выдающихся явленій ученой литературы (русской и иностранной), и *научной хроники* заключающимъ въ себѣ извѣстія о дѣятельности ученыхъ обществъ, состоящихъ при университетѣ, и т. п. свѣдѣнія. Въ *прибавленіяхъ* печатаются матеріалы, указатели библіотеки, списки, таблицы метеорологическихъ наблюденій и т. п.

---

**Университетскія Извѣстія** въ 1893 году будутъ выходить въ концѣ каждаго мѣсяца, книжками, содержащими въ себѣ до 20 печатныхъ листовъ. Цѣна за 12 книжекъ **Извѣстій** безъ пересылки **шесть рублей пятьдесятъ копѣекъ**, а съ пересылкой **семь рублей**. Въ случаѣ выхода приложеній (большихъ сочиненій), о нихъ будетъ объявлено особо. Подписчики **Извѣстій**, при выпискѣ приложеній, пользуются уступкою 20%.

Подписка и заявленія объ обмѣнѣ изданіями принимаются въ канцеляріи Правленія Университета.

Студенты Университета Св. Владиміра платятъ за годовое изданіе **Университетскихъ Извѣстій** 3 руб. сер., а студенты прочихъ Университетовъ 4 руб.; продажа отдѣльныхъ книжекъ не допускается.

Гг. Иногородные могутъ обращаться съ требованіями своими къ коммиссіонеру Университета Н. Я. Оглобину въ С.-Петербургѣ, на Малую-Садовую, № 4-й и въ Кіевѣ, на Крещатикѣ, въ книжный магазинъ его же, или непосредственно въ Правленіе Университета Св. Владиміра.

Редакторъ *В. Иконниковъ.*

# ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

„Извѣстія", издаваемыя подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

„Извѣстія" раздѣляются на два отдѣла.

1. Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2. Второй отдѣлъ содержитъ:

a) Лѣтопись физико-математическаго общества (протоколы засѣданій, извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годичные отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

b) Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

c) Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ „Извѣстіяхъ" могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены физико-математическаго общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія безплатно.

**Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „Извѣстія" въ годъ 3 руб. (съ доставкою и пересылкою).**

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-Математическаго Общества проф. **А. В. Васильевымъ** и секретаремъ Общества **М. С. Сегелемъ** (Университетъ), а также въ Казани книжными магазинами **А. А. Дубровина** (Гостинный дворъ № 1) и **Н. Я. Башмакова** (Воскресенская, домъ Болдырева), въ С.-Петербургѣ у **А. С. Суворина, М. М. Стасюлевича, Н. Л. Риккера** и **Н. П. Карбасникова.**

Первую серію „Извѣстій" составляютъ восемь томовъ собранія протоколовъ засѣданій секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

# „ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ"

составляетъ продолженіе основаннаго въ 1884 г. въ Кіевѣ

**профессоромъ В. П. Ермаковымъ**

# „ЖУРНАЛА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ".

Съ 1886 г. по 15-е іюня 1891 г. „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики" издавался подъ редакціею Э. К. Шпачинскаго въ г. Кіевѣ, а съ 15-го іюня 1891 года, подъ тою-же редакціею

**издается въ г. Одессѣ.**

Журналъ былъ рекомендованъ: Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, учительскихъ институтовъ и семинарій и городскихъ училищъ; Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній — для военно-учебныхъ заведеній. Ученымъ Комитетомъ при Святѣйшемъ Синодѣ журналъ былъ одобренъ для духовныхъ семинарій и училищъ.

Въ теченіе каждаго учебнаго полугодія (семестра) выходитъ 12 нумеровъ журнала въ формѣ брошюръ.

**Подписная цѣна съ пересылкой:**

На годъ—всего 24 №№ . . . . 6 руб. | На полугодіе—всего 12 №№ . . . 3 руб.

(Книжнымъ магазинамъ 5% уступки).

Учителя и учительницы низшихъ училищъ, всѣ учащіеся и вообще всѣ частныя лица, не имѣющія возможности вносить полной платы, при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторой редакціи, могутъ подписываться на журналъ на льготныхъ условіяхъ, а именно:

За годъ . . . . . 4 руб. | За полугодіе . . . . . 2 руб.

Менѣе чѣмъ на одно полугодіе подписка не принимается.

**Разсрочка подписной платы допускается по соглашенію.**

За перемѣну адреса уплачивается 10 коп.

Подписчики, желающіе внести подписную плату какъ наложенный платежъ на одинъ изъ текущихъ №№ журнала, доплачиваютъ 20 коп.

Комплекты №№ за всѣ прежніе семестры (отъ I-го до XIII-го вкл.), сброшюрованные по 12 №№ въ книги, продаются по 2 р. 50 к., а льготнымъ подписчикамъ и книгопродавцамъ—по 2 р. за каждый.

Отдѣльные №№ продаются: одиночные по 30 к., двойные по 50 к.

Всѣ читатели журнала приглашаются быть его сотрудниками и корреспондентами.

Сотрудничество не даетъ права на даровой экземпляръ журнала.

Чертежи къ статьямъ должны быть возможно просты, тщательно исполнены на отдѣльныхъ бумажкахъ (а не въ текстѣ рукописи) и возможно малыхъ размѣровъ.

Отдѣльные оттиски помѣщенныхъ въ журналѣ статей изготовляются на счетъ авторовъ, при условіи своевременнаго о томъ извѣщенія редакціи.

За помѣщеніе объявленій на оберткахъ журнала уплачивается:

| | |
|---|---|
| За всю страницу . . . . . 6 руб. | За $^1/_4$ страницы . . . . 1 руб. 50 коп. |
| „ $^1/_2$ страницы . . . . . 3 „ | „ $^1/_6$ „ . . . . 1 „ 20 „ |
| „ $^1/_3$ „ . . . . . 2 „ | „ $^1/_8$ „ . . . . 1 „ — „ |

При повтореніи объявленій взимается всякій разъ половина этой платы.

**Адресъ: Г. Одесса, Редакція „Вѣстника Оп. Физ. и Элем. Математики".**

Объемъ параллелепипеда мы будемъ считать положительнымъ въ томъ случаѣ, когда онъ описанъ движеніемъ положительной площади, совпадающей съ одной изъ его граней, по направленію ея положительной нормали.

Посмотримъ, какъ на основаніи свойствъ геометрическаго умноженія оно можетъ быть выполнено.

Возьмемъ три взаимно перпендикулярныя основныя направленія, обозначенныя цифрами 1, 2 и 3; каждый изъ множителей $a_\varphi$ и $b_\psi$ будемъ представлять себѣ въ видѣ произведенія вектора единицы на отвлеченное число. Пусть оба множителя лежатъ въ плоскости 12 и пусть направленіе 1 то начальное, отъ котораго отсчитываются углы. Тогда

$$a_\varphi * b_\psi = ab \,.\, 1_\varphi * 1_\psi = ab \,.\, (\mathrm{cs}\varphi + i\,\mathrm{sn}\varphi) * (\mathrm{cs}\psi + i\,\mathrm{sn}\psi) \,.$$

По уравненіямъ (20), опуская множитель $i$, имѣемъ:

$$a_\varphi * b_\psi = ab \,.\, (\mathrm{cs}\varphi * \mathrm{sn}\psi + \mathrm{sn}\varphi * \mathrm{cs}\psi) \,.$$

Если мы желаемъ въ этой формулѣ замѣнить геометрическія произведенія алгебраическими, то намъ необходимо предварительно оба члена, стоящіе въ скобкахъ, привести къ такому порядку множителей, чтобы обѣ площади, ими выражаемыя, разсматривались, какъ образованныя движеніемъ векторовъ, совпадающихъ съ направленіемъ 1; поэтому согласно форм. (20):

$$a_\varphi * b_\psi = ab\,(\mathrm{cs}\varphi \,.\, \mathrm{sn}\psi - \mathrm{cs}\psi \,.\, \mathrm{sn}\varphi) \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Разсмотримъ вычисленіе объема параллелепипеда съ ребрами $a_\varphi$, $b_\psi$ и $c_\zeta$. Разложимъ эти три вектора по направленіямъ 1, 2 и 3 и будемъ обозначать знакомъ $|\quad|^*$ геометрическое умноженіе суммъ векторовъ. Тогда, вынося абсолютныя длины векторовъ за скобки, имѣемъ:

$$a_\varphi * b_\psi * c_\zeta = abc \,. \begin{vmatrix} \mathrm{cs}(a\,1) + \mathrm{cs}(a\,2) + \mathrm{cs}(a\,3) \\ \mathrm{cs}(b\,1) + \mathrm{cs}(b\,2) + \mathrm{cs}(b\,3) \\ \mathrm{cs}(c\,1) + \mathrm{cs}(c\,2) + \mathrm{cs}(c\,3) \end{vmatrix}^*$$

При перемноженіи суммъ векторовъ въ этой формулѣ, согласно формулы (20) нельзя брать множителей изъ одной колонны; а для того, чтобы можно было замѣнить геометрическія произведенія алгебраическими, необходимо предварительно привести всѣ отдѣльныя произведенія къ одинаковому порядку множителей въ порядкѣ направленій (1, 2, 3), руководствуясь правиломъ знаковъ (форм. 20). Отсюда ясно, что объемъ разсматриваемаго параллелепипеда выразится формулой:

$$a_\varphi * b_\psi * c_\zeta = abc \begin{vmatrix} \cos(a1) & \cos(a2) & \cos(a3) \\ \cos(b1) & \cos(b2) & \cos(b3) \\ \cos(c1) & \cos(c2) & \cos(c3) \end{vmatrix}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

гдѣ при $abc$ имѣемъ множителемъ детерминантъ, аналогичный множителю формулы (24) и названный *Штаудтомъ* синусомъ трегранна̀го угла.

§ 7. Геометрическія произведенія векторовъ положенія.

Такъ какъ $OA * OB$ выражаетъ собою удвоенную площадь треугольника $OAB$, то *геометрическое произведеніе двухъ векторовъ положенія*

$$A * B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

*выражаетъ собою удвоенную площадь треугольника съ основаніемъ $AB$ и вершиною въ произвольной точкѣ пространства.*

Опредѣленіе. Геометрическое произведеніе двухъ векторовъ направленія $a_\varphi * b_\psi$ мы будемъ называть *площадью направленія*, или *векторомъ площадью*, или иначе *мѣрною площадью.*

Геометрическое произведеніе двухъ векторовъ положенія $A$ и $B$ мы будемъ называть *площадью положенія*, или *мѣрною частью прямой.*

Векторъ-площадь не мѣняетъ своего значенія при перемѣщеніи въ положеніе параллельное начальному.

Векторъ положенія (26) не мѣняетъ своего значенія при перемѣщеніи отрѣзка $AB$ по той прямой, на которой онъ расположенъ.

Такъ какъ $OA * OB * OC$ выражаетъ собою (§ 6) шестикратный объемъ пирамиды $OABC$, то *геометрическое произведеніе трехъ векторовъ положенія*

$$A * B * C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

*выражаетъ собою шестикратный объемъ пирамиды съ основаніемъ $ABC$ и вершиною въ произвольной точкѣ пространства.*

Опредѣленіе. Геометрическое произведеніе трехъ векторовъ направленія $a_\varphi * b_\psi * c_\zeta$ мы будемъ называть *мѣрнымъ объемомъ*, или же просто *объемомъ.*

Геометрическое произведеніе трехъ векторовъ положенія $A * B * C$ мы будемъ называть *объемомъ положенія*, или *мѣрною частью плоскости.*

Мѣрный объемъ не мѣняетъ своего значенія при произвольномъ перемѣщеніи въ пространствѣ, если сохраняется его абсолютное значеніе и знакъ.

Мѣрная часть плоскости $A * B * C$ не мѣняетъ своего значенія при перемѣщеніи площади $ABC$ вдоль плоскости, на которой она лежитъ, при сохраненіи ея абсолютнаго значенія и знака.

*Геометрическое произведеніе четырехъ векторовъ положенія*

$$A_*B_*C_*D \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

*мы будемъ называть мѣрною частью пространства и разумѣть подъ нимъ шестикратный объемъ пирамиды* $ABCD$.

Два геометрическихъ произведенія $A_*B$ и $C_*D$ могутъ быть равны только тогда, когда отрѣзки $AB$ и $CD$ лежатъ на одной прямой и имѣютъ одинаковую длину и знакъ, ибо иначе для начала въ произвольной точкѣ пространства величина и направленіе площадей, ими выраженныхъ, будутъ различны.

Два геометрическихъ произведенія $A_*B_*C$ и $D_*E_*F$ могутъ быть равны только тогда, когда площади $ABC$ и $DEF$ лежатъ на одной плоскости и имѣютъ одинаковое абсолютное значеніе и знакъ, ибо иначе для начала въ произвольной точкѣ пространства объемы, ими выражаемые, будутъ различны.

Два геометрическихъ произведенія $A_*B_*C_*D$ и $E_*F_*G_*H$ равны тогда, когда объемы, ими выражаемые, имѣютъ одинаковое абсолютное значеніе и знакъ.

§ 8. Тождественныя преобразованія суммъ геометрическихъ произведеній.

Сложеніе мѣрныхъ частей одной и той же прямой, мѣрныхъ частей одной и той же плоскости, а также сложеніе мѣрныхъ объемовъ и мѣрныхъ частей пространства, совпадаетъ съ алгебраическимъ сложеніемъ чиселъ, выражающихъ собою мѣру этихъ величинъ.

Равнымъ образомъ сложеніе векторовъ-площадей, параллельныхъ между собою, совпадаетъ съ сложеніемъ чиселъ, ихъ измѣряющихъ, такъ какъ параллельныя векторы-площади различаются между собою только абсолютнымъ значеніемъ и знакомъ площади.

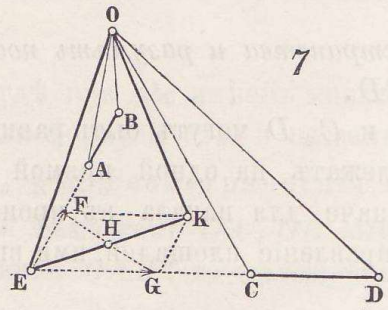
*Сумма произвольныхъ векторовъ-площадей можетъ быть замѣнена однимъ векторомъ-площадью.* Пусть векторы-площади $a_*b$ и $c_*d$ имѣютъ различное направленіе; возьмемъ на линіи пересѣченія плоскостей $(ab)$ и $(cd)$ векторъ $m$ произвольной длины и выберемъ векторы $p$ и $q$ такъ, чтобы $a_*b = m_*p$ и $c_*d = m_*q$. Тогда по закону распредѣлительности имѣемъ:

$$a_*b + c_*d = m_*p + m_*q = m_*(p+q) = m_*n \ldots (29)$$

*Сумма нѣсколькихъ мѣрныхъ частей прямыхъ, лежащихъ на одной и той же плоскости, можетъ быть замѣнена одною мѣрною частью прямой.* Если $E$ есть точка пересѣченія прямыхъ $AB$ и $CD$, то взявъ векторы $EF$ и $EG$ соотвѣтственно равные $AB$ и $CD$, мы будемъ имѣть (§ 7):

$$A_*B + C_*D = E_*F + E_*G = E_*(F+G) = 2E_*H. \ldots (30)$$

Если въ этой формулѣ взять площади положенія съ вершинами въ опредѣленной точкѣ плоскости $O$ (черт. 7), то мы получаемъ правило сложенія площадей треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину, а именно:



7

$$OAB + OCD = 2OEH = OEK \ldots (31)$$

Въ случаѣ, *когда слагаемыя мѣрныя части прямыхъ параллельны между собою, сумма ихъ равна по длинѣ ихъ алгебраической суммѣ, параллельна слагаемымъ и дѣлитъ разстояніе между ними въ отношеніи обратномъ ихъ длинѣ.*

Пусть $AB \parallel CD$; тогда векторы $AB$ и $CD$ могутъ отличаться одинъ отъ другого только числовымъ дѣйствительнымъ множителемъ:

$$CD = mAB \ldots (32)$$

На основаніи основнаго свойства геометрическаго умноженія ($A_*A=0$) мы можемъ написать:

$$A_*B + C_*D = A_*(B-A) + C_*(D-C),$$

и согласно (32) имѣемъ:

$$A_*B + C_*D = A_*(B-A) + C_*m(B-A) = (A+mC)_*(B-A).$$

Замѣнивъ сумму $A+mC$ черезъ $(m+1)E$, получаемъ:

$$A_*B + C_*D = (m+1)E_*(B-A) = E_*[(B-A)+(D-C)],$$

или иначе

$$A_*B + C_*D = E_*(F-E) = E_*F, \ldots (33)$$

гдѣ $EF = AB + CD$, что мы и хотѣли обнаружить.

§ 9. Продолженіе. Векторъ-площадь, какъ разность площадей положенія.

Пусть двѣ мѣрныя части прямыхъ $A_*B$ и $C_*D$ равны по длинѣ, одинаково направлены и лежатъ на двухъ параллельныхъ прямыхъ. Если выполнить вычитаніе $C_*D$ изъ $A_*B$ по формулѣ (33), то точка $E$ удалится въ безконечность, а длина мѣрной части прямой, черезъ нее проходящей, обратится въ нуль.

Но съ другой стороны, такъ какъ

$$B-A = D-C,$$

то мы имѣемъ:

$$A_*B - C_*D = A_*(B-A) - C_*(D-C) = (A-C)_*(B-A),$$

или

$$A_*B - C_*D = CA_*AB. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Итакъ, *векторъ-площадь можетъ быть выражена какъ разность двухъ равныхъ и параллельныхъ мѣрныхъ частей прямыхъ*, аналогично тому, какъ векторъ направленія выражается разностью двухъ мѣрныхъ точекъ.

На основаніи форм. (34), взявъ сумму мѣрныхъ частей прямыхъ, совпадающихъ по длинѣ и положенію съ двумя парами противоположныхъ сторонъ параллелограмма, мы имѣемъ:

$$A_*B + B_*C + C_*D + D_*A = 2ABCD, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

т. е. сумма мѣрныхъ частей прямыхъ, совпадающихъ по длинѣ и положенію съ периметромъ параллелограмма, выражаетъ собою удвоенную его площадь.

Теорему эту можно обобщить на любой многоугольникъ. Раскроемъ скобки въ произведеніи

$$AB_*AC = (B-\mathrm{A})_*(C-A) = B_*C + C_*A + A_*B = 2ABC. \quad (36)$$

Разбивъ произвольный многоугольникъ діагоналями изъ его вершины на треугольники, мы получаемъ, сложивъ рядъ формулъ (36):

$$A_*B + B_*C + \ldots + L_*M + M_*A = 2AB \ldots LM. \quad . \quad . \quad (37)$$

При этомъ, чтобы быть въ согласіи съ опредѣленіемъ знака площади, выраженной параллелограммомъ (§ 6), слѣдуетъ считать площадь-векторъ положительною тогда, когда мѣрныя части прямыхъ, совпадающихъ съ ея периметромъ, огибаютъ площадь, имѣя ее влѣво относительно своего направленія.

Слѣдствіе I. Чтобы сложить двѣ площади, нѣкоторая часть контуровъ которыхъ конгруентна, достаточно приложить ихъ другъ къ другу такъ, чтобы эта часть контура, совпадая по положенію, имѣла противоположное направленіе. Въ алгебраической суммѣ получится площадь, ограниченная всѣмъ контуромъ, за исключеніемъ совпавшей части, которую слѣдуетъ считать взаимно уничтоженною.

Такъ напримѣръ, площадь съ пересѣкающимся контуромъ (черт. 8) $ABCDEA$, согласно опредѣленію знака площади, частію положительна $(ABC)$, а частію отрицательна $(CDE)$. По правилу, только что высказанному, ее можно замѣнить равновеликою ей положительною пло-

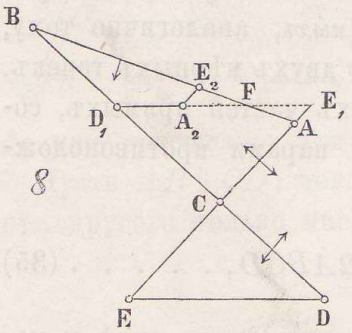
щадью $BD_1A_2E_2$; для этого достаточно эту площадь перегнуть дважды, какъ это видно изъ чертежа, а именно:

$$ABCDEA = ABC + CDE = ABC + CD_1E_1 = BD_1FE_1AB,$$

или

$$ABCDEA = BD_1F + FA_2E_2 = BD_1A_2E_2.$$

Слѣдствіе II. Площадь, описанная на плоскости поступательнымъ движеніемъ нѣкоторой части прямой, не зависитъ отъ пути, по которому она переходитъ изъ начальнаго положенія $a_1$ въ конечное $a_n$.



8

Дѣйствительно, если послѣдовательныя положенія прямой будутъ $a_1$, $a_2$, $a_3 \ldots a_n$, то площадь параллелограмма $(a_n - a_1)$ равна алгебраической суммѣ параллелограммовъ $(a_2 - a_1)$, $(a_3 - a_2)$ и т. д., вслѣдствіе тождества:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1. \quad . \quad . \quad (38)$$

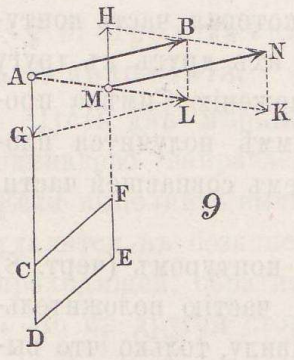
Иначе, если прямая, описавъ своимъ поступательнымъ движеніемъ на плоскости рядъ параллелограммовъ, возвращается къ своему начальному положенію, то алгебраическая сумма всѣхъ параллелограммовъ равна нулю.

Слѣдствіе III. Такъ какъ равенство (38) остается въ силѣ и для пространства, то отсюда слѣдуетъ, что векторная сумма параллелограммовъ, описанныхъ въ пространствѣ прямою $a$, равна нулю, если эта прямая, описавъ ихъ своимъ поступательнымъ движеніемъ, возвращается къ своему начальному положенію.

§ 10. Продолженіе. Сумма мѣрной части прямой съ векторомъ-площадью ей параллельной. Сумма мѣрныхъ частей прямыхъ въ пространствѣ.

Пусть даны на плоскости мѣрная часть прямой $A_*B$ и площадь-векторъ, выраженная параллелограммомъ $CDEF$ (чер. 9). Тогда, согласно форм. (34), мы имѣемъ:

$$A_*B + CDEF = A_*B + C_*D + E_*F =$$
$$= A_*L + E_*F = M_*N, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$



9

причемъ изъ того же равенства имѣемъ:

$$C_*D + E_*F = M_*N + B_*A.$$

Если площадь-векторъ и мѣрная часть прямой параллельны между собою, то, сохраняя направленіе площади-вектора, ихъ можно совмѣстить съ одною плоскостью и затѣмъ выполнить сложеніе по форм. (39). Отсюда имѣемъ теорему:

*Придать къ мѣрной части прямой нѣкоторую площадь-векторъ ей параллельную значитъ перенести мѣрную часть прямой параллельно самой себѣ на такое разстояніе, чтобы она описала при этомъ перемѣщеніи векторъ-площадь, равновеликую данной.*

Формула аналогичная формулѣ (39) для векторовъ и мѣрныхъ точекъ слѣдующая:

$$A + CD = A + AB = A + (B - A) = B,$$

гдѣ векторы $AB$ и $CD$ равны, т. е. придать къ мѣрной точкѣ векторъ направленія значитъ перенести ее по направленію вектора на его длину.

Теорема. *Сумма нѣсколькихъ мѣрныхъ частей прямыхъ въ пространствѣ можетъ быть всегда замѣнена одною мѣрною частью прямой и однимъ векторомъ-площадью, или же двумя мѣрными частями прямыхъ, не лежащихъ въ одной плоскости.*

Дана сумма мѣрныхъ частей прямыхъ:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

любую пару мѣрныхъ частей прямыхъ можно замѣнить одною мѣрною частью прямой и одною площадью-векторомъ, пользуясь слѣдующей формулой

$$A_* B + C_* D = A_* B + A_* E - A_* E + C_* D,$$

гдѣ векторы $AE$ и $CD$ равны между собою; далѣе, пользуясь формулами (30) и (34), имѣемъ:

$$A_* B + C_* D = 2A_* F + CDEA. \quad \ldots\ldots (41)$$

Примѣнивъ эту формулу послѣдовательно къ слагаемымъ суммы (40), мы можемъ свести всю сумму къ одной мѣрной прямой $a$, сложенной съ суммою векторовъ-площадей, которую по форм. (29) можно замѣнить одною площадью-векторомъ $m$; и такъ

$$\sum a_k = a + m. \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Если же къ этой суммѣ примѣнить вновь формулу (41), воспользовавшись ею въ обратномъ порядкѣ, то мы получимъ:

$$\sum a_k = a + b \ldots\ldots\ldots (43)$$

гдѣ $a$ и $b$ мѣрныя части прямыхъ, вообще не лежащихъ въ одной плоскости. Двѣ мѣрныя части прямыхъ, не лежащихъ въ плоскости, не могутъ быть замѣнены одною мѣрною частью прямой, ибо примѣненіе форм. (30) требуетъ вынесенія за скобку общаго множителя, совпадающаго по положенію съ точкою пересѣченія слагаемыхъ.

§ 11. Продолженіе. Сложеніе мѣрныхъ частей плоскостей.

Даны двѣ произвольныя мѣрныя части плоскости $A_*B_*C$ и $D_*E_*F$; возьмемъ на линіи пересѣченія этихъ плоскостей произвольную мѣрную часть прямой $K_*L$ и выберемъ точки $M$ и $N$ такъ, чтобы (§ 7)

$$K_*L_*M=A_*B_*C \quad \text{и} \quad K_*L_*N=D_*E_*F.$$

Тогда имѣемъ формулу

$$A_*B_*C+D_*E_*F=K_*L_*M+K_*L_*N=K_*L_*(M+N),$$

и обозначая $M+N$ черезъ $2P$, получаемъ

$$A_*B_*C+D_*E_*F=2K_*L_*P. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Если слагаемыя мѣрныя части плоскостей параллельны между собою, то можно выполнить ихъ сложеніе, пользуясь формулою:

$$A_*B_*C+D_*E_*F=A_*(B-A)_*(C-A)+D_*(E-D)_*(F-D);$$

но такъ какъ двѣ параллельныя площади-векторы $AB_*AC$ и $DE_*DF$ могутъ различаться между собою только числовымъ коэффиціентомъ, то положивъ

$$DE_*EF=mAB_*AC \quad \text{и} \quad A+mD=(m+1)K,$$

имѣемъ:

$$A_*B_*C+D_*E_*F=(m+1)K_*(B-A)_*(C-A) \quad . \quad . \quad (45)$$

т. е. сумма двухъ мѣрныхъ частей параллельныхъ плоскостей равна мѣрной части плоскости, параллельной слагаемымъ, и проходитъ черезъ точку $K$, дѣлящую разстояніе между слагаемыми въ отношеніи обратномъ ихъ абсолютному значенію.

§ 12. Мѣрный объемъ, какъ разность мѣрныхъ частей плоскостей.

При $m=-1$ формула (45) даетъ намъ площадь равную нулю и удаленную въ безконечность. Но подвергнувъ ее преобразованію, аналогичному съ пріемомъ § 9, мы имѣемъ:

$$A_*B_*C-D_*E_*F=A_*(B-A)_*(C-A)-D_*(B-A)_*(C-A),$$

такъ такъ по условію $AB_*AC=DE_*DF$. Отсюда:

$$A_*B_*C-D_*E_*F=(A-D)_*(B-A)_*(C-A)=DA_*AB_*AC. \quad (46)$$

Итакъ, *мѣрный объемъ выражается разностью двухъ мѣрныхъ частей плоскостей, совпадающихъ съ двумя противоположными гранями параллелепипеда.*

Если въ формулѣ (46) раскрыть скобки, то мы получимъ

$$DA_*AB_*AC = 6DABC =$$
$$= A_*B_*C + D_*B_*A + D_*A_*C + D_*C_*B \ldots . \quad (47)$$

Итакъ: шестикратный мѣрный объемъ тетраэдра выражается суммою мѣрныхъ частей плоскостей, совпадающихъ съ гранями тетраэдра и взятыхъ въ такомъ порядкѣ, при которомъ сумма площадей-векторовъ, ими выраженныхъ, равна нулю.

Изъ формулы (47) можно вывести всѣ заключенія аналогичныя слѣдствіямъ § 9, какъ-то:

Объемъ, описанный площадью параллелограмма при ея поступательномъ движеніи въ пространствѣ, зависитъ только отъ ея начальнаго и конечнаго положенія. Приложить къ мѣрной части плоскости мѣрный объемъ значитъ перенести ее параллельно самой себѣ въ такое положеніе, чтобы объемъ ею описанный былъ равенъ прикладываемому мѣрному объему.

§ 13. Порядокъ геометрическихъ произведеній. Свойства геометрическихъ произведеній наивысшаго порядка.

Опредѣленія. *Число множителей, выраженныхъ векторами направленія или векторами положенія, называется порядкомъ геометрическаго произведенія.*

*Ближайшимъ основаніемъ системы пространственныхъ величинъ мы будемъ называть прямую, плоскость или пространство, смотря по тому, гдѣ расположены всѣ пространственныя величины.*

Величины положенія, которыя суть геометрическія произведенія векторовъ положенія, бываютъ четырехъ порядковъ, а именно:

1 пор.: $A$—векторъ положенія, или мѣрная точка.
2 пор.: $A_*B$—площадь положенія, или мѣрная часть прямой.
3 пор.: $A_*B_*C$—объемъ положенія, или мѣрная часть плоскости.
4 пор.: $A_*B_*C_*D$—мѣрная часть пространства.

Величины направленія, которыя суть геометрическія произведенія векторовъ направленія, могутъ быть представлены въ видѣ суммъ или разностей величинъ положенія. Они бываютъ трехъ порядковъ:

1 пор.: $AB = B - A$—векторъ направленія.
2 пор.: $AB_*AC = 2ABC = A_*B + B_*C + C_*A$—векторъ-площадь.
3 пор.: $AB_*AC_*AD = 6ABCD = C_*B_*A + D_*A_*B + D_*B_*C + D_*C_*A$—мѣрный объемъ.

Мѣрные объемы въ пространствѣ трехъ измѣреній не могутъ различаться направленіемъ, но для пространства четырехъ измѣреній послѣдняя формула должна быть названа векторомъ-объемомъ.

Опредѣленіе. *Независимыми пространственными величинами называется система величинъ, между которыми не существуетъ линейныхъ соотношенія.*

Наибольшія числа независимыхъ векторовъ направленія для прямой, плоскости и пространства суть соотвѣтственно одинъ, два и три; наибольшія числа независимыхъ векторовъ положенія для тѣхъ же основаній суть два, три и четыре.

Наибольшія числа независимыхъ мѣрныхъ частей прямыхъ, мѣрныхъ частей плоскостей и векторовъ-плоскостей для плоскости суть соотвѣтственно три, одна и одна; наибольшія числа независимыхъ тѣхъ же величинъ для пространства суть шесть, четыре и три.

Въ пространствѣ можетъ быть одинъ независимый мѣрный объемъ и одна независимая мѣрная часть пространства.

Опредѣленіе. *Геометрическое произведеніе, порядокъ котораго равенъ наибольшему числу независимыхъ векторовъ для даннаго основанія, называется высшимъ произведеніемъ.*

Величины высшаго порядка соотвѣтственно слѣдующія: для прямой — векторъ направленія и мѣрная часть прямой, для плоскости — векторъ-площадь и мѣрная часть плоскости, для пространства — мѣрный объемъ и мѣрная часть пространства.

Сложеніе величинъ высшаго порядка совпадаетъ съ алгебраическимъ сложеніемъ чеселъ, ихъ измѣряющихъ; на этомъ основаніи *геометрическія величины высшаго порядка можно разсматривать какъ представители отвлеченныхъ чиселъ, ихъ измѣряющихъ.*

§ 14. Плоскостное и пространственное геометрическія произведенія.

Геометрическое произведеніе на плоскости, содержащее въ себѣ число векторовъ, превышающее наибольшее число независимыхъ векторовъ, мы условимся называть *плоскостнымъ произведеніемъ*; подобное же произведеніе для пространства—*пространственнымъ произведеніемъ.*

Пусть $E$ есть точка пересѣченія двухъ прямыхъ, на которыхъ расположены геометрическія произведенія $A*B$ и $C*D$; тогда на основаніи свойствъ геометрическихъ произведеній, если $EF=AB$, то (§ 7)

$$A*B=A*(B-A)=E*(F-E)=E*(B-A),$$

а потому

$$(A*B)*(C*D)=E*(B-A)*E*(D-C),$$

или

$$(A*B)*(C*D)=E*(B*E*D+D*E*A+A*E*C+C*E*B).$$

Такъ какъ сумма, стоящая въ скобкахъ, высшаго порядка, то ее можно разсматривать какъ представительницу отвлеченнаго числа, пропор-

ціональнаго площади $ACBD$. Поэтому имѣемъ формулу, опредѣляющую собою *плоскостное произведеніе:*

$$(A * B) * (C * D) = (ACBD) \cdot E \ldots\ldots\ldots (48)$$

Такимъ образомъ, какъ геометрическое произведеніе двухъ мѣрныхъ точекъ выражаетъ собою положеніе прямой ихъ соединяющей, такъ геометрическое произведеніе двухъ мѣрныхъ частей прямыхъ можетъ служить для обозначенія положенія точки ихъ пересѣченія, что позволяетъ преобразовывать теоремы, выраженныя геометрическими произведеніями, на основаніи принципа взаимности.

Взявъ за начало векторовъ положенія въ формулѣ (48) точку $O$, лежащую внѣ плоскости $ACBD$, и обозначивъ векторы $OA$, $OB\ldots$ соотвѣтственно черезъ $a$, $b\ldots$, мы имѣемъ формулу, опредѣляющую собою *пространственное произведеніе* двухъ векторовъ-площадей

$$(a * b) * (c * d) = (acbd) \cdot e, \ldots\ldots\ldots (49)$$

гдѣ $e$ векторъ, совпадающій съ линіей пересѣченія плоскостей $(a * b)$ и $(c * d)$, а коэффиціентъ $(acbd)$ число, пропорціональное объему четыреугольной пирамиды съ боковыми ребрами $a$, $b$, $c$, $d$.

Пространственное произведеніе двухъ мѣрныхъ частей плоскостей и пространственное произведеніе мѣрной части плоскости на мѣрную часть прямой всегда могутъ быть приведены къ формуламъ:

$$(A * B * C) * (A * B * D) = (ABCD) \cdot A * B \ldots\ldots (50)$$

$$(A * B * C) * (A * D) = (ABCD) \cdot A, \ldots\ldots (51)$$

гдѣ $(ABCD)$ означаетъ число пропорціональное объему пирамиды.

Если перемножаемыя величины не имѣютъ общихъ множителей, то ихъ слѣдуетъ замѣнить равновеликими величинами такими, къ которымъ непосредственно можно было бы примѣнить формулы (50) и (51).

*Геометрическое умноженіе* имѣетъ важнѣйшія примѣненія въ вопросахъ *геометріи положенія*, тогда какъ *числовое умноженіе* примѣняется преимущественно въ вопросахъ *геометріи мѣры*. Въ слѣдующей главѣ мы займемся приложеніями того и другого умноженій.

## Глава II.

*Примѣненія къ геометріи аналитической и высшей, къ теоріи детерминантовъ и къ статикѣ.*

### § 15. Координаты направленія и координаты положенія. Декартовы координаты. Координаты однородныя.

Если взять на плоскости основной треугольникъ $A_1A_2A_3$, то положеніе всякой точки плоскости можетъ быть опредѣлено, какъ конецъ

нѣкотораго вектора положенія, равнаго суммѣ трехъ векторовъ положенія, имѣющихъ концы въ трехъ основныхъ точкахъ (§ 2).

Числовые коэффиціенты при трехъ основныхъ векторахъ положенія и будутъ *однородными координатами положенія точки.*

Если стороны основного треугольника $a_1$, $a_2$, $a_3$ разсматривать какъ мѣрныя части прямыхъ, то любую мѣрную часть прямой $m$, лежащую въ той же плоскости, можно выразить какъ сумму трехъ основныхъ частей прямыхъ, взятыхъ съ надлежащими коэффиціентами. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $M$ точка пересѣченія прямой $m$ съ прямою $a_3$; тогда можно взять $a_1$ и $a_2$ съ такими коэффиціентами (форм. 14 и 13), чтобы въ суммѣ получить прямую, проходящую черезъ точку $M$; а приложивъ къ послѣдней прямой мѣрную часть прямой $a_3$ съ соотвѣтственнымъ коэффиціентомъ, мы можемъ получить мѣрную часть прямой $m$ какъ алгебраическую сумму основныхъ прямыхъ.

Числовые коэффиціенты при $a_1$, $a_2$ и $a_3$ будутъ *координатами положенія мѣрной части прямой* $m$.

Если стороны $a_1$ и $a_2$ основного треугольника принять за векторы направленія, то всякій третій векторъ той же плоскости можетъ быть представленъ въ видѣ суммы векторовъ $a_1$ и $a_2$, взятыхъ съ опредѣленными коэффиціентами, которые и будутъ *координатами направленія разсматриваемаго вектора.*

Если принять $a_1 = a_2 = 1$, то числа, только что полученныя, будутъ декартовы координаты точки, совпадающей съ концомъ вектора.

Равнымъ образомъ, если взять въ пространствѣ основной тетраэдръ $A_1A_2A_3A_4$, то положеніе всякой точки пространства можетъ быть опредѣлено какъ положеніе мѣрной точки, выраженной суммою основныхъ мѣрныхъ точекъ, совпадающихъ съ вершинами тетраедра. Всякая мѣрная часть плоскости, произвольно взятая въ пространствѣ, точно также можетъ быть представлена какъ сумма мѣрныхъ частей плоскостей, выраженныхъ гранями основного тетраэдра.

Въ обоихъ случаяхъ числовые коэффиціенты при основныхъ слагаемыхъ будутъ *однородными координатами положенія точки, или плоскости.*

Всякая мѣрная часть прямой въ пространствѣ можетъ быть выражена суммою шести мѣрныхъ частей прямыхъ, совпадающихъ съ ребрами основного тетраэдра и взятыхъ съ опредѣленными числовыми коэффиціентами.

Пусть нѣкоторая мѣрная часть прямой $m$ встрѣчаетъ основаніе тетраэдра $A_2A_3A_4$ въ точкѣ $M$ и пусть $A_1$ вершина основного тетраэдра; назовемъ черезъ $MN$ проекцію прямой $m$ изъ точки $A_1$ на плоскость основанія.

Взявъ три боковыхъ ребра съ надлежащими коэффиціентами, мы можемъ получить въ суммѣ мѣрную часть прямой, совпадающую по положенію съ $A_1M$, а взявъ подобную же сумму трехъ реберъ основанія,

мы можемъ получить мѣрную часть прямой, совпадающую по положенію съ $MN$; наконецъ, взявъ полученныя только что двѣ прямыя съ соотвѣтственными коэффиціентами, мы можемъ представить заданную намъ мѣрную часть прямой $m$, какъ ихъ алгебраическую сумму.

Этимъ способомъ мы и можемъ всегда найти *шесть координатъ положенія мѣрной части прямой въ пространствѣ*, какъ коэффиціенты при основныхъ мѣрныхъ частяхъ прямыхъ.

Такъ какъ число независимыхъ векторовъ-линій и векторовъ-площадей въ пространствѣ равно тремъ, то всякій векторъ-линія, или же векторъ-площадь, можетъ выражаться суммою нѣкоторыхъ трехъ основныхъ векторовъ, совпадающихъ или съ ребрами, или же съ плоскостями трегранаго угла. Числовые коэффиціенты при основныхъ векторахъ и будутъ *координатами направленія вектора-линіи, или вектора площади.*

Если три основныхъ вектора взять равными единицѣ длины, то три координаты вектора-линіи будутъ декартовыми координатами точки, совпадающей съ концомъ вектора.

Отъ координатъ положенія мѣрной точки къ декартовымъ координатамъ можно перейти слѣдующимъ образомъ. Удалимъ мѣрныя точки $A_2$, $A_3$ и $A_4$ по направленію реберъ основного тетраэдра въ безконечность; тогда вмѣсто векторовъ положенія (§ 2) мы будемъ имѣть три вектора направленія, приложенные къ мѣрной точкѣ $A_1$; они и будутъ тремя осями декартовой системы съ началомъ $A_1$.

§ 16. Преобразованіе координатъ положенія и направленія.

Если даны координаты нѣсколькихъ пространственныхъ элементовъ (точекъ, прямыхъ или плоскостей), то координаты любаго пространственнаго элемента, ими опредѣляемаго, могутъ быть найдены при помощи геометрическаго умноженія.

Обратимся къ частному примѣру и для простоты вычисленія возьмемъ точки, лежащія на ребрахъ основного тетраэдра, а именно:

$$2A=A_1+A_2;\ 3B=2A_2+A_3;\ 5C=3A_3+2A_1;\ 7D=4A_4+3A_1. \quad (52)$$

Перемноживъ эти уравненія по два, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} 6A*B &= 2A_1*A_2+A_1*A_3+A_2*A_3 \\ 15C*B &= 4A_1*A_2+2A_1*A_3-6A_2*A_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (53)$$

т. е. координаты положенія мѣрныхъ частей прямыхъ $AB$ и $CB$ относительно основныхъ мѣрныхъ частей прямыхъ: $A_1A_2$, $A_1A_3$, $A_1A_4$, $A_2A_3$, $A_2A_4$, $A_3A_4$ будутъ соотвѣтственно:

$$2, 1, 0, 1, 0, 0;\quad 4, 2, 0, -6, 0, 0.$$

Перемноживъ уравненія (52) по три, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} 30A*B*C &= 6A_1*A_2*A_3+2A_2*A_3*A_1=8A_1*A_2*A_3\\ 42A*B*D &= 8A_1*A_2*A_4+4A_1*A_3*A_4+4A_2*A_3*A_4+3A_1*A_2*A_3 \end{aligned}\right\}\quad(54)$$

т. е. координаты положенія мѣрныхъ частей плоскостей $ABC$ и $ABD$ относительно основныхъ мѣрныхъ частей плоскостей: $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_2$, $A_2A_3A_4$ будутъ соотвѣтственно:

$$8,\ 0,\ 0,\ 0;\quad 3,\ 4,\ -8,\ 4.$$

Перемноживъ между собою всѣ четыре уравненія (52), получаемъ:

$$210A*B*C*D=32A_1*A_2*A_3*A_4\quad\ldots\ldots\quad(55)$$

т. е. отношеніе

$$ABCD:A_1A_2A_3A_4=16:105:$$

Пользуясь плоскостнымъ и пространственнымъ произведеніями (§ 14), можно совершить обратный переходъ отъ системъ уравненій (54) къ уравненіямъ (53) и (52).

Перемноживъ геометрически уравненія (54), мы имѣемъ:

$$1260(ABCD)\,A*B=32\,(A_1A_2A_3A_4)\,(2A_1*A_2+A_1*A_3+A_2*A_3);$$

выраженіе это, за выключеніемъ множителя (55), тождественно съ первымъ изъ уравненій (53).

Перемноживъ геометрически уравненія (53), мы получаемъ:

$$90(ABC)\,B=8(A_1A_2A_3)\,(2A_2+A_3);$$

выраженіе это, за выключеніемъ множителя (54), тождественно со вторымъ изъ уравненій (52).

Тотъ же самый результатъ мы можемъ получить, умноживъ второе изъ уравненій (53) на второе уравненіе (54), а именно:

$$630(ABCD)\,B=32(A_1A_2A_3A_4)\,(2A_2+A_3);$$

при этомъ общимъ множителемъ вошло выраженіе (55).

Наконецъ, изъ предыдущихъ формулъ не трудно найти и координаты направленія любого вектора, опредѣляемаго положеніемъ данныхъ точекъ (52). Найдемъ координаты вектора направленія $CB$ и координаты площади-вектора $ABD$.

Для этого замѣнимъ въ формулахъ (53) и (54) векторы $A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ на основаніи векторныхъ тождествъ:

$$A_2A_3 = A_2A_1 + A_1A_3,$$

$$A_2A_3A_4 = A_1A_2A_3 + A_1A_3A_4 + A_1A_4A_2.$$

Тогда мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} 15CB &= 10A_1A_2 - 4A_1A_3, \\ 42ABD &= 7A_1A_2A_3 + 8A_1A_3A_4 - 4A_1A_4A_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (56)$$

т. е. координаты направленія вектора $CB$ при основныхъ векторахъ $A_1A_2$, $A_1A_3$, $A_1A_4$ суть: $10, -4, 0$, а координаты вектора-площади $ABD$ при основныхъ векторахъ $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_2$ суть: $7, 8, -4$.

§ 17. Обозначеніе построеній перваго порядка.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что помощію геометрическаго умноженія можно опредѣлять положеніе прямыхъ и плоскостей, если дано положеніе точекъ, черезъ которыя они проходятъ; и обратно, положеніе точки пересѣченія и линіи пересѣченія можетъ быть найдено помощію того же дѣйствія. Отсюда вытекаетъ слѣдующее положеніе.

*Всякое построеніе перваго порядка выражается при помощи повторенія нѣсколькихъ геометрическихъ умноженій.*

Разсмотримъ слѣдующее линейное построеніе. Дано положеніе двухъ точекъ:

$$mM = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

$$nN = b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3;$$

требуется построить точку $P$, опредѣляемую равенствомъ

$$pP = a_1b_1A_1 + a_2b_2A_2 + a_3b_3A_3. \quad \ldots \quad (57)$$

Докажемъ, что искомая точка $P$ лежитъ на прямой, опредѣляемой слѣдующимъ линейнымъ построеніемъ:

$$[(A_1 * M) * (A_3 * G) * A_2] * [(A_1 * N) * (A_2 * G) * A_3] * A_1, \quad \ldots \quad (58)$$

гдѣ $G$ есть центръ тяжести основного треугольника, т. е.

$$3G = A_1 + A_2 + A_3.$$

Составивъ произведенія $A_1 * M$ и $A_3 * G$, имѣемъ:

$$mA_1 * M = a_2 A_1 * A_2 + a_3 A_1 * A_3,$$

$$3A_3 * G = \quad A_3 * A_1 + \quad A_3 * A_2.$$

Поэтому, обозначивъ черезъ $q$ удвоенную площадь основного треугольника, получаемъ:

$$3m(A_1 * M) * (A_3 * G) = q(a_2 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3).$$

Умноживъ обѣ части этой формулы на $A_2$, мы имѣемъ, обозначивъ $3m : q$ черезъ $r$:

$$r(A_1 * M) * (A_3 * G) * A_2 = a_2 A_1 * A_2 + a_3 A_3 * A_2.$$

Докончивъ тѣмъ же путемъ вычисленіе формулы (58), мы получаемъ, отбрасывая общій числовой множитель:

$$a_2 b_2 A_2 * A_1 + a_3 b_3 A_3 * A_1 . . . . . (58')$$

Умноживъ равенство (57) на $A_1$, мы получаемъ тотъ же результатъ, а потому прямая $PA_1$ совпадаетъ по положенію съ прямою (58), что мы и желали обнаружить.

Изъ приведеннаго примѣра ясно значеніе формулъ, выражающихъ собою геометрическое построеніе перваго порядка.

§ 18. Формулы теоремъ высшей геометріи.

Изъ предыдущаго параграфа можно заключить a priori о важномъ значеніи геометрическаго умноженія для геометріи положенія, въ которой первое мѣсто принадлежитъ методу проектированія.

Обратимся къ основнымъ теоремамъ высшей геометріи. Возьмемъ два ряда мѣрныхъ точекъ:

$$A + xB; \qquad A' + mxB'.$$

При одинаковомъ значеніи $x$ формулы эти выражаютъ собою пару точекъ двухъ рядовъ, находящихся въ однозначномъ соотвѣтствіи. Если перемножить обѣ формулы геометрически другъ на друга, то получимъ формулу мѣрной части прямой:

$$A * A' + xB * A' + mxA * B' + mx^2 B * B' . . . . . (59)$$

Если въ этомъ выраженіи давать $x$ всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, то мы будемъ имѣть систему прямыхъ, опредѣленныхъ по длинѣ и положенію.

Легко видѣть, что черезъ каждую точку плоскости проходитъ не болѣе двухъ прямыхъ системы (59), а потому она представляетъ собою *пучекъ прямыхъ второго класса.*

Умножимъ выраженіе (59) геометрически на мѣрную точку $M$; если послѣдняя совпадаетъ съ одной изъ прямыхъ системы (59), то полученное геометрическое произведеніе обратится въ нуль (форм. 27) и мы будемъ имѣть:

$$A_* A'_* M + xB_* A'_* M + mxA_* B'_* M + mx^2 B_* B'_* M = 0.$$

Послѣднее уравненіе числовое (§ 13) и изъ него можно найти вообще два значенія числа $x$. Подставивъ ихъ въ формулу (59), мы найдемъ двѣ линіи нашей системы, проходящія черезъ точку $M$.

Въ частномъ случаѣ, когда $B_* B' = 0$, т. е. когда ряды находятся въ такомъ положеніи, что пара ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ совпадаетъ съ точкою ихъ пересѣченія, мы вмѣсто (59) получаемъ формулу

$$A_* A' + x(B_* A' + mA_* B'). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Формула эта выражаетъ собою систему прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $A_* A'$ и $B_* A' + mA_* B'$. Отсюда имѣемъ извѣстную теорему о *рядахъ перспективныхъ.*

Теоремы взаимныя будутъ выражаться формулами вполнѣ аналогичными предыдущимъ.

§ 19. Условія совпаденія точки съ прямою и съ плоскостью.

*Условія, чтобы три точки совпадали съ прямой, или чтобы четыре точки совпадали съ плоскостью, весьма просто выражаются* (форм. 27 и 28) *формулами:*

$$A_* B_* X = 0; \qquad A_* B_* C_* X = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Формулы эти имѣютъ много примѣненій. Подставимъ въ нихъ вмѣсто $A$, $B$ и т. д. ихъ выраженія черезъ основныя мѣрныя точки; тогда, сокративъ на общій множитель, имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ x_1 & x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

*Формулы эти представляютъ собою уравненія прямой и плоскости въ однородныхъ координатахъ.*

Если обозначить черезъ $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, $x$, $y$ декартовы координаты точекъ $A$, $B$, $X$, то положеніе точки $A$, при началѣ координатъ въ точкѣ $O$, выразится формулой:

$$A = O + x_1 + y_1,$$

гдѣ $O$ мѣрная точка, а $x_1$ и $y_1$ векторы.

Возьмемъ за начало вектора положенія $O$ точку, лежащую на перпендикулярѣ къ плоскости $xy$ на разстояніи единицы отъ точки $O$; тогда, перейдя отъ геометрическихъ произведеній къ алгебраическимъ, получимъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Детерминантъ этотъ представляетъ собою *въ декартовыхъ координатахъ уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ точки* $(x_1, y_1)$ *и* $(x_2, y_2)$.

Кромѣ того уравненія (61) могутъ выражать собою такія измѣненія фигуръ, при которыхъ три точки фигуры лежатъ на одной прямой, или четыре точки на одной плоскости.

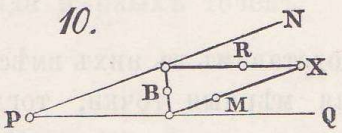
Возьмемъ двѣ пары прямыхъ: $PN$, $PQ$ и $XM$, $XR$ и замѣнимъ въ выраженіи

$$A * B * X = 0,$$

первый и третій множитель слѣдующими плоскостными произведеніями

$$[(X * M) * (P * Q)] * B * [(P * N) * (R * X)] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

*10.*




Уравненіе это выражаетъ собою условіе, что точки пересѣченія паръ прямыхъ $XM$, $PQ$, и $PN$, $RX$ (черт. 10) лежатъ на одной прямой съ точкою $B$.

Примемъ за начало векторовъ положенія въ форм. (64) точку $O$, совпадающую съ началомъ декартовыхъ прямоугольныхъ координатъ, и замѣнимъ векторы $X$, $M$ и т. д. суммами:

$$X = x + y; \qquad M = x_1 + y_1 \qquad \text{и т. д.}$$

гдѣ $x$, $y$, $x_1$, $y_1$ декартовы координаты точекъ. Если отъ геометрическихъ произведеній перейти къ алгебраическимъ, то координаты перемѣнной точки $X$ войдутъ вообще во второй степени, а потому уравненіе (64) выражаетъ собою кривую второго порядка.

Другими словами, (черт. 10) соотношеніе (64) выражаетъ собою извѣстную теорему *Маклорена:*

*Если стороны треугольника проходятъ соотвѣтственно черезъ три точки $M$, $B$ и $R$ и если двѣ его вершины движутся при этомъ вдоль прямыхъ $PN$ и $PQ$, то третья вершина треугольника описываетъ кривую второго порядка.*

Замѣнимъ въ формулѣ (64) множитель $B$ также плоскостнымъ произведеніемъ двухъ произвольныхъ прямыхъ, взявъ ихъ такъ, чтобы ихъ концы лежали на четырехъ прямыхъ, входящихъ въ остальные два множителя. Тогда мы можемъ написать слѣдующую формулу:

$$[(X*M)*(P*Q)]*[(M*N)*(Q*R)]*[(N*P)*(R*X)]=0. \quad (65)$$

Формула эта вновь представляетъ собою уравненіе кривой второго порядка, а такъ какъ она вполнѣ симметрична относительно точекъ $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $X$, въ нее входящихъ, то она выражаетъ собою условіе, чтобы шесть точекъ лежали на кривой второго порядка и въ то же самое время представляетъ собою выраженіе извѣстной *теоремы Паскаля* о шестиугольникѣ, вписанномъ въ коническое сѣченіе.

Подвергнувъ выраженіе $A*B*C*X=0$ аналогичнымъ преобразованіямъ, можно получить для пространства теоремы, аналогичныя теоремѣ Маклорена *), но мы не будемъ на этомъ останавливаться.

## § 20. Примѣненіе числового умноженія въ геометріи.

Выше (§ 14) мы сказали, что числовое умноженіе имѣетъ примѣненіе въ вопросахъ геометріи мѣры. Приведемъ простѣйшіе примѣры.

Возьмемъ векторныя равенства:

$$A+B=2M, \qquad B-A=AB.$$

Умноживъ каждое само на себя, мы получаемъ на основаніи основныхъ свойствъ числового произведенія (форм. 19, 21):

$$\left.\begin{aligned} A^2+B^2+2A_0B&=4M^2,\\ A^2+B^2-2A_0B&=AB^2,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

откуда

$$2A^2+2B^2-AB^2=4M^2.$$

Если въ послѣднихъ двухъ равенствахъ принять за общее начало векторовъ положенія опредѣленную точку $C$, то мы получаемъ выраженія *квадрата стороны треугольника и квадрата его медіаны.*

---

*) Алгебра плоскости и пространства § 62.

Пусть точка $M$ есть центръ тяжести системы матеріальныхъ точекъ $A$, $B$, $C$...съ массами $a$, $b$, $c$...и пусть $m=a+b+c+\ldots$; тогда

$$mM=\sum aA.$$

Произведя числовое умноженіе, получаемъ:

$$m^2M^2=\sum a^2A^2+2\sum abA_0B,$$

а такъ какъ

$$2A_0B=A^2+B^2-AB^2,$$

то

$$m^2M^2=\sum a^2A^2+\sum ab(A^2+B^2)-\sum abAB^2,$$

или

$$m^2M^2=m\sum aA^2-\sum abAB^2,$$

и наконецъ, дѣля на $m$, получаемъ

$$mM^2=\sum aA^2-\frac{1}{m}\sum abAB^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Выраженіе это впервые вывелъ Лагранжъ довольно сложнымъ пріемомъ *).

Приведенные примѣры мы считаемъ достаточными для уясненія значенія числовыхъ произведеній.

Въ механикѣ числовое произведеніе векторовъ соотвѣтствуетъ выраженію работы; умноженіемъ этимъ пользовались часто въ своихъ курсахъ *Резаль* и *Сомовъ*, называя его геометрическимъ умноженіемъ.

Мы предложили употреблять названіе числового умноженія потому, что въ исчисленіи кватерніоновъ это умноженіе соотвѣтствуетъ нахожденію скаляра двухъ векторовъ.

§ 21. Геометрическія соотношенія въ пространствѣ.

Такъ какъ на ряду съ линіями векторами можно всегда разсматривать векторы-площади, то геометрическимъ соотношеніямъ на плоскости можно почти всегда указать аналогичныя соотношенія въ пространствѣ.

Такъ напримѣръ, если $D$ средина ребра $AS$ тетраэдра $SABC$, то изъ равенства

$$2B_*C_*D=B_*C_*(A+S)=B_*C_*A+B_*C_*S$$

получаемъ слѣдующее соотношеніе между квадратами площадей

$$4BCD^2=BCA^2+BCS^2+2BCA_0BCS, \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

---

*) Mécanique analytique. T. I, p. I, sect. III, n° 20.

гдѣ послѣдній членъ равенъ произведенію граней на косинусъ угла между ними. Формула эта аналогична выраженію квадрата медіаны и выражаетъ собою квадратъ площади сѣченія, проходящаго черезъ одно изъ реберъ тетраэдра и средину противоположнаго ребра.

§ 22. Примѣненіе геометрическаго умноженія къ детерминантамъ и къ рѣшенію системы линейныхъ уравненій.

Наибольшее число независимыхъ векторовъ въ нашемъ пространствѣ четыре. Допустимъ возможность существованія $n$ независимыхъ между собою векторовъ; обозначимъ ихъ черезъ $1, 2, 3 \ldots n$. Напишемъ суммы:

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 1 + a_2 2 + \ldots a_n n, \\ B &= b_1 1 + b_2 2 + \ldots b_n n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M &= m_1 1 + m_2 2 + \ldots m_n n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

гдѣ $a, b \ldots m$ суть дѣйствительные коэффиціенты.

Перемножимъ суммы (69) геометрически. Согласно рав. (20), для полученія полнаго произведенія правыхъ частей равенствъ (69) мы должны составить всѣ возможныя произведенія, въ которыя не входило бы по два множителя изъ одного и того же столбца правыхъ частей формулъ (69). При этомъ, если условиться считать произведеніе $1 * 2 * 3 * \ldots * n$ положительнымъ, то всѣ остальныя произведенія будутъ положительны или отрицательны въ зависимости отъ числа перестановокъ, необходимыхъ для того, чтобы множители каждаго произведенія расположить въ порядкѣ натуральныхъ чиселъ.

Отсюда слѣдуетъ, что если вынести произведеніе $1 * 2 * \ldots * n$ общимъ множителемъ, то коэффиціентомъ при немъ получится слѣдующій детерминантъ:

$$A * B * \ldots * M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1 & m_2 \ldots & m_n \end{vmatrix} \cdot 1 * 2 * \ldots * n \quad \ldots (70)$$

На основаніи полученной формулы всѣ свойства детерминантовъ могутъ разсматриваться какъ слѣдствія основныхъ свойствъ геометрическаго произведенія (форм. 20).

Такъ напримѣръ, изъ свойства $A * A = 0$ слѣдуетъ, что детерминантъ обращается въ нуль, если въ немъ есть двѣ равныя между собою строки; изъ свойства $A * B = - B * A$ и $1 * 2 = - 2 * 1$ слѣдуетъ, что *детерминантъ мѣняетъ свой знакъ при перестановкѣ двухъ строкъ или колоннъ.*

Такъ какъ геометрическое произведеніе не мѣняется, если прибавить къ одному изъ множителей сумму остальныхъ множителей, взятыхъ съ произвольными коэффиціентами, то *детерминантъ не мѣняетъ своего значенія, если приложить къ элементамъ одной строки или колонны соотвѣтственно элементы нѣсколькихъ строкъ или колоннъ, умноженныхъ на произвольныя числа.*

Остальныя свойства детерминантовъ, вытекающія изъ приведенныхъ основныхъ свойствъ, могутъ быть выведены также параллельно съ свойствами геометрическихъ произведеній.

Укажемъ простой способъ рѣшенія системы линейныхъ уравненій. Пусть въ уравненіяхъ:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + m_1x_n &= p_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + m_2x_n &= p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + m_nx_n &= p_n, \end{aligned}$$

количества $a_1$, $b_1 \ldots m_1$, $p_1$ отнесены къ вектору 1, количества $a_2$, $b_2 \ldots m_2$, $p_2$ къ вектору 2, и т. д., и пусть векторы $1, 2 \ldots n$ не зависимы между собою.

Сложимъ всѣ данныя уравненія, обозначивъ соотвѣтственно черезъ $a$, $b \ldots m$ суммы: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\ldots m_1 + m_2 + \ldots + m_n$; тогда получимъ уравненіе:

$$ax_1 + bx_2 + \ldots + mx_n = p,$$

гдѣ $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$. Для нахожденія неизвѣстнаго $x_1$ умножимъ обѣ части полученнаго уравненія на геометрическое произведеніе

$$b * c * \ldots * m;$$

тогда всѣ неизвѣстныя кромѣ $x_1$ исключатся сами собою и мы получимъ формулу:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_1 & b_2 \ldots b_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ m_1 & m_2 \ldots m_n \end{matrix}\right| x_1 = \left|\begin{matrix} p_1 & p_2 \ldots p_n \\ b_1 & b_2 \ldots b_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ m_1 & m_2 \ldots m_n \end{matrix}\right|.$$

§ 23. Приложенія къ статикѣ.

Многія изъ приведенныхъ нами выше формулъ имѣютъ значеніе не только въ геометріи, но и въ механикѣ. Для болѣе нагляднаго выясне-

нія значенія этихъ формулъ въ механикѣ мы приведемъ выраженія теоремъ статики, имъ соотвѣтствующихъ.

Формула (14), примѣненная къ нѣсколькимъ слагаемымъ, выражаетъ собою слѣдующую теорему *Лейбница:*

*Если мы имѣемъ точку O и рядъ матеріальныхъ точекъ A, B ... съ массами a, b ... и если на точку O дѣйствуютъ силы, выраженныя векторами OA, OB ..., умноженными соотвѣтственно на массы a, b ..., то равнодѣйствующая равна вектору OM, умноженному на сумму всѣхъ массъ.*

Та же формула выражаетъ собою правило сложенія массъ. Формулы (30) и (31) выражаютъ собою извѣстную теорему *Вариньона: моментъ равнодѣйствующей равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагающихъ.*

Формула (26) мѣрной части прямой выражаетъ въ механикѣ силу, приложенную къ опредѣленной точкѣ; на этомъ основаніи формулы (30) и (33) выражаютъ собою *правила сложенія силъ пересѣкающихся и силъ параллельныхъ.*

Формула (34) выражаетъ собою *моментъ пары силъ.*

Формула (37) выражаетъ собою моментъ пары, которою замѣняется система силъ, огибающихъ нѣкоторую площадь.

Формула (39) даетъ правило сложенія силы и пары, лежащихъ въ одной плоскости.

Формулы (41), (42) и (43) даютъ возможность *замѣнять систему силъ или двумя силами, или одной силой и одной парой силъ.*

Такимъ образомъ, основныя теоремы статики при помощи формулъ, установленныхъ нами выше, пріобрѣтаютъ простыя и наглядныя выраженія, причемъ доказательства этихъ теоремъ значительно упрощаются.

Многія физическія величины выражаются одни векторами-линіями, другія векторами-площадями *). Слѣдуетъ ожидать, что изученіе операцій надъ тѣми и другими векторами должно имѣть также примѣненіе въ различныхъ вопросахъ физики.

§ 24. Краткая исторія вопроса объ исчисленіи положенія; важнѣйшая литература.

Подъ исчисленіемъ положенія разумѣется установленіе такихъ операцій надъ символами, обозначающими положеніе пространственныхъ элементовъ, которыя соотвѣтствовали бы операціямъ построеній, совершаемыхъ надъ ними.

Идея объ исчисленіи положенія *(Calculus situs)* принадлежала еще знаменитому *Лейбницу.*

---

*) *J. C. Maxwell* въ своемъ Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus приводитъ въ § 11 и 12 цѣлый рядъ физическихъ величинъ, выражающихся векторами-линіями и векторами-площадями.

*Д'Аламберъ* въ своей *Encyclopédie (art. situation)* говоритъ: „Анализъ положенія есть во всякомъ случаѣ нѣчто такое, чего недостаетъ современной алгебрѣ“... „Было бы желательно найти средство ввести въ вычисленіе обозначеніе положенія; этимъ значительно сокращались бы вычисленія; но это не доступно современному положенію и средствамъ анализа“.

Важнѣйшія изъ работъ, относящихся къ исчисленію положенія, суть слѣдующія:

1. *A. F. Möbius.* Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. Leipzig. 1827.

2. *H. G. Grassmann.* Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig. 1844.

3. *G. Bellavitis.* Sposizione del metodo delle equipollenze. Modena. 1854.

4. *L. Neovius.* Om komplexa tals användning i geometrin. Helsingfors. 1884.

5. *В. П. Ермаковъ.* Теорія векторовъ на плоскости. Кіевъ. 1887.

6. *E. W. Hyde.* The directional calculus, based upon the methods of Hermann Grassmann. Boston. 1890.

7. *G. Peano.* Die Grundzüge des geometrischen Calculs. Deutsch von A. Schepp. Leipzig. 1891.

8. *F. Kraft.* Abriss des geometrischen Kalküls. Leipzig. 1893.

Изъ перечисленныхъ авторовъ наибольшею оригинальностію идей отличаются Мебіусъ, Грассманъ и Беллавитисъ.

*А. Ф. Мебіусъ* разсматривалъ зависимость между положеніемъ точекъ въ пространствѣ, устанавливая связь между длинами параллельныхъ отрѣзковъ, проведенныхъ изъ нѣсколькихъ матеріальныхъ точекъ и ихъ общаго центра тяжести и ограниченныхъ съ другой стороны плоскостію.

*Германъ Гюнтеръ Грассманъ* разсматриваетъ точки-величины (Punctgrösse), т. е. точки, взятыя съ числовымъ коэффиціентомъ къ нимъ присоединеннымъ, а также отрѣзки линій и части плоскостей, какъ особыя величины, и устанавливаетъ надъ ними алгебраическія операціи.

*Д. Беллавитисъ* въ теоріи эквиполленцъ разсматриваетъ, какъ мы указывали и выше, рѣшеніе векторныхъ уравненій въ примѣненіи къ геометріи.

Остальные изъ перечисленныхъ авторовъ занимаются развитіемъ идей Г. Г. Грассмана и отчасти идей Беллавитиса.

## § 25. Заключеніе.

Особенности теоріи векторовъ, предлагаемой нами, состоятъ, во-первыхъ, въ установленіи понятія о *системахъ векторовъ съ произвольнымъ общимъ началомъ*, во-вторыхъ, въ разсмотрѣніи геометрическаго и числового умноженій въ ихъ связи съ общимъ алгебраическимъ умноженіемъ векторовъ.

Послѣднее обстоятельство дало намъ возможность развить теорію геометрическаго умноженія проще, чѣмъ это дѣлаютъ послѣдователи Г. Г. Грассмана. Введеніе же понятія о системахъ векторовъ съ произвольнымъ общимъ началомъ даетъ намъ возможность отвлекаться отъ *длины, направленія и положенія начала векторовъ* въ вопросахъ, гдѣ идетъ рѣчь о положеніи точекъ, принимаемыхъ въ этомъ случаѣ за концы векторовъ.

Формулы, относящіяся къ системамъ векторовъ съ произвольнымъ общимъ началомъ, оказываются съ одной стороны тождественными съ формулами барицентрическаго исчисленія Мебіуса, а съ другой стороны совпадаютъ съ значеніемъ формулъ Г. Грассмана, относящихся къ его величинамъ-точкамъ.

Связь между векторами-положенія и векторами направленія вполнѣ естественна, тогда какъ понятіе о векторѣ, какъ разности двухъ точекъ-величинъ, какъ у самого Грассмана, такъ и у всѣхъ его послѣдователей остается мѣстомъ весьма слабымъ.

Введеніе понятія о векторѣ-положенія позволяетъ соединить въ одно цѣлое всѣ отдѣльные методы въ области исчисленія положенія.

Въ заключеніе постараемся по возможности выяснить причину того выдающагося значенія, которое имѣетъ геометрическое умноженіе въ теоріи векторовъ. Причина эта заключается, по нашему мнѣнію, въ томъ, что геометрическое умноженіе можетъ разсматриваться какъ алгебраическое умноженіе, обобщенное въ такомъ направленіи, что можно не дѣлать различія по существу между извлеченіемъ корня четной степени какъ изъ положительнаго, такъ и изъ отрицательнаго количества.

Дѣйствительно, если мы возьмемъ геометрическое произведеніе двухъ равныхъ взаимно перпендикулярныхъ векторовъ

$$a_\varphi * a_{\varphi+\frac{1}{2}\pi} = a^2$$

и если по данной площади квадрата $a^2$, имъ выражаемой, мы будемъ опредѣлять образующій и направляющій векторы (§ 6), то дѣйствій, обратныхъ разсматриваемому умноженію, будетъ два различныхъ: одно для опредѣленія образующаго, а другое для опредѣленія направляющаго вектора. Будемъ первое дѣйствіе обозначать знакомъ $\sqrt{}$, а второе знакомъ $\overset{*}{\sqrt{}}$.

Тогда, вслѣдствіе неперемѣстительности геометрическаго умноженія, будемъ имѣть формулы

$$\overset{*}{\sqrt{+a^2}} = \sqrt{-a^2}; \qquad \overset{*}{\sqrt{-a^2}} = \sqrt{+a^2}. \quad \ldots . (71)$$

Векторы, выраженные той и другой операціей, различаются по своему направленію на $90^0$.

Такимъ образомъ, мы приходимъ инымъ путемъ къ результату, который полученъ еще Арганомъ, а именно, что геометрическая операція, соотвѣтствующая умноженію вектора на $\sqrt{-1}$, состоитъ въ вращеніи вектора на $90^0$.

Съ другой стороны, понятіе о сложеніи векторовъ также представляетъ собою обобщеніе понятія о сложеніи количествъ положительныхъ и отрицательныхъ на количества комплексныя.

Такимъ образомъ, вся изложенная нами теорія векторовъ можетъ разсматриваться какъ геометрическое толкованіе алгебры комплексныхъ количествъ.

29 Іюня 1893 г.

# Объ одномъ свойствѣ дифференціальныхъ уравненій задачи о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку *).

А. М. Ляпунова.

**1.** Вопросъ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, зависитъ, какъ извѣстно, отъ интегрированія системы дифференціальныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr+\beta\zeta-\gamma\eta,\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp+\gamma\xi-\alpha\zeta,\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq+\alpha\eta-\beta\xi,\\ \frac{d\xi}{dt} &= r\eta-q\zeta,\\ \frac{d\eta}{dt} &= p\zeta-r\xi,\\ \frac{d\zeta}{dt} &= q\xi-p\eta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здѣсь $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ суть извѣстныя постоянныя, изъ которыхъ первыя три представляютъ главные моменты инерціи твердаго тѣла,

*) Предметъ этой статьи былъ доложенъ мною Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 10 мая 1893 г. Но нѣкоторыя независящія отъ меня обстоятельства помѣшали своевременному окончанію ея редактированія, вслѣдствіе чего она появляется въ печати нѣсколько запоздавшею.

Считаю нужнымъ замѣтить, что вопросъ, которому она посвящена, рѣшается также въ только-что опубликованномъ сочиненіи Г. Г. Аппельрота подъ заглавіемъ *Задача о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки.*

соотвѣтствующіе неподвижной точкѣ, а послѣднія три пропорціональны прямоугольнымъ координатамъ центра тяжести въ системѣ координатъ, оси которыхъ совпадаютъ съ осями этихъ моментовъ инерціи.

Безъ нѣкоторыхъ предположеній относительно этихъ постоянныхъ уравненія (1) еще не удалось проинтегрировать, и до недавняго времени были извѣстны только два случая, въ которыхъ получался ихъ общій интегралъ.

Одинъ изъ нихъ, въ которомъ интегрированіе было выполнено еще Эйлеромъ, есть тотъ, когда

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

т. е. когда центръ тяжести тѣла совпадаетъ съ неподвижною точкой; другой, указанный Лагранжемъ,—тотъ, когда два изъ названныхъ моментовъ инерціи равны между собою, а центръ тяжести лежитъ гдѣ либо на оси третьяго, т. е. когда при надлежащемъ выборѣ обозначеній

$$A = B, \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Въ обоихъ случаяхъ уравненія (1) интегрируются, какъ извѣстно, при помощи эллиптическихъ функцій, и величины $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, каковы бы ни были ихъ начальныя значенія, выражаются однозначными функціями времени $t$, не имѣющими никакихъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ (точекъ въ безконечности мы не разсматриваемъ).

С. В. Ковалевская недавно показала, какъ интегрируются уравненія (1) еще въ одномъ случаѣ: именно—когда два изъ моментовъ инерціи равны удвоенному третьему, а центръ тяжести лежитъ въ плоскости осей равныхъ моментовъ инерціи, т. е. когда выборомъ обозначеній можно распорядиться такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$A = B = 2C, \qquad \gamma = 0.$$

Въ этомъ случаѣ уравненія (1) интегрируются при помощи функцій $\vartheta$, зависящихъ отъ двухъ аргументовъ, но $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ по прежнему выражаются однозначными функціями времени, не имѣющими другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ.

Это то послѣднее обстоятельство и послужило С. В. Ковалевской къ открытію указаннаго сейчасъ случая.

Замѣтивши, что въ обоихъ извѣстныхъ случаяхъ интегрируемости функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ обладаютъ сказаннымъ свойствомъ, С. В. Ковалевская предложила себѣ найти, если возможно, новые случаи того же рода и, стараясь разрѣшить эту задачу, пришла къ своему случаю.

Путь, которому она слѣдовала, намѣченъ въ параграфѣ $1^{\text{омъ}}$ ея мемуара *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (Acta mathem., t. 12), но съ большею обстоятельностью указанъ въ

другомъ ея мемуарѣ, который былъ напечатанъ въ 14$^{омъ}$ томѣ Acta mathematica подъ заглавіемъ: *Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.*

Въ настоящее время мы знаемъ такимъ образомъ три случая, въ которыхъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, каковы бы ни были ихъ начальныя значенія, выходятъ однозначными и безъ особенныхъ точекъ кромѣ полюсовъ.

Является вопросъ, не существуетъ ли другихъ такихъ же случаевъ? Или, можетъ быть, указанные три суть единственные случаи такого рода изъ всѣхъ, возможныхъ механически?

Хотя С. В. Ковалевская и не высказывается въ этомъ отношеніи категорически, но судя по ходу ея разсужденій, надо думать, что своимъ изслѣдованіемъ она считала вопросъ рѣшеннымъ и именно—въ послѣднемъ смыслѣ. По крайней мѣрѣ, къ такому заключенію приводитъ сопоставленіе двухъ слѣдующихъ ея утвержденій: въ началѣ перваго своего мемуара она говоритъ, что всѣ случаи разсматриваемаго рода должны быть таковы, чтобы уравненіямъ (1) можно было удовлетворить рядами, характерными для полюсовъ и содержащими въ своихъ коэффиціентахъ пять произвольныхъ постоянныхъ, а въ концѣ второго мемуара высказываетъ, какъ выводъ, что это возможно только въ трехъ указанныхъ выше случаяхъ.

Однако анализъ ея, по скольку о немъ можно судить на основаніи опубликованнаго въ упомянутыхъ сейчасъ мемуарахъ, нельзя считать рѣшающимъ, такъ какъ онъ основывается на нѣкоторыхъ допущеніяхъ, законность которыхъ можетъ подлежать сомнѣнію.

Это обстоятельство первый указалъ академикъ А. А. Марковъ, который недавно въ своихъ письмахъ сообщилъ мнѣ сущность возраженій, которыя высказывались имъ противъ анализа С. В. Ковалевской.

Но вполнѣ соглашаясь съ А. А. Марковымъ относительно недостаточности этого анализа, я тѣмъ не менѣе склоненъ былъ думать, что вопросъ разрѣшается въ томъ именно смыслѣ, какъ полагала С. В. Ковалевская, и что рѣшеніе его можетъ быть достигнуто безъ особыхъ затрудненій, если нѣсколько иначе приняться за дѣло.

Вслѣдствіе этого я рѣшилъ разсмотрѣть вопросъ съ другой точки зрѣнія и попытаться приложить къ нему методу, которая давно уже казалась мнѣ наиболѣе подходящею для рѣшенія вопросовъ такого рода.

Такимъ путемъ пришелъ я къ доказательству единственности найденныхъ трехъ случаевъ однозначности, которое и предлагаю здѣсь вниманію читателя.

Доказательство это основывается на соображеніяхъ, совершенно отличныхъ отъ тѣхъ, которыми руководилась С. В. Ковалевская, чѣмъ не только устраняются нѣкоторыя затрудненія принципіальнаго характера, присущія ея методѣ, но и достигается значительное упрощеніе

анализа вслѣдствіе меньшаго числа и меньшей сложности тѣхъ частныхъ случаевъ, которые приходится разсматривать.

Метода, которою я пользуюсь, обладаетъ при томъ тѣмъ преимуществомъ, что приводитъ къ болѣе широкому заключенію, а именно: она позволяетъ заключить, что во всѣхъ остальныхъ возможныхъ случаяхъ, за исключеніемъ извѣстныхъ трехъ, функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ не только могутъ имѣть особенныя точки, отличныя отъ полюсовъ, но при надлежащемъ выборѣ начальныхъ значеній навѣрно будутъ многозначными.

Наконецъ, хотя подъ возможными я и разумѣю здѣсь случаи возможные механически, анализъ мой обнимаетъ и множество другихъ случаевъ, ибо единственное предположеніе, которое я дѣлаю, состоитъ въ томъ, что $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ вещественны, и что изъ чиселъ $A$, $B$, $C$ ни одно не нуль.

Я доказываю такимъ образомъ слѣдующее:

*Изъ всѣхъ случаевъ, когда постоянныя $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ вещественны и $A$, $B$, $C$ всѣ отличны отъ нуля, извѣстные три случая суть единственные, въ которыхъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, опредѣляемыя уравненіями (1), однозначны при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.*

2. Прежде, чѣмъ говорить о методѣ, которою я здѣсь пользуюсь, считаю необходимымъ указать на нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія для уравненій (1) изъ принциповъ общей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій и обусловливаемыя тѣмъ обстоятельствомъ, что вторыя части этихъ уравненій суть цѣлыя функціи величинъ $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ съ постоянными коэффиціентами.

Пусть $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ суть начальныя значенія функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, соотвѣтствующія нѣкоторому опредѣленному значенію $t$, которое означимъ черезъ $t_0$.

Пусть значеніе это на плоскости перемѣннаго $t$ представляется точкою $O$.

Всякій разъ, когда $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ выбраны опредѣленнымъ образомъ, а перемѣнное $t$ подчинено условію, чтобы представляющая точка оставалась внутри окружности достаточно малаго радіуса съ центромъ въ точкѣ $O$, функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ будутъ вполнѣ опредѣленными и представятся рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $t - t_0$.

Если же перемѣнное $t$ не подчинено сказанному условію, то чтобы говорить о значеніяхъ этихъ функцій въ какой либо точкѣ $P$, вообще необходимо задать путь $L$, соединяющій эту точку съ точкою $O$ *),

*) Говоря о пути, соединяющемъ двѣ точки $O$ и $P$, мы подразумѣваемъ, что рѣчь идетъ о геометрическомъ мѣстѣ точекъ, представляющихъ значенія перемѣннаго $t$, вещественная и мнимая часть котораго даны подъ видомъ опредѣленныхъ и непрерывныхъ

и разсматривать соотвѣтствующее ему непрерывное измѣненіе $t$ отъ значенія $t_0$ до значенія, представляемаго точкою $P$.

Тогда по способу аналитическаго продолженія функцій можно будетъ опредѣлить функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, смотря по обстоятельствамъ, или для всѣхъ точекъ пути $L$, включая и точку $P$, или только для точекъ, встрѣчаемыхъ при движеніи по этому пути отъ точки $O$ ранѣе нѣкоторой точки $P'$ и насколько угодно близкихъ къ ней, но не для точки $P'$.

Въ первомъ случаѣ всѣ точки пути $L$, включая и точку $P$, будутъ для функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ обыкновенными. Во второмъ всѣ точки, встрѣчаемыя ранѣе $P'$, будутъ обыкновенными, а точка $P'$ будетъ особенною, и съ приближеніемъ къ ней по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ не будутъ приближаться ни къ какимъ предѣламъ; что же касается всѣхъ остальныхъ точекъ пути $L$, когда точка $P'$ отлична отъ точки $P$, то относительно нихъ при разсматриваемомъ выборѣ пути нельзя сказать ничего опредѣленнаго.

Во второмъ случаѣ, чтобы говорить о значеніяхъ функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ въ точкѣ $P$, путь $L$ долженъ быть замѣненъ какимъ либо другимъ.

Допустимъ теперь, что, остановившись на какомъ либо опредѣленномъ выборѣ точки $P$ и пути $L$, мы приписываемъ величинамъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ различныя значенія и, когда это возможно, опредѣляемъ соотвѣтствующія имъ значенія функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ въ точкѣ $P$.

Тогда, если опредѣленіе это оказывается возможнымъ при какихъ либо величинахъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, то будетъ возможно и при всякихъ другихъ, достаточно къ нимъ близкихъ.

Это вытекаетъ изъ слѣдующаго весьма важнаго для насъ предложенія:

Если всѣ точки пути $L$, включая и точку $P$, при

$$p_0 = p_0', \quad q_0 = q_0', \quad r_0 = r_0', \quad \xi_0 = \xi_0', \quad \eta_0 = \eta_0', \quad \zeta_0 = \zeta_0'$$

суть обыкновенныя, то то же будетъ и при всякихъ другихъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, для которыхъ модули величинъ

$$p_0 - p_0', \quad q_0 - q_0', \quad r_0 - r_0', \quad \xi_0 - \xi_0', \quad \eta_0 - \eta_0', \quad \zeta_0 - \zeta_0' \qquad (2)$$

не превосходятъ нѣкотораго отличнаго отъ нуля предѣла, при чемъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, соотвѣтствующія такимъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$,

---

функцій вещественнаго перемѣннаго $s$, способнаго получать всевозможныя значенія, лежащія между нѣкоторыми опредѣленными предѣлами, соотвѣтствующими точкамъ $O$ и $P$. При этомъ точки пути различаемъ значеніями $s$, такъ-что точки, соотвѣтствующія различнымъ $s$, разсматриваемъ, какъ различныя точки пути, хотя бы онѣ и совпадали съ одною и тою же точкою плоскости, и двѣ точки пути считаемъ безконечно-близкими только тогда, когда онѣ соотвѣтствуютъ безконечно-близкимъ значеніямъ $s$.

будутъ способны представляться на пути $L$ рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ (2), сходящимися равномѣрно для всѣхъ точекъ этого пути, включая и точку $P$, и всѣ эти точки для ихъ коэффиціентовъ, какъ функцій перемѣннаго $t$, будутъ обыкновенными.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если при опредѣленномъ выборѣ точки $P$ и пути $L$ значенія функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ въ этой точкѣ разсматриваются, какъ функціи величинъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, то функціи эти будутъ обладать опредѣленными частными производными по какимъ угодно изъ этихъ величинъ и какого угодно порядка всякій разъ, когда всѣ точки пути $L$, включая и точку $P$, для функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ суть обыкновенныя, и эти частныя производныя при постоянныхъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ представятъ функціи перемѣннаго $t$, для которыхъ всякая точка плоскости, выходящая для функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ при какомъ либо выборѣ пути обыкновенною, будетъ при томъ же выборѣ пути также обыкновенною.

Вообще значенія функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ въ какой либо точкѣ $P$, опредѣляемыя при однихъ и тѣхъ же $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, но при различныхъ путяхъ, могутъ быть различными.

Но допустимъ, что мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда значенія эти не зависятъ отъ пути, каковы бы ни были $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, т. е. когда функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ однозначны при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

Тогда при всякомъ опредѣленномъ выборѣ величинъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ положенія всѣхъ особенныхъ точекъ этихъ функцій будутъ вполнѣ опредѣленными, и во всякой части плоскости, несодержащей этихъ точекъ, разсматривавшіяся сейчасъ частныя производныя будутъ также однозначными.

Разысканіе условій этой однозначности при величинахъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, соотвѣтствующихъ нѣкоторымъ извѣстнымъ частнымъ рѣшеніямъ уравненій (1), и составляетъ сущность моей методы.

Я ограничиваюсь при этомъ разсмотрѣніемъ частныхъ производныхъ перваго порядка, чего при надлежащемъ выборѣ частныхъ рѣшеній уравненій (1) оказывается вполнѣ достаточно для полнаго рѣшенія вопроса.

Пусть $l$ означаетъ какую либо изъ величинъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$.

Тогда уравненіями

$$u = \frac{\partial p}{\partial l}, \qquad v = \frac{\partial q}{\partial l}, \qquad w = \frac{\partial r}{\partial l},$$

$$x = \frac{\partial \xi}{\partial l}, \qquad y = \frac{\partial \eta}{\partial l}, \qquad z = \frac{\partial \zeta}{\partial l}$$

опредѣлится нѣкоторое частное рѣшеніе слѣдующей системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{du}{dt} &= (B-C)(rv+qw)+\beta z-\gamma y,\\
B\frac{dv}{dt} &= (C-A)(pw+ru)+\gamma x-\alpha z,\\
C\frac{dw}{dt} &= (A-B)(qu+pv)+\alpha y-\beta x,\\
\frac{dx}{dt} &= \eta w-\zeta v+ry-qz,\\
\frac{dy}{dt} &= \zeta u-\xi w+pz-rx,\\
\frac{dz}{dt} &= \xi v-\eta u+qx-py,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и всѣ шесть такихъ рѣшеній, получаемыхъ, когда $l$ поочередно полагается равнымъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, будутъ независимыми, такъ что изъ нихъ извѣстнымъ путемъ могутъ быть выводимы всякія другія рѣшенія той же системы.

Для всякаго извѣстнаго частнаго рѣшенія уравненій (1) коэффиціенты въ уравненіяхъ (3) будутъ извѣстными функціями $t$, и вопросъ будетъ состоять въ разысканіи условій, при которыхъ всякія функціи $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $z$, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, оставались бы однозначными во всякой части плоскости, не содержащей особенныхъ точекъ функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ разсматриваемаго рѣшенія системы (1).

Всякія необходимыя условія этого рода навѣрно будутъ необходимы и для однозначности функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

Дѣйствительно, пусть для разсматриваемаго частнаго рѣшенія уравненій (1), соотвѣтствующаго начальнымъ значеніямъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, система (3) допускаетъ рѣшеніе, въ которомъ функціи $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ (всѣ или только нѣкоторыя), выходя изъ точки $O$ съ начальными значеніями $u_0$, $v_0$, $w_0$, $x_0$, $y_0$, $z_0$, достигаютъ одной и той же точки $P$ *по двумъ путямъ*, не встрѣчающимъ особенныхъ точекъ функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, съ различными значеніями. Тогда функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, опредѣляемыя начальными значеніями

$$p_0+u_0\varepsilon,\quad q_0+v_0\varepsilon,\quad r_0+w_0\varepsilon,\quad \xi_0+x_0\varepsilon,\quad \eta_0+y_0\varepsilon,\quad \zeta_0+z_0\varepsilon,$$

при $|\varepsilon|$ достаточно маломъ, но отличномъ отъ нуля, будутъ достигать той же точки по тѣмъ же путямъ также съ различными значеніями, ибо на основаніи указаннаго выше предложенія функціи эти при $|\varepsilon|$

достаточно маломъ представятся на разсматриваемыхъ путяхъ рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $\varepsilon$, а члены первой степени относительно $\varepsilon$, очевидно, будутъ въ этихъ рядахъ вида

$$u\varepsilon, \quad v\varepsilon, \quad w\varepsilon, \quad x\varepsilon, \quad y\varepsilon, \quad z\varepsilon.$$

**3.** Чтобы требованіе однозначности функцій $u, v, w, x, y, z$ могло привести къ какимъ либо условіямъ, уравненія (3) должны быть разсматриваемы только для такихъ рѣшеній уравненій (1), которыя обладали бы особенными точками по крайней мѣрѣ для нѣкоторыхъ изъ функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$, ибо при отсутствіи особенныхъ точекъ для послѣднихъ функціи $u, v, w, x, y, z$ также не будутъ имѣть такихъ точекъ и всегда будутъ однозначными во всей плоскости перемѣннаго $t$.

Такимъ образомъ для нашей методы весьма важно имѣть какія либо частныя рѣшенія уравненій (1) съ особенными точками по крайней мѣрѣ для нѣкоторыхъ изъ функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$.

Подобныя рѣшенія дѣйствительно извѣстны и возможны во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ одного, который характеризуется равенствами $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и условіемъ, что $A, B, C$ не всѣ различны.

Простѣйшія изъ такихъ рѣшеній суть рѣшенія вида

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{a}{t}, & q &= \frac{b}{t}, & r &= \frac{c}{t}, \\ \xi &= \frac{f}{t^2}, & \eta &= \frac{g}{t^2}, & \zeta &= \frac{h}{t^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ $a, b, c, f, g, h$ означаютъ постоянныя, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ нѣкоторыя отличны отъ нуля.

Не останавливаясь на разысканіи всевозможныхъ системъ значеній $a, b, c, f, g, h$, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ такого типа, укажемъ двѣ такихъ системы, изъ которыхъ одна возможна всякій разъ, когда $A, B, C$ всѣ различны, другая — всякій разъ, когда между числами $\alpha, \beta, \gamma$ по крайней мѣрѣ одно есть нуль и по крайней мѣрѣ одно не нуль.

Первая изъ этихъ системъ опредѣляется слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} a &= -B'C', & b &= -C'A', & c &= -A'B', \\ f &= 0, & g &= 0, & h &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

гдѣ

$$A' = \sqrt{\frac{A}{B-C}}, \qquad B' = \sqrt{\frac{B}{C-A}}, \qquad C' = \sqrt{\frac{C}{A-B}}$$

и радикалы имѣютъ какія угодно свойственныя имъ алгебраическія значенія.

Вторая, соотвѣтствующая предположенію, что $\beta = 0$, и что изъ чиселъ $\alpha$ и $\gamma$ хотя одно не нуль, есть слѣдующая:

$$\left.\begin{aligned} a &= 0, & b &= 2i, & c &= 0, \\ f &= -\frac{2Bi}{\gamma + \alpha i}, & g &= 0, & h &= -\frac{2B}{\gamma + \alpha i}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

гдѣ $i$ означаетъ $\pm\sqrt{-1}$.

Этихъ формулъ, если къ нимъ присоединить подобныя имъ, соотвѣтствующія предположенію $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, будетъ для насъ вполнѣ достаточно, такъ какъ въ случаѣ, когда $A$, $B$, $C$ всѣ различны, мы можемъ пользоваться формулами (5), а въ случаѣ, когда между ними существуютъ равныя, одно изъ чиселъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ всегда можемъ предположить нулемъ ($\alpha$ или $\beta$, когда $A = B$; $\beta$ или $\gamma$, когда $B = C$; $\gamma$ или $\alpha$, когда $C = A$), послѣ чего можно будетъ пользоваться формулами (6) или имъ подобными, если только $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ не всѣ нули, т. е. если разсматриваемый случай не заключается въ случаѣ Эйлера.

Для рѣшеній типа (4) система (3) будетъ слѣдующаго вида:

$$\begin{aligned} At\frac{du}{dt} &= (B-C)(cv+bw) + \beta tz - \gamma ty, \\ Bt\frac{dv}{dt} &= (C-A)(aw+cu) + \gamma tx - \alpha tz, \\ Ct\frac{dw}{dt} &= (A-B)(bu+av) + \alpha ty - \beta tx, \\ t^2\frac{dx}{dt} &= gw - hv + cty - btz, \\ t^2\frac{dy}{dt} &= hu - fw + atz - ctx, \\ t^2\frac{dz}{dt} &= fv - gu + btx - aty, \end{aligned}$$

и если за неизвѣстныя функціи вмѣсто $x$, $y$, $z$ принять $tx$, $ty$, $tz$, приведется къ одному изъ извѣстныхъ типовъ.

Интегрированіе этой системы зависитъ отъ рѣшенія слѣдующаго алгебраическаго уравненія $6^{\text{ой}}$ степени относительно неизвѣстнаго $k$:

$$\begin{vmatrix} Ak & (C-B)c & (C-B)b & 0 & \gamma & -\beta \\ (A-C)c & Bk & (A-C)a & -\gamma & 0 & \alpha \\ (B-A)b & (B-A)a & Ck & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & h & -g & k-1 & -c & b \\ -h & 0 & f & c & k-1 & -a \\ g & -f & 0 & -b & a & k-1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Разсмотрѣніе этого уравненія тотчасъ же даетъ и условія однозначности функцій $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $z$.

Условія эти состоятъ въ томъ, чтобы 1) всѣ корни этого уравненія были вещественными цѣлыми числами (положительными, отрицательными или нулями — безразлично) и 2) чтобы всякій кратный его корень обращалъ въ нуль всѣ миноры опредѣлителя, фигурирующаго въ первой части равенства, до порядка, равнаго кратности этого корня, невключительно.

Условія эти необходимы и достаточны.

Разысканіемъ ихъ мы и займемся въ слѣдующихъ параграфахъ, ограничиваясь предположеніемъ, что $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ вещественны, и предполагая, конечно, что $A$, $B$, $C$ всѣ отличны отъ нуля *).

**4.** Начнемъ съ случая, когда $A$, $B$, $C$ всѣ различны.

Если остановимся на формулахъ (5), то уравненіе (7) послѣ небольшихъ преобразованій приведется къ виду

$$k(k-1)^3(k^2-4)=0,$$

и слѣдовательно условіе, относящееся къ характеру его корней, всегда будетъ выполнено. Но такъ какъ уравненіе это имѣетъ трехкратный корень 1, то необходимо еще удовлетворить условію, чтобы всѣ миноры второго порядка для опредѣлителя, представляющаго первую часть уравненія (7), при $k=1$ дѣлались нулями.

Выражая, что это условіе выполняется для минора, получаемаго изъ названнаго опредѣлителя вычеркиваніемъ второго и третьяго столбца и третьей и четвертой строки, находимъ:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & \gamma & -\beta \\ A'B'(C-A) & -\gamma & 0 & \alpha \\ 0 & -A'B' & 0 & B'C' \\ 0 & C'A' & -B'C' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство же это, приводящееся къ виду

$$\alpha\sqrt{A(B-C)}+\beta\sqrt{B(C-A)}+\gamma\sqrt{C(A-B)}=0,$$

при вещественныхъ $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и при различныхъ $A$, $B$, $C$, между которыми среднее пусть будетъ $B$, возможно только въ случаѣ, когда

---

*) Уравненіе (7) только обозначеніями отличается отъ того, къ которому приходитъ С. В. Ковалевская (ея неизвѣстное $n$ связано съ неизвѣстнымъ $k$ равенствомъ $n-1=k$), и требованіе, которому, слѣдуя ея указанію, пришлось бы подчинить его корни, выразилось бы такъ: пять изъ этихъ корней должны быть вещественными неотрицательными числами.

$$\beta = 0, \qquad \alpha\sqrt{A(B-C)} + \gamma\sqrt{C(A-B)} = 0. \tag{8}$$

Случай, характеризуемый этими равенствами, былъ указанъ Г. Г. Аппельротомъ, который пришелъ къ нему изъ разсмотрѣнія того же уравненія (7), желая удовлетворить уравненіямъ (1) рядами, обладающими полюсами перваго порядка и содержащими въ своихъ коэффиціентахъ пять произвольныхъ постоянныхъ *).

Случай этотъ послужилъ потомъ предметомъ изслѣдованія профессоровъ П. А. Некрасова, Н. Е. Жуковскаго и Б. К. Млодзѣевскаго, при чемъ П. А. Некрасовымъ было показано, что если только $\alpha$ и $\gamma$ не нули (т. е. если разсматриваемый случай не приводится къ Эйлерову), функціи $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ при надлежащемъ выборѣ начальныхъ значеній навѣрно будутъ многозначными **).

Обстоятельство это, впрочемъ, нетрудно обнаружить и разсмотрѣніемъ уравненія (7), составленнаго въ предположеніи $\beta = 0$ при величинахъ $a, b, c, f, g, h$, опредѣляемыхъ формулами (6).

Дѣйствительно, уравненіе это можно представить подъ видомъ:

$$D_1 D_2 = 0,$$

гдѣ

$$D_1 = \begin{vmatrix} Bk & -\gamma & \alpha \\ h & k-1 & 2i \\ -hi & -2i & k-1 \end{vmatrix} = B(k+2)(k-1)(k-3),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} Ak & 2(C-B)i & \gamma \\ 2(B-A)i & Ck & -\alpha \\ -h & hi & k-1 \end{vmatrix}.$$

Если же вычислимъ опредѣлитель $D_2$, то найдемъ, что изъ трехъ корней уравненія $D_2 = 0$ одинъ есть 2, а остальные опредѣляются уравненіемъ:

$$ACk(k+1) + 2(B-A)(C-2B) - 2B(A-C)\frac{\alpha(\alpha+\gamma i)}{\alpha^2+\gamma^2} = 0. \tag{9}$$

Но послѣднее, при различныхъ $A$ и $C$, если ни $\alpha$, ни $\gamma$ не равны нулю, очевидно, не можетъ обладать вещественными корнями.

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ функціи $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ могутъ быть однозначными при всякихъ начальныхъ значеніяхъ только

---

*) Г. Г. Аппельротъ. *По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation...“* (Математическій Сборникъ, томъ XVI).

**) П. А. Некрасовъ. *Къ задачѣ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки* (тамъ же).

при равенствѣ нулю одного изъ чиселъ $\alpha$ и $\gamma$; а такъ какъ въ силу (8) равенство одного изъ нихъ нулю влечетъ за собою и равенство нулю другого, то однозначность эта возможна лишь тогда, когда разсматриваемый случай приводится къ случаю Эйлера.

**5.** Разсмотримъ теперь случай, когда $A$, $B$, $C$ не всѣ различны, и чтобы остановиться на чемъ либо опредѣленномъ, допустимъ, что $A = B$.

Мы можемъ тогда, нисколько не теряя въ общности, одно изъ чиселъ $\alpha$, $\beta$ предположить нулемъ, ибо при $A = B$ къ такому случаю всегда можно придти путемъ извѣстнаго линейнаго преобразованія уравненій (1).

Допустимъ поэтому, что $\beta = 0$.

Если бы въ тоже время было и $\alpha = 0$, то мы имѣли бы дѣло съ случаемъ Лагранжа. Мы встрѣтились бы съ послѣднимъ также и при $A = C$, ибо тогда имѣли бы $A = B = C$, а при этомъ условіи, нисколько не теряя въ общности, можно предположить нулями два изъ чиселъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Мы будемъ поэтому предполагать, что ни $\alpha$, ни $A - C$ не нули.

Остановившись на этихъ предположеніяхъ, обращаемся къ уравненію (7), соотвѣтствующему формуламъ (6).

Мы только-что видѣли, что уравненіе это, кромѣ четырехъ вещественныхъ цѣлыхъ корней, имѣетъ два корня, опредѣляемые уравненіемъ (9), которые, при $A - C$ и $\alpha$ отличныхъ отъ нуля, могутъ быть вещественными только при $\gamma = 0$.

Мы должны поэтому допустить, что $\gamma = 0$, послѣ чего, дѣлая въ уравненіи (9) $A = B$ и полагая

$$\frac{A}{C} = n,$$

приведемъ его къ виду

$$k(k+1) = 2(n-1).$$

Отсюда заключаемъ, что $n$ необходимо должно быть нѣкоторымъ цѣлымъ положительнымъ числомъ.

Но въ предположеніи $\gamma = 0$, которое мы должны были сейчасъ сдѣлать, для $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, $h$ возможна слѣдующая система значеній:

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 2i,$$

$$f = -\frac{2C}{\alpha + \beta i}, \qquad g = -\frac{2Ci}{\alpha + \beta i}, \qquad h = 0,$$

подобная (6), а соотвѣтствующее ей уравненіе, подобное (9), будетъ вида:

$$BAk(k+1) + 2(C-B)(A-2C) - 2C(B-A)\frac{\beta(\beta+\alpha i)}{\beta^2+\alpha^2} = 0.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе это обращается въ слѣдующее:

$$\left(k-\frac{2}{n}+2\right)\left(k+\frac{2}{n}-1\right)=0,$$

и условіе, чтобы корни его были цѣлыми, требуетъ, чтобы $\frac{2}{n}$ было числомъ цѣлымъ.

Такимъ образомъ приходимъ къ выводу, что $n$ и $\frac{2}{n}$ оба должны быть цѣлыми положительными числами; а это возможно лишь въ двухъ предположеніяхъ: $n=1$ и $n=2$.

Первое приводитъ къ исключенному нами случаю Лагранжа; второе—къ случаю С. В. Ковалевской.

**6.** Предыдущимъ изслѣдованіемъ теорема, формулированная въ концѣ параграфа 1-го, можетъ считаться доказанною.

Если поэтому можетъ быть рѣчь о какихъ либо новыхъ случаяхъ однозначности функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ при вещественныхъ $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и при отличныхъ отъ нуля $A$, $B$, $C$, то только въ предположеніи, что начальныя значенія этихъ функцій подчиняются извѣстнымъ условіямъ.

Въ этомъ отношеніи въ особенности должно обратить вниманіе на условіе вещественности.

До сихъ поръ для величинъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ всякія значенія разсматривались, какъ возможныя, и изъ нашего анализа не слѣдуетъ, что если величины эти предполагать вещественными, то только въ извѣстныхъ трехъ случаяхъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ всегда будутъ однозначными.

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго мы можемъ только утверждать, что во всѣхъ случаяхъ, отличныхъ отъ этихъ трехъ, между системами значеній $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, *дѣлающими модули разностей*

$$p_0-\frac{a}{t_0},\quad q_0-\frac{b}{t_0},\quad r_0-\frac{c}{t_0},\quad \xi_0-\frac{f}{t_0^2},\quad \eta_0-\frac{g}{t_0^2},\quad \zeta_0-\frac{h}{t_0^2}$$

*при одной изъ разсматривавшихся системъ значеній* $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, $h$ *достаточно малыми*, всегда найдутся такія, при которыхъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ не будутъ однозначными.

Но для всѣхъ разсматривавшихся системъ значеній $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, $h$ [какъ и для всякихъ другихъ, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ вида (4)], каково бы ни было $t_0$, изъ величинъ

$$\frac{a}{t_0},\quad \frac{b}{t_0},\quad \frac{c}{t_0},\quad \frac{f}{t_0^2},\quad \frac{g}{t_0^2},\quad \frac{h}{t_0^2}$$

хотя одна всегда выходитъ мнимою. Поэтому въ числѣ указанныхъ сейчасъ системъ значеній $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ можетъ вовсе не оказаться такихъ, для которыхъ значенія эти всѣ были бы вещественными.

Чтобы воспользоваться нашею методой для рѣшенія вопроса въ предположеніи вещественности $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, мы должны для составленія системы (3) вмѣсто разсматривавшихся брать какія либо другія рѣшенія системы (1), съ вещественными начальными значеніями для функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

Тогда разсматривая уравненія (3), мы можемъ быть увѣрены, что всякое условіе, необходимое для однозначности функцій $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ при какихъ бы то ни было начальныхъ значеніяхъ въ какой либо области, не содержащей особенныхъ точекъ коэффиціентовъ этихъ уравненій, есть вмѣстѣ съ тѣмъ условіе, необходимое для однозначности функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ при всякихъ вещественныхъ начальныхъ значеніяхъ.

7. Изъ рѣшеній системы (1), обладающихъ требуемымъ свойствомъ, мы можемъ указать во первыхъ всѣ тѣ, которыя опредѣляются уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq, \\ \xi = \eta &= \zeta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

при вещественныхъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, и слѣдовательно даютъ для $p$, $q$, $r$ такія же выраженія, какъ и въ вопросѣ о вращательномъ движеніи твердаго тѣла по инерціи.

Для того, чтобы въ числѣ рѣшеній этого рода существовали обладающія особенными точками, какъ это необходимо для нашей методы, постоянныя $A$, $B$, $C$ должны быть всѣ различными.

Тогда за исключеніемъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, относящихся къ значеніямъ величинъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, функціи $p$, $q$, $r$ будутъ обладать особенными точками, и всѣ эти особенныя точки будутъ полюсами. Разложенія же функцій $p$, $q$, $r$ вблизи всякаго полюса $t=\tau$ по степенямъ $t-\tau$ будутъ вида

$$p = \frac{a}{t-\tau} + a' + a''(t-\tau) + \ldots,$$

$$q = \frac{b}{t-\tau} + b' + b''(t-\tau) + \ldots,$$

$$r = \frac{c}{t-\tau} + c' + c''(t-\tau) + \ldots,$$

гдѣ $a$, $b$, $c$ будутъ имѣть тѣ или другія величины, выводимыя изъ формулъ (5).

Когда между числами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ хотя одно есть нуль, мы можемъ указать еще рѣшенія другого рода, а именно: рѣшенія, опредѣляющія движенія, свойственныя физическому маятнику.

Если напримѣръ мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда $\beta = 0$, рѣшенія эти опредѣлятся уравненіями:

$$p = r = \eta = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} = \gamma\xi - \alpha\zeta,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -q\zeta, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = q\xi,$$

въ предположеніи, что $q_0$, $\xi_0$, $\zeta_0$ вещественны.

Для того, чтобы между этими рѣшеніями существовали обладающія особенными точками, изъ чиселъ $\alpha$ и $\gamma$ по крайней мѣрѣ одно должно быть отличнымъ отъ нуля.

Тогда, если исключить нѣкоторыя частныя предположенія относительно величинъ $q_0$, $\xi_0$, $\zeta_0$, функціи $q$, $\xi$, $\zeta$ будутъ обладать особенными точками, которыя всѣ будутъ полюсами; а разложенія этихъ функцій вблизи всякаго полюса $t = \tau$ будутъ вида:

$$q = \frac{b}{t-\tau} + b' + b''(t-\tau) + \ldots,$$

$$\xi = \frac{f}{(t-\tau)^2} + \frac{f'}{t-\tau} + f'' + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{h}{(t-\tau)^2} + \frac{h'}{t-\tau} + h'' + \ldots,$$

гдѣ $b$, $f$, $h$ опредѣлятся по формуламъ (6).

Таковы будутъ рѣшенія, которыми мы теперь воспользуемся взамѣнъ рѣшеній типа (4).

8. Останавливаясь на какомъ либо изъ указанныхъ сейчасъ рѣшеній системы (1) и разсматривая соотвѣтствующую ему систему (3) вблизи какого либо изъ полюсовъ ея коэффиціентовъ, нетрудно замѣтить, что она будетъ принадлежать къ классу системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ исключительно правильными рѣшеніями.

Дѣйствительно, всѣ рѣшенія системы (1), которыми мы здѣсь пользуемся, таковы, что вблизи всякаго ихъ полюса $t=\tau$ имѣютъ мѣсто разложенія вида:

$$\begin{aligned}(t-\tau)p &= a+a'(t-\tau)+\dots,\\ (t-\tau)q &= b+b'(t-\tau)+\dots,\\ (t-\tau)r &= c+c'(t-\tau)+\dots,\\ (t-\tau)^2\xi &= f+f'(t-\tau)+\dots,\\ (t-\tau)^2\eta &= g+g'(t-\tau)+\dots,\\ (t-\tau)^2\zeta &= h+h'(t-\tau)+\dots.\end{aligned}$$

Поэтому, если положимъ

$$u=x_1,\qquad v=x_2,\qquad w=x_3,$$
$$(t-\tau)x=x_4,\qquad (t-\tau)y=x_5,\qquad (t-\tau)z=x_6$$

и затѣмъ, измѣнивши для упрощенія формулъ обозначеніе независимаго перемѣннаго, вмѣсто $t-\tau$ будемъ писать $t$, то система (3) приведется къ виду:

$$t\frac{dx_s}{dt}=P_{s1}(t)x_1+P_{s2}(t)x_2+\dots+P_{s6}(t)x_6,\qquad (s=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6)$$

гдѣ $P_{sj}(t)$ означаютъ функціи $t$, способныя при достаточно маломъ $|t|$ представляться рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $t$.

Такимъ образомъ система (3) привелась къ каноническому виду системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, всѣ рѣшенія которыхъ вблизи точки $t=0$ суть правильныя *).

Для такихъ системъ всегда легко найти всѣ условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы во всякомъ ихъ рѣшеніи опредѣляемыя ими функціи вблизи точки $t=0$ были однозначными.

Для нашей цѣли однако же нѣтъ надобности разсматривать всѣ условія этого рода, а достаточно обратить вниманіе на одно изъ необходимыхъ, которое состоитъ въ томъ, чтобы функціи $x_s$, опредѣляемыя слѣдующею системою линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.t\frac{dx_s}{dt}=P_{s1}(0)x_1+P_{s2}(0)x_2+\dots+P_{s6}(0)x_6\right\}\qquad (s=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6) \tag{11}$$

во всякомъ рѣшеніи этой системы были однозначными.

*) Относительно такихъ системъ уравненій можно между прочимъ указать на изслѣдованія Sauvage (Ann. scientif. de l'école norm. super., 3 série, tomes 3, 5 et 6).

Но система (11) есть та самая, которую при различныхъ предположеніяхъ относительно $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, $h$ мы разсматривали въ предыдущихъ параграфахъ, и изслѣдованіе которой насъ привело только къ извѣстнымъ тремъ случаямъ.

Мы можемъ поэтому утверждать, что случаи эти суть единственные, въ которыхъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ однозначны при всякихъ вещественныхъ начальныхъ значеніяхъ.

**9.** Въ послѣднихъ параграфахъ, предполагая $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ вещественными, мы не подчиняли ихъ, кромѣ этого, никакимъ другимъ условіямъ.

Но въ вопросѣ механики, который приводитъ къ уравненіямъ (1), величины $\xi$, $\eta$, $\zeta$ означаютъ косинусы угловъ нѣкотораго направленія съ тремя взаимно перпендикулярными осями. Поэтому функціи $\xi$, $\eta$, $\zeta$, а слѣдовательно и ихъ начальныя значенія $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ должны быть таковы, чтобы ихъ сумма квадратовъ была равною 1.

Является вопросъ, не существуетъ ли какихъ либо новыхъ случаевъ, въ которыхъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ выходили бы однозначными при всякихъ вещественныхъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, удовлетворяющихъ соотношенію

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

и вопросъ этотъ тѣмъ болѣе умѣстенъ, что когда $A$, $B$, $C$ всѣ различны, а изъ чиселъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ни одно не нуль, возможность многозначныхъ рѣшеній уравненій (1) была нами доказана только въ предположеніи, что численныя значенія величинъ $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ достаточно малы.

Небольшое размышленіе приводитъ, однако, тотчасъ же къ отрицательному отвѣту на этотъ вопросъ.

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго во всякомъ случаѣ, который не приводится къ одному изъ извѣстныхъ трехъ, величинамъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ всегда можно приписать такія вещественныя значенія, при которыхъ функціи $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ (всѣ или только нѣкоторыя) не будутъ однозначными.

Пусть же въ какомъ либо изъ такихъ случаевъ уравненіями

$$p = f_1(t), \qquad q = f_2(t), \qquad r = f_3(t),$$
$$\xi = \varphi_1(t), \qquad \eta = \varphi_2(t), \qquad \zeta = \varphi_3(t),$$

представляется одно изъ многозначныхъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ вещественнымъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$.

Какъ и во всякомъ другомъ рѣшеніи системы (1), функціи $\xi$, $\eta$, $\zeta$, опредѣляемыя этими уравненіями, будутъ удовлетворять соотношенію

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sigma^2,$$

гдѣ $\sigma$ нѣкоторое постоянное. Для нашего же рѣшенія постоянное это навѣрно будетъ отличнымъ отъ нуля, ибо въ противномъ случаѣ вслѣдствіе предположенной вещественности величинъ $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ мы имѣли бы

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0,$$

а тогда рѣшеніе наше необходимо совпадало бы съ однимъ изъ рѣшеній, опредѣляемыхъ уравненіями (10), и слѣдовательно, противно допущенному, не было бы многозначнымъ.

Если же $\sigma$ не нуль, мы можемъ составить уравненія

$$p = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \xi = \frac{1}{\sigma} \varphi_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \eta = \frac{1}{\sigma} \varphi_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \zeta = \frac{1}{\sigma} \varphi_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

и уравненіями этими опредѣлится, какъ нетрудно видѣть, также нѣкоторое рѣшеніе системы (1). А рѣшеніе это при $\sigma$ положительномъ соотвѣтствуетъ вещественнымъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

и по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ выходятъ въ немъ навѣрно многозначными.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему выводу:

*Всякій разъ, когда при вещественныхъ $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и при отличныхъ отъ нуля $A$, $B$, $C$ мы не имѣемъ дѣло ни съ однимъ изъ трехъ извѣстныхъ случаевъ, начальнымъ значеніямъ $p_0$, $q_0$, $r_0$, $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ всегда можно приписать такія вещественныя величины, согласныя съ условіемъ*

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

*при которыхъ по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ не будутъ однозначными.*

# О высшихъ предѣлахъ корней алгебраическихъ уравненій.

**П. Н. Рахманова.**

§ 1. Для нахожденія высшихъ предѣловъ положительныхъ корней численныхъ уравненій въ настоящее время существуетъ уже нѣсколько способовъ. Въ предлагаемой статьѣ мы даемъ еще два новыхъ способа, которые иногда для названныхъ предѣловъ даютъ величину менѣе высокую, чѣмъ другіе. Кромѣ того, здѣсь же мы указываемъ на одинъ довольно общій случай, когда высшимъ предѣломъ положительныхъ корней будетъ единица.

§ 2. Первый способъ. Положимъ, что въ цѣлой раціональной функціи

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

коэффиціенты

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m-1}$$

всѣ положительные, а коэффиціентъ $a_m$ — первый отрицательный; тогда очевидно, что, полагая $x > 1$, будемъ имѣть:

$$f(x) > \sum_{k=0}^{k=m-1} a_k \cdot x^{n-m+1} + a_m x^{n-m} + a_{m+1} x^{n-m-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n . \quad (1)$$

Обозначимъ теперь численно наибольшій отрицательный коэффиціентъ данной функціи чрезъ $-a_p$; тогда говоримъ, что при всякомъ $x > 0$, очевидно, будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k \cdot x^{n-m+1} + a_m x^{n-m} + a_{m+1} x^{n-m-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n >$$

$$> \sum_{k=0}^{k=m-1} a_k \cdot x^{n-m+1} - a_p (x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots + x + 1) \ldots \quad (2)$$

На основаніи (2) и (1) ясно, что всѣ тѣ значенія $x > 1$, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k \cdot x^{n-m+1} - a_p (x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots + x + 1) > 0, \quad \ldots (3)$$

à fortiori удовлетворяютъ и неравенству

$$f(x) > 0.$$

Но неравенству (3), по теоремѣ: „всегда можно найти столь большое положительное значеніе $x$, что знакъ всего полинома будетъ одинаковъ со знакомъ члена съ наивысшей степенью $x$“, удовлетворяетъ

$$x > 1 + \frac{a_p}{\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k};$$

слѣдовательно, за высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$f(x) = 0$$

можно принять выраженіе:

$$1 + \frac{a_p}{\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k}.$$

Примѣръ:

$$4x^{10} + 696x^9 - 800x^8 - 100x^4 + 21x^2 - 2100 = 0.$$

Здѣсь

$$1 + \frac{a_p}{\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k} = 1 + \frac{2100}{4 + 696} = 4;$$

значитъ искомый предѣлъ будетъ 4.

§ 3. Второй способъ. Возьмемъ цѣлую раціональную функцію въ видѣ

$$F(x) = a_{n_0} x^{n_0} + a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \ldots + a_{n_{\nu-1}} x^{n_{\nu-1}} + a_{n_\nu},$$

гдѣ

$$n_0 > n_1 > n_2 > \ldots.$$

Функцію эту мы можемъ представить такъ:

$$F(x) = f_1(x) - \varphi_1(x) + f_2(x) - \varphi_2(x) + \ldots + f_m(x) - \varphi_m(x),$$

гдѣ подъ $f_k(x)$ слѣдуетъ разумѣть суммы положительныхъ, рядомъ стоящихъ, членовъ, а подъ $-\varphi_k(x)$ — суммы отрицательныхъ, рядомъ стоящихъ, членовъ. Назовемъ чрезъ $r_k$ показателя степени $x$ въ послѣднемъ членѣ функціи $f_k(x)$ и чрезъ $\rho_k$ — показателя степени $x$ въ первомъ членѣ функціи $\varphi_k(x)$; назовемъ далѣе, чрезъ $s_k$ сумму всѣхъ коэффиціентовъ функціи $f_k(x)$ и чрезъ $\sigma_k$ — сумму всѣхъ коэффиціентовъ функціи $\varphi_k(x)$. Тогда, предполагая $x \geqq 1$, будемъ имѣть:

$$F(x) \geqq s_1 x^{r_1} - \sigma_1 x^{\rho_1} + s_2 x^{r_2} - \sigma_2 x^{\rho_2} + \ldots + s_m x^{r_m} - \sigma_m x^{\rho_m}. \quad . \quad (4)$$

Отсюда ясно, что всѣ тѣ значенія $x \geqq 1$, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$s_1 x^{r_1} - \sigma_1 x^{\rho_1} + s_2 x^{r_2} - \sigma_2 x^{\rho_2} + \ldots + s_m x^{r_m} - \sigma_m x^{\rho_m} > 0, \quad . \quad . \quad (5)$$

удовлетворятъ также и неравенству:

$$F(x) > 0.$$

Но неравенству (5), какъ легко видѣть, удовлетворяетъ $x$, величина котораго больше наибольшаго изъ слѣдующихъ выраженій:

$$\sqrt[r_1-\rho_1]{\frac{\sigma_1}{s_1}}, \quad \sqrt[r_2-\rho_2]{\frac{\sigma_2}{s_2}}, \ldots, \sqrt[r_m-\rho_m]{\frac{\sigma_m}{s_m}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

значитъ наибольшее изъ выраженій (6) можетъ быть принято за высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія:

$$F(x) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Само собою разумѣется, что въ томъ частномъ случаѣ, когда всѣ подрадикальныя дроби

$$\frac{\sigma_1}{s_1}, \quad \frac{\sigma_2}{s_2}, \ldots, \frac{\sigma_m}{s_m}$$

будутъ правильныя, за высшій предѣлъ положительныхъ корней слѣдуетъ взять единицу.

Примѣръ:

$$x^7 - 9x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 400x - 1 = 0$$

Здѣсь

$$\sqrt[r_1-\rho_1]{\frac{\sigma_1}{s_1}} = \sqrt[7-5]{\frac{9}{1}} = 3,$$

$$\sqrt[r_2-\rho_2]{\frac{\sigma_2}{s_2}} = \sqrt[4-3]{\frac{6+8}{7}} = 2,$$

$$\sqrt[r_3-\rho_3]{\frac{\sigma_3}{s_3}} = \sqrt[1-0]{\frac{1}{400}} = \frac{1}{400}.$$

Наибольшее изъ этихъ выраженій есть первое, а потому искомый предѣлъ есть число 3.

§ 4. Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что если коэффиціенты уравненія (7) удовлетворяютъ условію

$$s_k - \sigma_k \geqq 0$$

для всѣхъ значеній

$$k = 1, 2, 3, \ldots, m,$$

то высшимъ предѣломъ положительныхъ корней будетъ единица. Покажемъ теперь, что предѣлъ этотъ будетъ равняться единицѣ и въ томъ болѣе общемъ случаѣ, когда между коэффиціентами уравненія существуетъ рядъ соотношеній вида

$$\sum_{k=1}^{k=i}(s_k - \rho_k) \geqq 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

гдѣ

$$i = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x \geqq 1$, будемъ имѣть, во 1-хъ, знакомое уже намъ неравенство или равенство

$$F(x) \geqq \sum_{k=1}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \rho_k x^{\rho_k}), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

и во 2-хъ, на основаніи (A), еще такой рядъ неравенствъ или равенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{k=1}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq (s_1 - \sigma_1)x^{\rho_1} + \sum_{k=2}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_1 x^{\rho_k}) \\
(s_1 - \sigma_1)x^{\rho_1} + \sum_{k=2}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq \sum_{k=1}^{k=2}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_2} + \sum_{k=3}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \\
\sum_{k=1}^{k=2}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_2} + \sum_{k=3}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq \sum_{k=1}^{k=3}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_3} + \sum_{k=4}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \\
\cdots\cdots\cdots

# Извлеченіе изъ письма академика А. А. Маркова къ профессору К. А. Андрееву *)

Въ послѣдней книжкѣ „Сообщеній Харьковскаго Матем. Общества“ помѣщена статья, найденная въ бумагахъ академика В. Г. Имшенецкаго. Осмѣливаюсь высказать убѣжденіе, что академикъ В. Г. Имшенецкій никогда не публиковалъ бы этой статьи . . . . . .

. . . . . .

Заблужденія содержащіяся въ статьѣ „Сравненіе способа профес. Н. В. Бугаева съ другими . . .“ выясняются слѣдующими примѣрами.

Примѣръ 1.

Придерживаясь обозначеній разбираемой статьи, положимъ:

$$L = 3 + x, \quad M = 2 - (3 + x)(2 - x + x^2), \quad N = (1 + x^2)(3 + x)^2,$$
$$P = 2(3 + x)(1 + x^2) - 2(3 + x)^2, \quad Q = -2 + x - x^2 + 3(3 + x),$$
$$R = -1.$$

Тогда

$$M_1 = -(3 + x)(2 - x + x^2), \quad Q_1 = (3 + x)(2 + 2x),$$
$$P_1 = -(2 + 2x)(3 + x)^2,$$

и

$$v = 3 + x$$

будетъ такимъ общимъ дѣлителемъ функцій

$$L, \; M_1 \text{ и } Q_1$$

*) Въ настоящемъ извлеченіи точками обозначены тѣ мѣста письма, которыя распорядительный комитетъ Общества не нашелъ возможнымъ печатать. *Ред.*

наивысшей степени, квадратъ котораго дѣлитъ

$$N \text{ и } P_1 .$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ предложенное дифференціальное уравненіе

$$Ly'' + (M + 2Ny)y' + Py^2 + Qy + R = 0$$

допускаетъ рѣшеніе

$$y = \frac{1}{3 + x},$$

числитель котораго 1 удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (III) или равносильному ему (IV)

$$(lz)'' + (m_1 z)' + q_1 z + (nz^2)' + p_1 z^2 + R = 0,$$

гдѣ

$$l = 1, \; m_1 = -2 + x - x^2, \; q_1 = 2 + 2x, \; n = 1 + x^2$$
$$p_1 = -2 - 2x, \; R = -1 .$$

И въ силу сказаннаго на стр. 65 („Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія) послѣднее дифференціальное уравненіе не можетъ допускать дробныхъ рѣшеній.

Въ дѣйствительности же оно допускаетъ рѣшеніе

$$z = \frac{1}{x} .$$

Ошибка автора состоитъ въ томъ, что функціи

$$l_2, \; m_3, \; q_3, \; n_2, \; p_3$$

могутъ быть и дробными, авторъ же предполагаетъ ихъ непремѣнно цѣлыми.

Примѣръ 2.

Возьмемъ:

$$L = (1 + x), \; M_1 = (1 + x)(1 - x + x^2), \; Q_1 = 2(1 + x)(1 - x),$$
$$N = (1 + x)^2 (1 + x^2 + x^4), \; P_1 = (1 + x)^2 (1 - 2x - 4x^3),$$
$$R = 1 + 2x$$

и приложимъ способъ, указанный въ § 6 разбираемой статьи, къ разысканію раціональныхъ рѣшеній уравненія

$$(Ly)'' + (M_1 y)' + Q_1 y + (Ny^2)' + P_1 y^2 + R = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Въ данномъ случаѣ общій дѣлитель наивысшей степени для

$$L,\ M_1 \text{ и } Q_1$$

равенъ

$$1+x$$

и квадратъ его дѣлитъ

$$N \text{ и } P_1.$$

Поэтому, согласно правилу § 6, мы должны перейти къ уравненію

$$\left(\frac{Lz}{1+x}\right)''+\left(\frac{M_1z}{1+x}\right)'+\frac{Q_1z}{1+x}+\left(\frac{Nz^2}{(1+x)^2}\right)'+\frac{P_1z^2}{(1+x)^2}+R=0,$$

т. е. къ уравненію

$$z''+[1-x+x^2+2(1+x^2+x^4)z]z'+z^2+z+1+2x=0,$$

и искать для него цѣлыя рѣшенія.

Но цѣлыхъ рѣшеній послѣднее уравненіе не допускаетъ.

И потому, согласно утвержденіямъ стр. 69 разбираемой статьи, не можетъ быть сомнѣнія, что предложенное уравненіе (A) не допускаетъ раціональныхъ рѣшеній.

Въ дѣйствительности же оно допускаетъ рѣшеніе

$$y=\frac{1}{x(x+1)}.$$

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что знаменатель $v$ дробнаго рѣшенія

$$y=\frac{u}{v}$$

дифференціальнаго уравненія

$$(Ly)''+(M_1y)'+Q_1y+(Ny^2)'+P_1y^2+R=0$$

можетъ заключать такіе простые множители, которые не дѣлятъ ни одну изъ цѣлыхъ функій

$$L,\ M_1,\ Q_1,\ N,\ P_1,\ M,\ Q \text{ и } P.$$

Эти множители представляютъ одно изъ главныхъ затрудненій, которое въ статьѣ „Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими“ оставлено вовсе безъ вниманія . . . . . .

. . . . . Если уже для уравненій линейныхъ эти пріемы не только уступаютъ естественнымъ пріемамъ Ліувилля, но и требуютъ, какъ

показали проф. К. А. Поссе и П. А. Некрасовъ *), существенныхъ измѣненій **), то перенесеніе ихъ на уравненія нелинейныя едва ли можетъ принести большую пользу.

Здѣсь считаю необходимымъ оговориться, что до сихъ поръ неизвѣстно такихъ пріемовъ, которые давали бы для всякаго дифференціальнаго уравненія полное рѣшеніе вопроса, допускаетъ ли оно раціональныя рѣшенія или нѣтъ.

Однако, для одного изъ классовъ уравненій, упоминаемыхъ академикомъ В. Г. Имшенецкимъ, это можно сдѣлать довольно просто, пользуясь, конечно, иными пріемами.

Я говорю объ уравненіяхъ, получаемыхъ изъ однородныхъ линейныхъ извѣстною подстановкою

$$\frac{y'}{y} = z .$$

О разысканіи раціональныхъ рѣшеній такихъ уравненій мною было сдѣлано сообщеніе въ С.-Петербургскомъ Матем. Обществѣ, вѣроятно, въ ноябрѣ 1891 года . . . . . .

. . . . . Сущность моего сообщенія можно найти въ Comptes-Rendus за 1891 годъ.

Здѣсь обнаруживается тотъ важный фактъ, что нѣкоторую дробную часть рѣшенія приходится отыскивать послѣ всего.

И потому предварительное опредѣленіе знаменателя едва ли возможно.

---

*) Математическій Сборникъ, Т. XVII.

**) Измѣненіе множителя сдѣлало пріемы Имшенецкаго равносильными пріемамъ Ліувилля. *(Примѣч. автора).*

# Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

(Отвѣтъ на критику академика А. А. Маркова).

К. А. Андреева *).

Покойный академикъ В. Г. Имшенецкій за нѣсколько мѣсяцевъ до своей смерти возъимѣлъ намѣреніе приложить тѣ руководящія идеи, которымъ онъ слѣдовалъ въ своихъ работахъ по разысканію раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, къ подобнымъ же цѣлямъ относительно нѣкоторыхъ видовъ уравненій нелинейныхъ. Примѣры, на которые онъ прежде всего обратилъ по этому поводу свое вниманіе, показали ему, что иногда это приложеніе оказывается возможнымъ; и вотъ осенью 1891 года онъ рѣшился изложить въ засѣданіи Петербургскаго Математическаго Общества, тогда еще не бывшаго оффиціально утвержденнымъ, какъ свои общія соображенія, такъ и примѣры.

О томъ, что это дѣйствительно было имъ сдѣлано, и именно въ октябрѣ 1891 года, я получилъ увѣдомленіе отъ него самого въ письмѣ отъ 17 октября. Вслѣдствіе этого я былъ почти увѣренъ, что въ бумагахъ покойнаго ученаго должны были сохраниться слѣды этихъ работъ его мысли.

При разборѣ этихъ бумагъ я дѣйствительно нашелъ двѣ рукописи, посвященныя названному вопросу. Одна была переписана начисто и какъ бы приготовлена къ печати, но представляла нѣкоторыя недо-

*) Статья эта ранѣе ея доклада Обществу разсматривалась распорядительнымъ комитетомъ. По желанію послѣдняго въ ней сдѣланы нѣкоторыя сокращенія. *Ред.*

статки изложенія. Другая имѣла внѣшность менѣе обработанную. По содержанію обѣ онѣ оказались въ значительной части сходными.

Зная, что эти рукописи содержатъ то самое, что уже было предметомъ устнаго сообщенія ученому Обществу, я ни на минуту не сомнѣвался, что содержаніе ихъ, какъ бы оно ни было несовершенно по формѣ и недостаткамъ внутренняго характера, составляетъ уже достояніе науки и, какъ таковое, подлежитъ напечатанію.

Выбрать для опубликованія только одну изъ двухъ рукописей оказалось невозможнымъ, потому что онѣ во многомъ дополняютъ одна другую. То, что въ первой можетъ показаться совершенно непонятнымъ, выясняется при чтеніи второй, и наоборотъ, недосказанное во второй можно найти въ первой. Вслѣдствіе этого, воспользовавшись совѣтомъ профессора П. А. Некрасова, я рѣшился напечатать ихъ обѣ, какъ двѣ редакціи одной и той же работы. При этомъ изъ второй рукописи были выпущены вступленіе, одинаковаго содержанія съ вступленіемъ первой и подавшее, очевидно, автору поводъ къ не вполнѣ удачному заглавію *), и нѣкоторые примѣры.

Что произведеніе акад. В. Г. Имшенецкаго, заключающееся въ этихъ рукописяхъ, есть трудъ далеко незаконченный и представляющій нѣкоторыя несовершенства, для меня не подлежало сомнѣнію. Къ тому же я зналъ, что такъ смотрѣлъ на него и самъ авторъ, писавшій 15-го марта 1892 года въ письмѣ къ проф. Н. В. Бугаеву: „Я предполагалъ еще поработать надъ предложеннымъ мною пріемомъ, чтобы его дополнить“.

Это обстоятельство не можетъ, однако, уменьшить, на мой взглядъ, интереса къ произведенію столь выдающагося ученаго и не отклонило меня отъ его изданія, хотя я и предвидѣлъ возможность неблагопріятной для него критики.

Всякій, желающій взять на себя роль критика посмертнаго произведенія, не долженъ, по моему мнѣнію, упускать изъ виду, что отъ автора онъ уже не можетъ получить разъясненія какихъ-либо недоразумѣній. Въ такихъ условіяхъ необходима крайняя осторожность, чтобы не приписать автору тѣхъ намѣреній, какихъ у него не было и не придать словамъ его того значенія, какого онъ самъ не подразумѣвалъ.

Едва появилась въ печати работа академ. В. Г. Имшенецкаго, какъ акад. А. А. Марковъ пожелалъ выступить противъ нея съ критикою, указывающею исключительно на ея недостатки и не имѣющею въ то же

*) Это заглавіе, не смотря на его несоотвѣтствіе съ существенною частью содержанія работы, указываетъ съ одной стороны на генезисъ мыслей автора, начавшаго свои изслѣдованія съ критическаго взгляда на пріемъ проф. Н. В. Бугаева, а съ другой на то, что скромной задачей автора было прежде всего выяснить возможность получать иногда его способомъ результаты быстрѣе, чѣмъ при помощи способовъ, основанныхъ на употребленіи непрерывныхъ дробей.

время признаковъ осторожности, о которой только что было сказано. Критика эта составляетъ содержаніе письма, предназначавшагося его авторомъ къ напечатанію въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общества“ и помѣщеннаго выше въ извлеченіи (см. стр. 146—149).

Издавши недоконченную работу акад. В. Г. Имшенецкаго, я предполагалъ въ особой своей статьѣ, посвященной обзору его дѣятельности, представить рядъ замѣчаній въ формѣ комментарія, имѣя въ виду, главнымъ образомъ, связь идей автора въ этомъ и предыдущихъ его произведеніяхъ. Критика академика А. А. Маркова вынуждаетъ меня приступить къ осуществленію этого намѣренія ранѣе, чѣмъ я предполагалъ, и притомъ не независимо, а въ видѣ отвѣта на эту критику.

Критическій пріемъ академика А. А. Маркова простъ и коротокъ. Онъ приводитъ два примѣра, допускающіе рѣшенія, существованія которыхъ, по буквальному смыслу двухъ, въ отдѣльности взятыхъ, мѣсть статьи акад. В. Г. Имшенецкаго, предположить нельзя, и утверждаетъ, что этимъ выясняются заблужденія и ошибки покойнаго автора.

Такое отношеніе къ дѣлу я рѣшаюсь назвать формальнымъ и объясняю его себѣ только тѣмъ, что критикующій не всмотрѣлся въ работу акад. В. Г. Имшенецкаго достаточно внимательно.

Съ своей стороны, разобравши еще разъ подробно все, что находится въ обѣихъ редакціяхъ статьи акад. В. Г. Имшенецкаго, я прихожу къ заключенію, что примѣрами акад. А. А. Маркова не выясняется ничего, такъ какъ эти примѣры потому уже не противорѣчатъ истинному смыслу утвержденій статьи, что вовсе ему не соотвѣтствуютъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, я не нахожу въ этой статьѣ ни ошибокъ, ни заблужденій, а усматриваю, какъ и прежде, лишь недоконченность всей работы, да погрѣшности изложенія, отнюдь не обусловливающіяся какою-либо неправильностью сужденій, т. е. недостатки, вполнѣ естественные въ произведеніи, за разработкою котораго автора застигла смерть.

Чтобы подтвердить все это, необходимо войти въ подробности.

Если изучающій пріемы акад. В. Г. Имшенецкаго въ вопросѣ о разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій пожелаетъ безпристрастно *) усвоить себѣ весь ходъ его идей, то долженъ прежде всего обратить свое вниманіе на слѣдующее.

Положивши въ основаніе своего пріема особое преобразованіе уравненія, которое можно было бы назвать подведеніемъ коэффиціентовъ при производныхъ подъ знакъ дифференцированія, покойный авторъ ограничиваетъ сперва свои дальнѣйшія изысканія лишь тѣми случаями,

*) Здѣсь разумѣется пристрастіе не личное, а идейное, т. е. склонность предпочитать одинъ образъ мыслей, болѣе намъ привычный, другому, съ которымъ нужно еще освоиться.

когда это преобразованіе приводитъ къ нахожденію знаменателя искомаго интеграла *непосредственно*, т. е. будучи примѣнено къ уравненію, взятому въ его заданномъ видѣ. Затѣмъ слѣдуетъ примѣненіе того-же пріема къ уравненію, помноженному на нѣкоторый множитель. Обѣ эти стадіи сужденій проходятся покойнымъ ученымъ отдѣльно и въ названной послѣдовательности, какъ въ его статьяхъ, относящихся къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, такъ и въ разбираемой теперь, найденной послѣ его смерти, работѣ.

Хотя въ первой редакціи этой работы объ этой послѣдовательности сужденій и не упоминается столь-же обстоятельно, какъ въ статьяхъ о линейныхъ уравненіяхъ, но внимательный читатель все же легко замѣтитъ, что эта послѣдовательность имѣетъ здѣсь мѣсто, и что все, что говорится въ параграфахъ 4-мъ и 5-мъ, относится къ первой или предварительной стадіи сужденій. Во второй редакціи эта предварительная часть значительно сокращена, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, указаніе на названное раздѣленіе пріема сдѣлано отчетливо (см. стр. 73).

Только принимая во вниманіе все сейчасъ сказанное, можно понять точный смыслъ того, что говорится въ 4-мъ параграфѣ первой редакціи, не преувеличивая, какъ это дѣлаетъ акад. А. А. Марковъ, общности дѣлаемыхъ здѣсь заключеній.

Заданное уравненіе трактуется В. Г. Имшенецкимъ, очевидно, какъ допускающее такое рѣшеніе $y = \frac{u}{v}$, знаменатель котораго *можетъ быть опредѣленъ непосредственно*, что ясно указывается вторымъ условіемъ высказываемой теоремы, условіемъ, поставленнымъ въ концѣ ея. О такихъ только рѣшеніяхъ и говорится въ этомъ параграфѣ вообще. Въ этомъ ограниченномъ смыслѣ нужно, слѣдовательно, понимать слово рѣшеніе и въ утвержденіи: „Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія $z = \frac{u_1}{v_1}$“, а также и въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ, служащихъ ему доказательствомъ.

Академикъ А. А. Марковъ, очевидно, понимаетъ это утвержденіе не въ такомъ относительномъ смыслѣ, а совершенно абсолютно, что видно изъ его словъ, которыми онъ заключаетъ свой примѣръ, служащій, по его мнѣнію, опроверженіемъ этого утвержденія:

„Ошибка автора состоитъ въ томъ, что функціи $l_2$, $m_3$, $q_3$, $n_2$, $p_3$ могутъ быть и дробными, авторъ же предполагаетъ ихъ непремѣнно цѣлыми“.

Я нахожу, напротивъ, что самъ критикъ впадаетъ здѣсь въ ошибку, игнорируя, что въ способѣ В. Г. Имшенецкаго существуетъ еще примѣненіе интегрирующаго множителя, назначеніе котораго въ томъ и состоитъ, чтобы случаи, когда функціи $l_2$, $m_3$, ... могутъ быть дробными, приводить къ случаямъ, когда онѣ цѣлыя.

Въ той части работы, гдѣ ведутся теоретическія разсужденія о рѣшеніяхъ, находимыхъ *безъ посредства множителя*, авторъ имѣлъ, слѣдовательно, полное право считать названныя функціи цѣлыми.

Сказаннымъ я не желаю утверждать, что въ статьѣ акад. В. Г. Имшенецкаго существуютъ указанія, слѣдуя которымъ можно найти интегрирующій множитель въ примѣрѣ акад. А. А. Маркова. Вопроса о томъ, приводитъ-ли способъ В. Г. Имшенецкаго всегда къ нахожденію существующаго раціональнаго рѣшенія, я коснусь ниже, но какой-бы на него ни послѣдовалъ отвѣтъ, вышеприведенныя замѣчанія о несоотвѣтствіи возраженій значенію словъ автора остаются въ силѣ.

Наибольшаго вниманія со стороны комментатора разсматриваемой работы акад. В. Г. Имшенецкаго требуютъ тѣ ея мѣста, гдѣ говорится о невозможности раціональныхъ рѣшеній вообще. Это тѣ мѣста, гдѣ, къ сожалѣнію, вкрались самыя нежелательныя погрѣшности изложенія. Критика этихъ мѣстъ легка. Тѣмъ не менѣе внимательный критикъ не долженъ поступать такъ рѣшительно и формально какъ акад. А. А. Марковъ, признающій, очевидно, свой второй примѣръ достаточнымъ фактическимъ опроверженіемъ цитируемаго имъ утвержденія, чтобы не входить въ дальнѣйшее разсмотрѣніе опровергаемаго.

Считая за лучшее не рубить, а развязывать узелъ, постараюсь добраться до смысла опровергаемаго утвержденія сличая соотвѣтственныя мѣста обѣихъ редакцій работы В. Г. Имшенецкаго.

Въ первой редакціи о невозможности раціональныхъ интегралов говорится при переходѣ отъ непосредственнаго разысканія къ способу, основанному на примѣненіи множителя (см. стр. 69); во второй же послѣ всего (см. стр. 75), гдѣ это оказывается болѣе умѣстнымъ *). Вмѣстѣ съ тѣмъ, во второй редакціи высказываемое объ этомъ предметѣ заключеніе вполнѣ опредѣленно и не можетъ подать повода къ тѣмъ же недоразумѣніямъ, какъ начало 6-го параграфа въ первой редакціи.

Сопоставляя эти мѣста обѣихъ редакцій, безпристрастный критикъ необходимо придетъ къ убѣжденію, что въ охарактеризованіи двухъ случаевъ въ началѣ 6-го параграфа подъ однимъ и тѣмъ же обозначеніемъ $v$ необходимо подразумѣвать (какъ безъ сомнѣнія подразумѣвалъ и самъ авторъ) двѣ вещи совершенно разныя. Въ первомъ случаѣ $v$ есть тотъ общій дѣлитель функцій $L$, $M_1$, $Q_1$, $N$ и $P_1$, о которомъ говорилось нѣсколькими строками ранѣе. Во второмъ же $v$ есть то, что во второй редакціи обозначено буквою $Y$, т. е., какъ сказано на стр. 75, полиномъ, долженствующій представлять знаменателя искомаго рѣшенія. Только при такомъ различеніи значеній буквы $v$ въ двухъ разсматриваемыхъ случаяхъ становится понятнымъ смыслъ дальнѣйшихъ строкъ

*) Это и нѣкоторые другіе признаки заставляютъ заключить, что вторая редакція позднѣйшая.

и между прочимъ того, почему авторъ находитъ достаточнымъ разсматривать примѣненіе интегрирующаго множителя лишь въ первомъ случаѣ.

Нельзя же, въ самомъ дѣлѣ, думать, что акад. В. Г. Имшенецкій, находя нужнымъ при извѣстныхъ условіяхъ прибѣгать къ интегрирующему множителю, когда обозначенный чрезъ $v$ общій дѣлитель коэффиціентовъ имѣетъ постоянное значеніе, полагалъ безполезнымъ это дѣлать при тѣхъ-же условіяхъ, когда этотъ общій дѣлитель есть полиномъ, будучи будто-бы увѣренъ, что въ этомъ случаѣ (включающемъ въ себѣ предыдущій и приводящемся къ нему простою замѣною $vy$ чрезъ $z$) искомаго рѣшенія вовсе не существуетъ.

Обозначеніе однимъ и тѣмъ же символомъ двухъ разныхъ понятій, безъ всякаго указанія на подразумѣваемое различіе, есть, конечно, недостатокъ изложенія. Но этого недостатка нѣтъ и слѣда во второй редакціи, а потому, какъ замѣченный и исправленный самимъ авторомъ, онъ не долженъ подлежать осужденію.

Академикъ А. А. Марковъ, опровергая столь рѣшительно утвержденіе параграфа 6-го, долженъ былъ бы принять все это во вниманіе, и я думаю, что его строгая критика была-бы справедливою лишь въ томъ случаѣ, если бы можно было признать за критикующимъ право разсматривать утвержденіе акад. В. Г. Имшенецкаго совершенно формально и безъ сличенія съ соотвѣтствующимъ мѣстомъ второй редакціи статьи.

Обращаюсь теперь къ вопросу о томъ, какое значеніе придавалъ В. Г. Имшенецкій своему способу въ практическомъ смыслѣ и былъ ли онъ увѣренъ, что, слѣдуя этому способу, всегда можно получить раціональное рѣшеніе уравненія разсматриваемаго имъ вида или же убѣдиться въ его несуществованіи.

Такъ какъ основное преобразованіе уравненія показываетъ, что умноженіемъ всего уравненія на соотвѣтственнымъ образомъ подобранный множитель разысканіе дробнаго рѣшенія всегда приводится къ разысканію цѣлаго, то затрудненіе въ достиженіи главной цѣли изысканія можетъ встрѣтиться только въ составленіи этого множителя, который долженъ быть полиномомъ, состоящимъ изъ тѣхъ же линейныхъ дѣлителей, какъ и знаменатель искомаго рѣшенія.

Точныхъ правилъ для нахожденія интегрирующаго множителя во всѣхъ случаяхъ В. Г. Имшенецкій нигдѣ не даетъ, а указываетъ только на возможность такого нахожденія (въ первой редакціи въ началѣ страницы 70-й) или рекомендуетъ руководиться пріемами, сходными съ тѣми, которые имъ употреблялись въ статьѣ, относящейся къ линейнымъ уравненіямъ (во второй редакціи въ началѣ стр. 75-й). Это заставляетъ думать, что такихъ точныхъ правилъ онъ не имѣлъ и самъ. Позволительно даже думать, что онъ имѣлъ преувеличенное представленіе о возможности этихъ правилъ и о ихъ сходствѣ съ пріемами,

вполнѣ достаточными для линейныхъ уравненій. Но не позволительно, мнѣ кажется, игнорировать, что въ этомъ-то именно пунктѣ работа акад. В. Г. Имшенецкаго и является недоконченною.

То самое обстоятельство, что В. Г. Имшенецкій нигдѣ не формулируетъ категорически своего убѣжденія въ безусловной возможности получать всякое раціональное рѣшеніе помощію его способа, а ограничивается въ указанныхъ выше мѣстахъ довольно неопредѣленными намеками, должно бы располагать осторожнаго критика къ тому, чтобы такого убѣжденія ему и не приписывать.

Если бы покойный ученый имѣлъ возможность осуществить свое намѣреніе поработать еще надъ своимъ пріемомъ, то, безъ сомнѣнія, увидѣлъ бы тѣ границы, въ которыхъ онъ приложимъ, и добросовѣстно, какъ всегда, указалъ бы ихъ. Очень можетъ быть, что онъ ограничился бы группою уравненій, приводимыхъ къ линейнымъ однороднымъ подстановкою $y = \frac{z'}{z}$, не обобщая ихъ, какъ въ разбираемой работѣ. Но и тогда его пріемъ представлялъ бы много оригинальнаго и полезнаго въ практическомъ примѣненіи къ примѣрамъ.

Академикъ А. А. Марковъ видитъ главное затрудненіе достиженію цѣли критикуемой имъ работы въ томъ, что нѣкоторые изъ линейныхъ множителей знаменателя искомой дроби могутъ не быть дѣлителями ни одной изъ цѣлыхъ функцій, составленныхъ извѣстнымъ образомъ изъ коэффиціентовъ уравненія. При этомъ онъ утверждаетъ, что это затрудненіе оставлено В. Г. Имшенецкимъ безъ вниманія.

Съ этимъ нужно, конечно, согласиться, но отсюда до усмотрѣнія въ работѣ В. Г. Имшенецкаго *заблужденій* слишкомъ большой шагъ, и академика А. А. Маркова нельзя было-бы упрекнуть въ неосторожномъ употребленіи этого слова лишь въ томъ случаѣ, если бы акад. В. Г. Имшенецкій выразился гдѣ-либо, что упомянутаго затрудненія вовсе нѣтъ, или, что онъ не считаетъ его препятствіемъ къ примѣненію своего метода.

Я увѣренъ съ своей стороны, что В. Г. Имшенецкій, встрѣтившись съ этимъ затрудненіемъ, ясно его увидѣлъ, но только не занялся тотчасъ же разъясненіемъ себѣ его значенія *). Доказательство этому я усматриваю въ слѣдующемъ.

Въ обѣихъ редакціяхъ статьи говорится, что для разысканія линейныхъ множителей знаменателя нужно обращать вниманіе на то, въ какомъ изъ членовъ уравненія этотъ множитель будетъ входить дѣлителемъ въ высшей степени, очевидно, съ цѣлью обнаружить тотъ изъ извѣстныхъ полиномовъ, который на этого множителя дѣлится. Хотя во второй редакціи и не упоминается вовсе о возможности случая, когда

*) Вѣроятно, въ надеждѣ возвратиться къ этому предмету въ болѣе благопріятное для занятій время.

такихъ членовъ будетъ нѣсколько, но нельзя думать, чтобы авторъ не допускалъ этой возможности, ибо въ первой редакціи прямо сказано (въ концѣ 69 стр.), что при $\alpha = 1$, т. е. когда разсматриваемый линейный множитель не есть кратный для знаменателя, оба члена уравненія $Ly''$ и $2Nyy'$ будутъ имѣть его дѣлителемъ въ одной и той же степени. Если авторъ остановился на этомъ замѣчаніи и не вошелъ вслѣдъ за тѣмъ въ разсмотрѣніе указаннаго имъ факта, то этого еще нельзя считать съ его стороны заблужденіемъ. Въ примѣрѣ, который онъ разсматриваетъ, оба коэффиціента $L$ и $N$ дѣлятся на предполагаемаго множителя знаменателя, но очевидно, что это только частный случай, и предполагать, что В. Г. Имшенецкій заблуждался, принимая его за общій, значило бы думать, что онъ считалъ необходимымъ признакомъ дѣлимости суммы дѣлимость каждаго слагаемаго.

Въ виду всего сказаннаго, сужденія академика А. А. Маркова по разсматриваемому вопросу можно-бы было признать справедливыми и безпристрастными, если бы вмѣсто рѣшительнаго обвиненія покойнаго ученаго въ заблужденіи онъ ограничился утвержденіемъ, что въ недоконченной работѣ В. Г. Имшенецкаго оставленъ безъ разсмотрѣнія случай, когда на нѣкоторые множители искомаго знаменателя дѣлится не единственный членъ уравненія, а сумма нѣсколькихъ членовъ, и что подробное разсмотрѣніе этихъ случаевъ приводитъ къ заключенію, что пріемъ В. Г. Имшенецкаго не примѣнимъ къ разсматриваемому имъ типу уравненій во всей допускаемой имъ общности, т. е. при какихъ угодно цѣлыхъ функціяхъ, служащихъ коэффиціентами уравненія.

Усматривая совершенно неосновательно заблужденія въ послѣдней работѣ покойнаго В. Г. Имшенецкаго, академикъ А. А. Марковъ не упускаетъ случая, чтобы подвергнуть осужденію и его прежнія произведенія, посвященныя уравненіямъ линейнымъ. При этомъ для сравнительной оцѣнки имъ употребляется такая неопредѣленная и ничего сама по себѣ не характеризующая мѣра сравненія, какъ степень естественности.

Авторъ критики забываетъ, повидимому, что вся математика есть искусство и что въ ней менѣе искусственно только то, что болѣе первобытно. Изъ всѣхъ способовъ вычисленія самый естественный, безъ сомнѣнія, это счетъ по пальцамъ, но въ то-же время онъ и самый несовершенный. Всякое усовершенствованіе вносится въ математику искусственно; всякій шагъ впередъ обусловливается искусственнымъ расширеніемъ поля зрѣнія или такимъ же улучшеніемъ средствъ изслѣдованія. Можно возставать поэтому только противъ безплодной искусственности, которая ничего новаго не приноситъ и ничего не совершенствуетъ, а этого-то именно недостатка и нельзя приписать способу В. Г. Имшенецкаго.

Основное преобразованіе уравненія въ связи съ употребленіемъ интегрирующаго множителя есть искусственный пріемъ, всецѣло принадле-

жащій изобрѣтательности В. Г. Имшенецкаго, и такъ какъ, благодаря этому пріему устраняется необходимость разсматривать безконечное множество частныхъ случаевъ, заставившая самого Ліувилля ограничиться за предѣлами уравненія второго порядка лишь нѣкоторыми общими указаніями, то въ пріемѣ этомъ нельзя не видѣть всѣхъ признаковъ усовершенствованія.

Благодаря этому пріему, В. Г. Имшенецкій самъ увидѣлъ и далъ увидѣть другимъ возможность формулировать общія правила для разысканія раціональныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій какого угодно $n$-го порядка. Самъ онъ этихъ правилъ не формулировалъ, но это сдѣлалъ, идя по его слѣдамъ, профессоръ П. А. Некрасовъ, на котораго, по моему мнѣнію, совершенно напрасно ссылается академикъ А. А. Марковъ въ подтвержденіе своихъ словъ, будто-бы способъ В. Г. Имшенецкаго требуетъ *существенныхъ измѣненій*.

Во всемъ, что проф. П. А. Некрасовъ писалъ по разсматриваемому вопросу, нѣтъ ни одной строчки, гдѣ говорилось-бы, что развитіе и дополненіе способа В. Г. Имшенецкаго, предлагаемыя этимъ ученымъ, онъ считалъ вносящими въ этотъ способъ *существенныя измѣненія*. Напротивъ, заявивши съ самаго начала своей статьи, посвященной способу В. Г. Имшенецкаго, что онъ принимаетъ на себя долгъ болѣе полнаго разъясненія этого способа, проф. П. А. Некрасовъ говоритъ въ заключеніи: „Пріемы нахожденія дробныхъ рѣшеній ур. (1), указанные въ § 2, совпадаютъ съ пріемами В. Г. Имшенецкаго и лишь пополнены доказательствами ихъ;“ и далѣе: „Указанное въ § 3 дальнѣйшее усовершенствованіе способа В. Г. Имшенецкаго уже заключалось въ его основныхъ идеяхъ, изъ которыхъ В. Г. Имшенецкій лишь не успѣлъ извлечь всѣхъ выгодъ“ *).

Признавая за изслѣдованіями В. Г. Имшенецкаго нѣкоторые недостатки, проф. П. А. Некрасовъ, однако, говоритъ: „Недостатки эти не колеблятъ сущности способа Имшенецкаго, а относятся только къ изложенію“ **).

Ясно, что намѣренія *существенно* измѣнить способъ В. Г. Имшенецкаго профессору П. А. Некрасову приписать нельзя.

Не болѣе основательна, по моему мнѣнію, и ссылка на профессора К. А. Поссе. Этотъ ученый въ своемъ письмѣ, напечатанномъ въ Московскомъ Математическомъ Сборникѣ, выражается слѣдующимъ образомъ ***).

„Я не хочу (этимъ) сказать, что способъ В. Г. Имшенецкаго не можетъ быть дополненъ или нѣсколько видоизмѣненъ такъ, чтобы онъ давалъ возможность найти всѣ раціональныя дробныя рѣшенія, если

*) Математич. Сборн. т. XVII. Москва, 1893, стр. 380—381.

**) Тамъ-же, стр. 343.

***) Тамъ-же, стр. 390.

таковыя существуютъ, а только позволяю себѣ обратить ваше вниманіе на необходимость такихъ дополненій".

Трудно предположить, чтобы выраженія *нѣсколько видоизмѣненъ* и *существенно измѣненъ* считались профессоромъ К. А. Поссе равнозначущими, и едва-ли можно признать, что при замѣнѣ перваго изъ этихъ выраженій вторымъ смыслъ предыдущихъ строкъ останется неискаженнымъ.

Менѣе всего можно согласиться съ мнѣніемъ академика А. А. Маркова, что существенныя измѣненія, внесеніемъ которыхъ пріемы В. Г. Имшенецкаго настолько исправляются, что становятся равносильными пріемамъ Ліувилля, слѣдуетъ видѣть въ измѣненіи вида интегрирующаго множителя.

Профессоръ П. А. Некрасовъ придаетъ, какъ мнѣ кажется, нѣсколько преувеличенное значеніе формѣ интегрирующаго множителя, но и онъ въ своемъ воспроизведеніи сообщенія В. Г. Имшенецкаго, сдѣланнаго имъ за 4 дня до смерти, предложенную авторомъ перемѣну формы множителя называетъ только *весьма полезною* въ теоретическомъ и практическомъ отношеніи *). Самъ же В. Г. Имшенецкій смотрѣлъ на дѣло, повидимому, еще шире. Въ томъ же воспроизведеніи его сообщенія говорится, что онъ разъяснилъ, что способъ его „заключаетъ въ себѣ средства видоизмѣнять ходъ рѣшенія задачи, такъ какъ способъ этотъ допускаетъ *разнообразіе* въ выборѣ интегрирующаго множителя" **).

По моему мнѣнію, способъ академика В. Г. Имшенецкаго останется *способомъ Имшенецкаго*, какъ бы его ни дополняли и видоизмѣняли, до тѣхъ поръ, пока въ его основаніи будетъ лежать предложенное его авторомъ преобразованіе уравненія и употребленіе интегрирующаго множителя. Въ этомъ его существенный признакъ и во многихъ отношеніяхъ преимущество предъ способомъ Ліувилля.

Смотря на способъ В. Г. Имшенецкаго съ этой точки зрѣнія нельзя не предвидѣть болѣе широкихъ его примѣненій, чѣмъ только къ уравненіямъ линейнымъ. Весьма вѣроятно, что, пользуясь этимъ способомъ, можно вывести общія правила разысканія раціональныхъ рѣшеній для уравненій, приводимыхъ къ линейнымъ однороднымъ подстановкою $y = \frac{z'}{z}$ ***).

---

*) Математ. Сборн. т. XVII, стр. 396.

**) Тамъ-же, стр. 395.

***) Основаніемъ для этого могутъ послужить два пріема, употребленные В. Г. Имшенецкимъ въ послѣднемъ изъ примѣровъ, находящихся во второй редакціи критикуемой акад. А. А. Марковымъ статьи. Особеннаго вниманія заслуживаетъ второй пріемъ, который, при нѣкоторыхъ дополненіяхъ, можетъ приводить къ нахожденію и тѣхъ линейныхъ множителей знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія, которые не входятъ въ первый коэффиціентъ уравненія.

Объ этомъ предметѣ, по словамъ акад. А. А. Маркова, имъ было сдѣлано сообщеніе С.-Петербургскому Математическому Обществу, вѣроятно, въ ноябрѣ 1891 года, сущность котораго изложена въ Comptes-Rendus за тотъ же годъ *).

Замѣтка акад. А. А. Маркова въ названномъ французскомъ изданіи отличается такою краткостью и, вмѣстѣ съ тѣмъ, такою неопредѣленностью и общностью указаній на пріемы рѣшенія, что составить себѣ понятіе о какихъ-либо общихъ правилахъ для этого рѣшенія читающему чрезвычайно трудно. Вслѣдствіе этого нельзя понять даже приблизительно, что собственно разумѣетъ акад. А. А. Марковъ въ своемъ критическомъ письмѣ подъ словами *иные* (по сравненію со способомъ В. Г. Имшенецкаго) *пріемы*.

Если цѣлью замѣтки, помѣщенной акад. А. А. Марковымъ въ Comptes-Rendus, было только выяснить возможность получать посредствомъ конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій раціональныя рѣшенія уравненій разсматриваемаго типа, когда эти рѣшенія существуютъ, то слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ отношеніи его работа не представляетъ ничего новаго. Въ томъ-же томѣ Comtes-Rendus находится замѣтка Painlevé **), въ которой авторъ, доказывая преимущество своихъ правъ на пріоритетъ въ разсматриваемомъ акад. А. А. Марковымъ вопросѣ въ сравненіи съ правами послѣдняго, поясняетъ, что этотъ вопросъ, и притомъ въ болѣе широкой постановкѣ, былъ рѣшенъ имъ за нѣсколько лѣтъ ранѣе.

Если же академикъ А. А. Марковъ имѣлъ въ виду дать дѣйствительно правила вычисленія, то приходится пожалѣть, что подробности этихъ правилъ имъ нигдѣ не опубликованы, ибо, пока этого не сдѣлано, противопоставленіе способу В. Г. Имшенецкаго какихъ-то *иныхъ пріемовъ* не можетъ имѣть никакого значенія.

---

*) Comptes-Rendus, t. CXIII, 1891, p. 685—688.

**) Тамъ-же, стр. 739.

# Дополненіе къ сочиненію: „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости“ *).

**В. А. Стеклова.**

Въ мое сочиненіе: „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости“, представляющее изложеніе сообщеній, сдѣланныхъ мною въ засѣданіяхъ Харьк. Матем. Общества за 1891, 92 и 93 гг., а также обобщеніе и дополненіе изслѣдованій, напечатанныхъ въ „Сообщеніяхъ“ Общества за тѣже годы, вкрались нѣкоторыя погрѣшности и поспѣшныя заключенія, которыя необходимо исправить.

Это я и сдѣлаю въ настоящей замѣткѣ.

Не повторяя объясненій, я буду пользоваться тѣми же обозначеніями, которыя употреблены въ разсматриваемомъ сочиненіи, ссылаясь прямо на стран. и параграфы, о которыхъ будетъ рѣчь.

1. На стран. 44 и 45 (гл. I, § 15) я дѣлаю мимоходомъ замѣчанія объ опредѣленіи точки приложенія даннаго импульса, производящаго или только поступательное, или только вращательное движеніе твердаго тѣла въ жидкости. Эти замѣчанія должны быть выпущены, какъ очевидно неосновательныя.

2. Въ § 73 пятой главы (стр. 184) въ правыхъ частяхъ равенствъ $(\alpha_1)$ пропущены члены: въ первомъ

$$+\frac{b_{34}}{b_{44}}(b_{14}-b_{36}),$$

во второмъ

$$+\frac{b_{35}}{b_{55}}(b_{25}-b_{36}),$$

въ правыхъ частяхъ перваго и второго изъ равенствъ $(\alpha_2)$ (стр. 187)— члены

$$+\frac{b_{24}}{b_{44}}(b_{14}-b_{25}), \qquad +\frac{b_{26}}{b_{66}}(b_{36}-b_{25}),$$

*) См. Приложеніе къ запискамъ Императорскаго Харьковскаго Университета за 1893 годъ.

и въ правыхъ частяхъ равенствъ $(\alpha_3)$ (стр. 187)—члены

$$+\frac{b_{15}}{b_{55}}(b_{25}-b_{14}), \qquad +\frac{b_{16}}{b_{66}}(b_{36}-b_{14}).$$

Наконецъ, подъ № $(\beta)$, кромѣ написанныхъ равенствъ, должно быть еще

$$b_{14}=b_{25}=b_{36}.$$

Въ формулахъ на стр. 188, 189 вмѣстѣ $a_{36}$ надо поставить $b_{36}$.

3. При изслѣдованіи одного возможнаго движенія въ жидкости тяжелаго твердаго тѣла съ одной плоскостью симметріи (гл. V, § 80, стр. 200 etc.) изъ того обстоятельства, что размахи колебаній оси $z$ относительно осей $\xi$ или $\zeta$ убываютъ съ теченіемъ времени, я поспѣшно заключилъ, что величина этихъ размаховъ (см. стр. 206) при возрастаніи $t$ до $\infty$ стремится къ нулю.

Изъ приведенныхъ въ работѣ разсужденій слѣдуетъ, что размахи колебаній оси $z$ убываютъ съ теченіемъ времени,—и только.

Неосновательно также утвержденіе, что времена продолжительности этихъ размаховъ убываютъ (стр. 208).

Далѣе, неравенства (33), (35) и слѣдующее за нимъ должны быть измѣнены на обратныя (стр. 208, 209, § 84, гл. V).

Величины обозначенныя мной черезъ $\left(\vartheta'_{\frac{\pi}{2}}\right)_i$ не убываютъ съ теченіемъ времени, а, наоборотъ, возрастаютъ и могутъ даже возрастать безпредѣльно.

Такимъ образомъ, слова: „такъ какъ далѣе

$$\left(\vartheta'_{\frac{\pi}{2}}\right)_i = k^2\int_{t_{2i-1}}^{t_{2i}} t^2\sin 2\vartheta\,dt = k^2\,\Theta\,\frac{t_{2i}^3-t_{2i-1}^3}{3},\ ^*)$$

гдѣ $\Theta$ есть среднее значеніе $\sin 2\vartheta$ въ промежуткѣ $t_{2i}-t_{2i-1}$, то $\left(\vartheta'_{\frac{\pi}{2}}\right)_i$ стремится къ нулю и ось $z$ стремится къ совпаденію съ осью $\zeta$“ должно выпустить, ибо заключеніе въ нихъ содержащееся неосновательно. Наконецъ, равенство

$$\alpha_{i+1}-\alpha_i = n^2(-1)^{i+1}\vartheta_i\,\frac{t_{2i}^2-t_{2(i-1)}^2}{2}$$

показываетъ только, что начало координатъ совершаетъ колебательныя движенія по оси $\xi$,—и только.

*) Исправляю кстати ошибочно напечатанную, хотя и ненужную, формулу въ концѣ стр. 209.

Выводъ, что „размахи колебаній по оси $\xi$ начала координатъ убываютъ съ теченіемъ времени, и движеніе стремится къ прямолинейному по оси $\zeta$“, былъ бы сомнителенъ даже въ предположеніи, что $\lim \vartheta_i \Big|_{t=\infty} = 0$, и несомнѣнно долженъ быть отброшенъ, въ силу вышесказаннаго, какъ неосновательный.

Итакъ, нельзя утверждать, что „движеніе начала координатъ стремится съ возрастаніемъ времени къ равном. ускор. по направленію параллельному оси $\zeta$“ и что „амплитуда волнообразной кривой, описываемой началомъ координатъ въ плоскости симметріи убываетъ съ теченіемъ времени и стремится къ нулю при возрастаніи $t$ до $\infty$“ *). Заключенія § 89-го (стр. 215), начиная со словъ: „Размахи колебаній оси $z$ и т. д.“ должно поэтому замѣнить слѣдующими:

Размахи колебаній оси $z$ около осей $\xi$ или $\zeta$, смотря по знаку разности $a_{33} - a_{11}$, убываютъ, а скорость вращенія оси $z$ въ моменты совпаденій ея съ одной изъ осей $\xi$ или $\zeta$ возрастаетъ съ теченіемъ времени.

Начало координатъ описываетъ въ плоскости симметріи нѣкоторую волнообразную кривую.

Замѣчу еще, что на стран. 214 въ строкахъ 2-й и 4-й снизу вмѣсто $\sin 2\vartheta$ должно быть $\sin^2\vartheta$.

4. Геометрическая интерпретація вращательной части движенія тяжелаго твердаго тѣла, удвоенная живая сила котораго

$$2T = a\sum x_1^2 + 2b\sum x_1 y_1 + \sum c_1 y_1^2,$$

приведенная на стр. 230, 231 и 232 (§ 94, гл. V), должна быть замѣнена слѣдующей:

Построимъ конусъ $(C)$ векторовъ $\Xi$ и ортогональный къ нему конусъ $(D_1)$, т. е. огибающій конусъ плоскостей перпендикулярныхъ къ образующимъ конуса $(C)$.

Характеристикой этого огибающаго конуса будетъ прямая $(L)$, уравненіе которой

$$\frac{x}{c_1 y_1 m^2 t^2 - x_1 Q} = \frac{y}{c_2 y_2 m^2 t^2 - x_2 Q} = \frac{z}{c_3 y_3 m^2 t^2 - x_3 Q}, \qquad (\alpha)$$

гдѣ

$$Q = c_1 y_1 x_1 + c_2 y_2 x_2 + c_3 x_3 y_3 .$$

При движеніи тѣла плоскость $(E)$ перпендикулярная къ неизмѣнному въ пространствѣ направленію вектора $\Xi$ будетъ касаться конуса $(D_1)$ по образующей $(L)$.

*) См. стр. 215, § 86, гл. V.

Угловая скорость лежитъ въ плоскости $(F)$, проходящей черезъ направленіе $\Xi$ и прямую $(\alpha)$.

Движеніе тѣла (его вращательная часть) воспроизведется каніемъ вмѣстѣ со скольженіемъ конуса $(D_1)$ по плоскости $(E)$.

Скорость катанія

$$\omega_1 = \Omega \cos(\Omega, L) = G \cos(G, L)^*,$$

гдѣ

$$G = \sqrt{c_1{}^2 y_1{}^2 + c_2{}^2 y_2{}^2 + c_3{}^2 y_3{}^2},$$

т. е. равна проекціи вектора $G$, лежащаго въ плоскости $(F)$, на прямую $(L)$, а скорость скольженія

$$\omega_2 = mbt + G \cos(G\Xi).$$

Построеніе конуса векторовъ $G$ указано въ концѣ стр. 231.

Движеніе тѣла представится сложнымъ изъ двухъ: вращательнаго движенія его вмѣстѣ съ воображаемой неизмѣняемой системой, вращающейся равномѣрно ускоренно вокругъ неизмѣннаго въ пространствѣ направленія вектора $\Xi$ и изъ относительнаго по отношенію къ этой воображаемой системѣ движенія тѣла, состоящаго въ катаніи вмѣстѣ со скольженіемъ конуса $(D_1)$, неизмѣнно связаннаго съ тѣломъ, по плоскости $(E)$ перпендикулярной къ направленію $\Xi$. Скорости катанія и скольженія равны соотвѣтственно прокціямъ на плоскость $(E)$ и на направленіе $\Xi$ вектора $G$.

---

*) Мы не пишемъ знакъ $\pm$.

# Къ теоріи осмотическаго давленія.

**А. П. Грузинцева.**

Лѣтъ десять тому назадъ (1885 г.) голландскій ученый Вантгоффъ, изучая растворы, предложилъ очень остроумную и плодотворную по своимъ послѣдствіямъ теорію ихъ. Онъ *предположилъ*, что частицы твердаго тѣла, растворенпаго въ жидкости, распространены въ ней подобно частицамъ газа, заключеннаго въ нѣкоторой оболочкѣ. Подобно этимъ послѣднимъ частицы растворенпаго тѣла производятъ на оболочку, ихъ заключающую, нѣкоторое давленіе, называемое *осмотическимъ* и это давленіе, согласно предложенію Вантгоффа, связано съ объемомъ жидкости, въ которой растворено тѣло, соотношеніемъ тождественнымъ съ законами Бойля и Гей-Люссака для газовъ, а именно, если $p$ будетъ осмотическое давленіе, $s$ удѣльный объемъ раствора и $T$ абсолютная температура его, то

$$ps = RT, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ $R$ нѣкоторое постоянное для даннаго раствора.

Явленіе осмотическаго давленія было извѣстно задолго до Вантгоффа (Траубе въ 1867 и въ особенности Пфефферъ въ 1878 г. наблюдали и изслѣдовали его), но Вантгоффу принадлежитъ честь установленія связи между осмотическимъ давленіемъ и температурой, а такъ же и степенью концентраціи раствора. Онъ даже сдѣлалъ попытку (въ 1887 году) дать теорію осмотическаго давленія, исходя изъ принциповъ термодинамики, и получилъ соотношеніе (1) въ частной формѣ:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

при

$$s = \text{const.}$$

и для очень слабыхъ растворовъ.

Затѣмъ, сравнивая наблюдаемыя осмотическія давленія съ концентраціей раствора, онъ нашелъ, что осмотическое давленіе пропорціонально концентраціи, т. е.

$$p = kz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

если $z$ будетъ концентрація, т. е. отношеніе массы растворенаго вещества къ массѣ раствора.

Въ томъ же году (1887), когда Вантгоффъ далъ свою теорію осмотическаго давленія, французскій физикъ Дюгемъ (Duhem) опубликовалъ двѣ работы, въ которыхъ онъ излагаетъ теорію растворовъ при помощи принциповъ термодинамики, не прибѣгая къ какимъ-либо особымъ ограниченіямъ; но, къ удивленію, точное примѣненіе термодинамики къ рѣшенію поставленнаго вопроса привело Дюгема къ такимъ общимъ уравненіямъ, изъ которыхъ для очень слабыхъ растворовъ *не получалось* уравненіе (2), а слѣдовательно и (1), хотя нѣкоторыя другія слѣдствія, какъ первое приближеніе, оказывались такими же, какъ и указанныя Вантгоффомъ (а именно, свойства такъ называемыхъ изотоническихъ растворовъ въ отношеніи упругости паровъ изъ нихъ и температуръ затвердѣванія). Причина такого разногласія оставалась невыясненной. Не смотря на то, что Дюгемъ, послѣ основательныхъ возраженій, сдѣланныхъ Вантгоффомъ на его первую работу, передѣлалъ свою теорію, согласно указаніямъ Вантгоффа, въ результатѣ получилось тоже заключеніе.

Размышляя о причинахъ такого разногласія, я нашелъ ее, какъ мнѣ кажется, въ одномъ обстоятельствѣ, состоящемъ въ томъ, что Дюгемъ *), вмѣсто вводимой имъ въ теорію удѣльной теплоты разведенія раствора, долженъ былъ бы взять теплоту растворенія; тогда изъ его теоріи прямо будетъ вытекать уравненіе (1), какъ только мы предположимъ, что растворъ—слабой концентраціи.

Далѣе, разъ ставъ на критическую точку зрѣнія по отношенію къ теоріи Дюгема, я нашелъ, что его теорію должно еще измѣнить въ другомъ пунктѣ, хотя *au fond* она остается все таки Дюгемовой.

Изложимъ теперь эту теорію съ достаточной полнотой, чтобы читателю, знакомому съ теоріей Дюгема, возможно было судить о томъ, въ какихъ пунктахъ и какимъ образомъ мы измѣняемъ ее.

Пусть мы имѣемъ сосудъ, раздѣленный полупроницаемой (т. е. проницаемой для растворителя и не проницаемой для растворенаго твердаго тѣла) перегородкой на двѣ части (1) и (2); пусть въ 1$^{\text{ой}}$ части будетъ находиться растворитель въ количествѣ $\mu$ граммъ, а во 2$^{\text{ой}}$ растворъ, состоящій изъ $m$ граммъ растворителя и $m'$ граммъ раство-

*) Journal de physique, (2), VI, pp. 397—414.

реннаго твердаго тѣла; такимъ образомъ, концентрація $x$ будетъ опредѣляться соотношеніемъ:

$$x = \frac{m'}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Здѣсь, слѣдовательно, мы относимъ массу растворенаго твердаго тѣла къ массѣ растворителя, входящаго въ составъ раствора, а не къ массѣ всего раствора. Пусть, далѣе, абсолютная температура будетъ $T$, давленіе въ первой части сосуда $p_1$, во второй $p_2$. Въ такомъ случаѣ осмотическое давленіе $p$ будетъ опредѣляться соотношеніемъ:

$$p = p_2 - p_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Назовемъ внутренніе термодинамическіе потенціалы 1 грамма чистаго растворителя, 1 грамма растворителя раствора и 1 грамма растворенаго твердаго тѣла символами:

$$\mathrm{F}_1(p_1,\ T), \quad \mathrm{F}(x,\ p_2,\ T), \quad \mathrm{F}'(x,\ p_2,\ T),$$

а буквами

$$F_1,\ F_2$$

внутренніе термодинамическіе потенціалы (свободныя энергіи по Гельмгольцу) $1^{\text{ой}}$ и $2^{\text{ой}}$ части взятой системы; въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$F_1 = \mu \mathrm{F}_1(p_1,\ T),$$
$$F_2 = m\mathrm{F}(x,\ p_2,\ T) + m'\mathrm{F}'(x,\ p_2,\ T),$$

или, вслѣдствіе соотношенія (a):

$$F_2 = m\mathrm{F}(x,\ p_2,\ T) + mx\mathrm{F}'(x,\ p_2,\ T) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Если затѣмъ

$$v_1,\ v_2$$

будутъ объемы $1^{\text{ой}}$ и $2^{\text{ой}}$ части разсматриваемой системы, а

$$A$$

тепловой эквивалентъ механической работы, то основные принципы термодинамики даютъ для безконечно малаго измѣненія въ состояніи взятой системы слѣдующее уравненіе:

$$dF + Ap_1 dv_1 + Ap_2 dv_2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

гдѣ положено

$$F = F_1 + F_2$$

и всѣ члены выражены въ тепловыхъ единицахъ (граммо-калоріяхъ); приэтомъ имѣемъ:

$$v_1 = \mu s_1, \quad v_2 = (m + m')s = m(1 + x)s, \ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

если

$$s_1, \quad s$$

будутъ удѣльные объемы чистаго растворителя и раствора при температурѣ $T$ и соотвѣтственныхъ давленіяхъ $p_1$ и $p_2$.

Пусть изъ первой части сосуда при той же температурѣ и давленіи переходитъ во вторую черезъ проницаемую для растворителя перегородку $dm$ граммъ его массы; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$dF_1 = \mathrm{F}_1(p_1, T)d\mu = -\mathrm{F}_1(p_1, T)dm,$$

$$dF_2 = \left\{\mathrm{F}(x, p_2, T) - \left[\frac{\partial \mathrm{F}(x, p_2, T)}{\partial x} + x\frac{\partial \mathrm{F}'(x, p_2, T)}{\partial x}\right]\right\} dm,$$

ибо при переходѣ $dm$ растворителя во вторую часть измѣнится и концентрація раствора, причемъ по равенству (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial x}{\partial m} = -\frac{x}{m}. \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

Затѣмъ равенства (d) даютъ:

$$dv_1 = -s_1 dm, \quad dv_2 = \left[s - x(1 + x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] dm,$$

ибо удѣльный объемъ есть функція не только $p_2$ и $T$, но и концентраціи раствора $x$.

Соединяя найденное, получимъ:

$$dF = \left\{\mathrm{F}(x, p_2, T) - \mathrm{F}_1(p_1, T) - x\left[\frac{\partial \mathrm{F}(x, p_2, T)}{\partial x} + x\frac{\partial \mathrm{F}'(x, p_2, T)}{\partial x}\right]\right\} dm,$$

$$p_1 dv_1 + p_2 dv_2 = \left[p_2 s - p_1 s_1 - p_2 x(1 + x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] dm.$$

Такъ-какъ $F_2$ есть линейная однородная функція $m$ и $m'$, то заключаемъ, что

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x, p_2, T)}{\partial x} + x\frac{\partial \mathrm{F}'(x, p_2, T)}{\partial x} = 0.$$

Подставляя все это въ уравненіе (I), послѣ легкаго преобразованія находимъ:

$$F(x, p_2, T) + Ap_2\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] = F_1(p_1, T) + Ap_1s_1. \quad . \quad (A)$$

Это и будетъ основнымъ уравненіемъ въ теоріи осмотическаго давленія.

Уравненіе $(A)$ можно преобразовать и тогда оно получитъ простой физическій смыслъ.

Пусть

$$\Phi_1(p_1, T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ при постоянномъ давленіи 1 грамма чистаго растворителя въ $1^{\text{ой}}$ части сосуда при температурѣ $T$ и давленіи $p_1$; тогда по опредѣленію потенціала имѣемъ:

$$F_1(p_1, T) + Ap_1s_1 = \Phi_1(p_1, T). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (f)$$

Далѣе, пусть

$$\Phi_2(x, p_2, T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ при постоянномъ давленіи 1 грамма раствора во $2^{\text{ой}}$ части сосуда; въ такомъ случаѣ по опредѣленію потенціала имѣемъ:

$$\Phi_2(x, p_2, T) = mF(x, p_2, T) + mxF'(x, p_2, T) + Ap_2ms(1+x)$$

и, если

$$\Phi(x_1, p_2, T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ при постоянномъ давленіи 1 грамма растворителя во $2^{\text{ой}}$ части сосуда, то по извѣстному свойству потенціала:

$$\Phi(x, p_2, T) = \frac{\partial\Phi_2(x, p_2, T)}{\partial m};$$

а потому:

$$\Phi(x, p_2, T) = F(x, p_2, T) + Ap_2\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right]. \quad . \quad . \quad (g)$$

Подставляя изъ равенствъ (f) и (g) въ уравненіе $(A)$, находимъ:

$$\Phi(x, p_2, T) = \Phi_1(p, T). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Это уравненіе дано Дюгемомъ, только при помощи анализа, немного отличающагося отъ нашего.

Физическій смыслъ равенства $(B)$ ясенъ: *осмотическое равновѣсіе наступаетъ тогда, когда равны термодинамическіе потенціалы при постоянномъ давленіи 1 грамма чистаго растворителя и 1 грамма его, входящаго въ составъ раствора* при общей температурѣ и соотвѣтствующихъ давленіяхъ,

Теперь, пользуясь равенствомъ $(B)$, мы можемъ составить уравненіе, характеризующее самое явленіе растворенія твердаго тѣла въ жидкомъ.

Когда мы переводимъ безконечно-малое количество $dm$ чистаго растворителя изъ 1$^{\text{ой}}$ части сосуда во 2$^{\text{ую}}$, то въ послѣдней концентрація уменьшится. Чтобы сохранить степень этой концентраціи, мы растворимъ $dm'$ граммъ твердаго тѣла; на этотъ процессъ пойдетъ

$$Ldm'$$

калорій. При этомъ, такъ-какъ концентрація не должна измѣняться, то для опредѣленія $dm'$ имѣемъ уравненіе:

$$\frac{m'+dm'}{m+dm}=x\,,$$

откуда

$$dm'=xdm\,.$$

Такимъ образомъ,

$$Ldm'=Lxdm$$

будетъ безконечно-малое количество теплоты, приходящееся на массу $(1+x)$ граммъ раствора, а слѣдовательно, притокъ теплоты, идущей на растворение $dm'$ граммъ твердаго тѣла, отнесенной къ 1-цѣ массы, будетъ:

$$dQ=\frac{Lx}{1+x}dm\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(h)}$$

причемъ $L$ будетъ теплотой растворенія.

Съ другой стороны, если

$$\Psi(x\,,\ p_1\,,\ T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ 1 грамма системы при постоянномъ давленіи $p_1$, то извѣстная теорема термодинамики даетъ:

$$dQ=dU+Ap_1dv\,,$$

причемъ $U$ будетъ внутренняя энергія системы.

Далѣе извѣстно, что:

$$dU = d\left(\Psi - T\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right) - Ap_1 dv;$$

слѣдовательно:

$$dQ = d\left(\Psi - T\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right).$$

Такъ какъ процессъ изотермическій, то послѣднее равенство можно написать въ такомъ видѣ:

$$dQ = d\Psi - T\frac{\partial}{\partial T}d\Psi. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(k)}$$

Но по смыслу значенія $d\Psi$ имѣемъ:

$$d\Psi = [\Phi_1(p_1,\ T) - \Phi(x,\ p_1,\ T)]\,dm,$$

а потому равенство (k) при помощи (h) обращается въ слѣдующее:

$$\Phi_1(p_1,\ T) - \Phi(x,\ p_1,\ T) - T\frac{\partial}{\partial T}[\Phi_1(p_1,\ T) - \Phi(x,\ p_1,\ T)] = \frac{Lx}{1+x}. \quad \text{(C)}$$

Преобразуемъ это равенство.

Подставляя въ него значеніе $\Phi_1(p_1,\ T)$ изъ уравненія $(B)$, получаемъ:

$$\frac{1}{T}[\Phi(x,\ p_2,\ T) - \Phi(x,\ p_1,\ T)] - \frac{\partial}{\partial T}[\Phi(x,\ p_2,\ T) - \Phi(x,\ p_1,\ T)] = \frac{Lx}{T(1+x)}$$

или:

$$\frac{Lx}{T(1+x)} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{\Phi(x,\ P,\ T)}{T} - \frac{\partial \Phi(x,\ P,\ T)}{\partial T}\right] dP, \quad \ldots \text{(l)}$$

причемъ перемѣнная интегрированія обозначена буквой $P$.

Но извѣстно, что вообще:

$$\frac{\partial \Phi(x,\ P,\ T)}{\partial T} = Av,$$

гдѣ

$$v = \frac{v_2}{m},$$

а потому при помощи (g):

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{\Phi(x,\ P,\ T)}{T}\right] dP = \frac{Ap}{T}\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right],$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{\partial \Phi(x,\ P,\ T)}{\partial T}\right] dP = A\frac{\partial}{\partial T}\int_{p_1}^{p_2} v dP = Ap\frac{\partial}{\partial T}\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right],$$

если пренебрежемъ измѣненіемъ объема отъ давленія, что для жидкостей вполнѣ позволительно.

Итакъ, равенство (l) обращается въ слѣдующее:

$$\frac{Ap}{T}\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] - Ap\frac{\partial}{\partial T}\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] = \frac{Lx}{T(1+x)}. \quad \text{(D)}$$

Подобное уравненіе получилъ и Дюгемъ, но съ той существенной разницей, что у него въ правой части входитъ выраженіе

$$\frac{L}{T};$$

причемъ у него $L$ есть теплота разведенія раствора, а не теплота растворенія, и кромѣ того не входитъ концентрація.

Составимъ теперь другое выраженіе для $L$; иными словами, составимъ другое соотношеніе между $p$, $s$ и $T$. Для этой цѣли воспользуемся общимъ уравненіемъ Томсона (Клапейрона), которое имѣетъ мѣсто при всякомъ термическомъ обратимомъ процессѣ, съ каковымъ мы и имѣемъ здѣсь дѣло.

Это уравненіе имѣетъ видъ:

$$l = AT\frac{\partial p}{\partial T}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(m)}$$

гдѣ $l$ есть скрытая теплота увеличенія единицы объема тѣла при постоянной температурѣ,—въ нашемъ случаѣ взятаго нами раствора. Равенство

$$dv_2 = \left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] dm$$

и равенство (h) даютъ:

$$l = \frac{dQ}{dv_2} = \frac{Lx}{\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right](1+x)}.$$

Подставляя въ (m), находимъ:

$$A\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{Lx}{T(1+x)}. \quad \ldots\ldots \text{(E)}$$

Этимъ уравненіемъ Дюгемъ совсѣмъ не пользуется.

Къ тому же уравненію мы придемъ и въ томъ случаѣ, если воспользуемся съ нашей точки зрѣнія пріемомъ Дюгема.

Дѣйствительно, дифференцируя по $T$ уравненіе $(B)$ и считая при этомъ $p_2$ функціей $T$, а $p_1$ отъ температуры независящимъ, получаемъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial T}+\frac{\partial \Phi}{\partial T}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial T}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

но по равенству (g) имѣемъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}=A\left[s-x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right];$$

кромѣ того, называя $S_1$ и $S_2$ энтропіи растворителя и раствора, отнесенныя къ 1 грамму массы, по извѣстнымъ соотношеніямъ термодинамики имѣемъ:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial T}=-S_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial T}=-S_2;$$

да еще по равенству (b) находимъ:

$$\frac{\partial p_2}{\partial T}=\frac{\partial p}{\partial T};$$

подставляя все это въ равенство (n), получаемъ:

$$A\left[s-x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial T}=S_2-S_1; \quad \ldots\ldots (p)$$

но, вообще для всей взятой системы:

$$dS=\frac{dQ}{T}.$$

Отсюда, интегрируя отъ состоянія системы въ видѣ чистаго растворителя до состоянія ея въ видѣ раствора концентраціи $x$, находимъ:

$$S_2-S_1=\frac{1}{T}\int dQ. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (q)$$

Здѣсь

$$\int dQ$$

есть то количество теплоты, которое идетъ на процессъ растворенія, т. е.

$$\frac{Lx}{1+x}$$

калорій; а потому равенство (p) обращается въ (E).

Теперь, соединяя уравненія $(D)$ и $(E)$ и полагая на время

$$s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x} = \sigma,$$

получаемъ послѣ очевиднаго преобразованія:

$$\frac{\partial(p\sigma)}{\partial T} - \frac{p\sigma}{T} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Это и есть окончательное уравненіе для осмотическаго давленія, связывающее это послѣднее съ объемомъ и температурой. Интегрируя его, получаемъ, по подстановкѣ значенія $\sigma$:

$$p\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] = RT, \quad \ldots\ldots\ldots (III)$$

при чемъ $R$ есть постоянное интегрированія.

Уравненіе (II) при

$$\sigma = \text{const}.$$

даетъ равенство (2) Вантгоффа, а уравненіе (III) при очень маломъ $x$, т. е. для растворовъ слабой концентраціи, обращается въ уравненіе (1).

Итакъ, надлежащее примѣненіе принциповъ термодинамики къ физической теоріи растворовъ съ точки зрѣнія Вантгоффа даетъ результаты согласные съ опытомъ.

Уравненіе (III), полученное мной изъ анализа болѣе точнаго, чѣмъ анализъ Дюгема, должно служить основаніемъ физической теоріи растворовъ; мы изъ него можемъ извлечь полезныя слѣдствія. Точно также равенства $(D)$ или $(E)$ при помощи (III) дадутъ возможность связать теплоту растворенія съ элементами осмотическаго давленія.

Такъ, исключая изъ равенствъ $(E)$ и (III) величину объема

$$s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x},$$

получаемъ соотношеніе для теплоты растворенія:

$$\frac{\partial \lg p}{\partial T} = \frac{Lx}{ART^2(1+x)}, \quad \ldots\ldots\ldots (IV)$$

которое отличается отъ обыкновенно употребляемаго только формой *).

Но разработку этихъ вопросовъ мы сдѣлаемъ предметомъ нашего послѣдующаго сообщенія.

8 апрѣля 1894 г.

---

*) См., напр., статью Dieterici, Wied. An. (45), 209.

# По поводу комментарія профессора К. А. Андреева *).

А. А. Маркова.

Въ виду того, что комментарій проф. К. А. Андреева **) представляетъ какъ-бы возраженіе на мою краткую замѣтку, я вынужденъ обратить вниманіе на нижеслѣдующія обстоятельства.

Хотя замѣтка въ первоначальной редакціи не отличалась многословіемъ, проф. К. А. Андреевъ, или распорядительный комитетъ, нашелъ необходимымъ еще сократить ее.

Выкинутыя мѣста содержали мое мнѣніе о публикованіи посмертныхъ трудовъ. Содержали они также нѣкоторыя объясненія моего отношенія къ разбираемой работѣ.

Исключеніе этихъ мѣстъ, которое я считаю неосновательнымъ, значительно искалѣчило мою статью ***).

Я согласился на искалѣченіе своей статьи только потому, что надѣялся такимъ образомъ избѣжать безплодной полемики, лишенной твердыхъ научныхъ основаній.

---

*) Распорядительный комитетъ Харьковскаго Математическаго Общества постановилъ напечатать эту замѣтку академика А. А. Маркова лишь затѣмъ, чтобы дать возможность каждому читателю „Сообщеній Математическаго Общества“ составить безпристрастное сужденіе о предметѣ полемики. Это напечатаніе отнюдь не должно быть понимаемо какъ выраженіе согласія распорядительнаго комитета съ мнѣніемъ академика А. А. Маркова о статьѣ „Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій“. *Ред.*

**) См. выше стр. 150.

***) Академику А. А. Маркову было предложено замѣнить выпущенныя мѣста его письма вставками, не имѣющими рѣзкости тона и не содержащими указаній на нѣкоторыя личныя отношенія. Но онъ заявилъ, что считаетъ это невозможнымъ. *Ред.*

Комментарій же проф. К. А. Андреева представляетъ образецъ такой полемики. Отличаясь значительной длинностой, этотъ комментарій, въ дѣйствительности, обходитъ всѣ научные вопросы.

Вступать въ подобную полемику я не желаю, а въ настоящее время тѣмъ болѣе, что не чувствую для этого достаточнаго литературскаго таланта. Долженъ однако замѣтить, что даже въ искалѣченной моей замѣткѣ высказано мое мнѣніе, что академикъ В. Г. Имшенецкій не публиковалъ бы статьи, о которой идетъ рѣчь. Слѣдовательно, отвѣтственность за ея содержаніе лежитъ не на покойномъ академикѣ В. Г. Имшенецкомъ, а на распорядительномъ комитетѣ Харьковскаго Математическаго Общества, къ которому я и обратился съ своими замѣчаніями.

*А. Марковъ.*

27-го Апрѣля 1894 года.

# О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя.

К. А. Андреева *).

1. Не подлежитъ сомнѣнію, что первенство въ разсмотрѣніи и разрѣшеніи вопроса о разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій принадлежитъ Ліувиллю. Во второмъ изъ мемуаровъ, представленныхъ имъ Парижской Академіи Наукъ въ 1832 и 1833 годахъ подъ заглавіемъ: „Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique“ **), этотъ ученый разсмотрѣлъ съ большою подробностью всѣ возможныя частности вопроса для уравненій двухъ первыхъ порядковъ и далъ затѣмъ весьма суммарныя указанія на возможность примѣненія употребленныхъ имъ для этихъ случаевъ сужденій къ уравненіямъ какого угодно высшаго порядка. Неопредѣленность этихъ указаній, главнымъ же образомъ безполезный и не приведенный въ систему разборъ подробностей, могущихъ представиться при разсмотрѣніи всѣхъ коэффиціентовъ уравненія одновременно, составляютъ слабую сторону изслѣдованія Ліувилля. По всей вѣроятности, эти недостатки были причиною того, что способъ Ліувилля для рѣшенія вопроса, имѣющаго важное значеніе въ систематическомъ изложеніи теоріи дифференціальныхъ уравненій, не былъ воспроизведенъ ни въ одномъ изъ трактатовъ, посвященныхъ этой теоріи, и, повидимому, оставался въ забвеніи въ теченіе болѣе полустолѣтія.

Еще Пуассонъ, представлявшій Парижской Академіи докладъ о мемуарахъ Ліувилля, обратилъ вниманіе на эти недостатки, но отсутствіе

*) Сообщеніе, сдѣланное въ засѣданіи Харьк. Мат. Общ. 17-го декабря 1893 г.

**) См. въ „Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences“ t. V, 1838, а также въ Journal de l'Ecole Polytechnique“, t. XIV, 22 cahier, 1833 p. 153—183.

точнаго изложенія метода для уравненій высшихъ порядковъ онъ объяснялъ сложностью вычисленій, зависящею отъ самаго существа вопроса. Это объясненіе едва-ли можно считать достаточнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы ни были сложны вычисленія, приводящія къ окончательному рѣшенію разсматриваемаго вопроса, число алгебраическихъ дѣйствій, изъ которыхъ они слагаются, конечное, и должны существовать общія правила, устанавливающія родъ и послѣдовательность этихъ дѣйствій.

По существу вопросъ о разысканіи раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій представляется въ значительной степени сходнымъ съ вопросомъ о разысканіи раціональныхъ корней алгебраическихъ уравненій съ численными раціональными коэффиціентами. Въ обоихъ вопросахъ полное рѣшеніе нельзя считать даннымъ, пока не дана схема для вычисленій, долженствующихъ приводить къ искомому рѣшенію, каковъ бы ни былъ порядокъ или степень уравненія.

Отсутствіе такой схемы у Ліувилля дѣлаетъ то, что его изслѣдованіе о дифференціальныхъ уравненіяхъ въ названномъ мемуарѣ нужно признать мастерскимъ эскизомъ, намѣчающимъ путь къ нахожденію раціональныхъ рѣшеній этихъ уравненій, но не дающимъ точнаго маршрута для желающихъ идти этимъ путемъ въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ.

Новая обработка того же вопроса и выработка недостающаго маршрута или схемы представлялась поэтому необходимою въ интересахъ науки и приходится удивляться, если справедливо, что никто изъ ученыхъ въ теченіе болѣе пятидесяти лѣтъ съ появленія мемуаровъ Ліувилля этимъ не занялся.

2. Если не ошибаемся, покойный академикъ В. Г. Имшенецкій, былъ первый послѣ Ліувилля, обратившійся снова къ занимающему насъ вопросу. Въ 1887 году онъ помѣстилъ въ LV томѣ Записокъ Императорской Академіи Наукъ статью подъ заглавіемъ: „Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“, въ которой разсматриваетъ вопросъ самостоятельно и пролагаетъ другой путь къ его рѣшенію, отличный отъ указаннаго Ліувиллемъ, хотя и близкій къ нему по самой сущности дѣла.

Къ сожалѣнію эта статья носитъ слѣды поспѣшности работы и имѣетъ тотъ же главный недостатокъ, какъ и изслѣдованіе Ліувилля. Въ ней мы также не находимъ полной схематической формулировки предлагаемаго способа *).

*) Этотъ недостатокъ не восполненъ и во второй статьѣ В. Г. Имшенецкаго, посвященной тому же предмету и напечатанной въ LVIII томѣ Записокъ Импер. Акад. Наукъ въ 1888 году подъ заглавіемъ: „Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“.

Не смотря на это, изложеніе В. Г. Имшенецкаго представляетъ многія выгодныя особенности и, между прочимъ, ту, что, идя указываемымъ имъ путемъ, не приходится дѣлать сразу такого множества частныхъ предположеній о коэффиціентахъ даннаго уравненія, какъ это дѣлается у Ліувилля, и легко замѣтить ту послѣдовательность и закономѣрность которымъ должны подчиняться эти предположенія.

Спустя нѣсколько лѣтъ послѣ появленія въ печати работы В. Г. Имшенецкаго она подверглась критикѣ со стороны нѣсколькихъ нашихъ ученыхъ, оставившихъ, къ сожалѣнію, безъ вниманія указанный выше главный недостатокъ и выставлявшихъ на видъ при посредствѣ частнаго примѣра недостатки второстепеннаго значенія и, притомъ, легко исправимые *).

Это заставило автора работы возвратиться снова къ предмету своихъ изслѣдованій и дать своему способу небольшое измѣненіе, которое было имъ сообщено Московскому Математическому Обществу въ засѣданіи 19-го мая 1892 года.

За смертью В. Г. Имшенецкаго и не разысканіемъ въ его бумагахъ полнаго текста этого сообщенія, оно не могло быть напечатано вполнѣ, но сущность его была воспроизведена профессоромъ П. А. Некрасовымъ въ видѣ особой замѣтки, составившей приложеніе къ протоколу одного изъ послѣдующихъ засѣданій того же Общества **).

3. Одновременно съ этой замѣткой проф. П. А. Некрасовъ напечаталъ свое собственное изслѣдованіе подъ заглавіемъ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій“ ***), представляющее новую обработку того же предмета, доведенную на этотъ разъ до конца и содержащую полную формулировку способа подъ видомъ двухъ особыхъ правилъ (стр. 372 и 379).

По словамъ самого автора, цѣлью этой статьи было дать способу В. Г. Имшенецкаго болѣе полное разъясненіе и такое дальнѣйшее усовершенствованіе, котораго корень заключался бы въ его основныхъ идеяхъ. Нельзя оспаривать, что цѣль эта авторомъ достигнута, но едва ли простѣйшимъ и прямымъ путемъ.

Намъ кажется, что, придерживаясь основныхъ идей В. Г. Имшенецкаго, проф. П. А. Некрасовъ придалъ въ то же время слишкомъ большой вѣсъ нѣкоторымъ его обозначеніямъ и вспомогательнымъ преобразованіямъ. Вслѣдствіе этого его правила, безъ выгоды для результата, даютъ указанія дѣйствій не надъ самыми коэффиціентами даннаго уравненія, а надъ выраженіями, въ которыя они преобразуются лишь для общихъ теоретическихъ сужденій. Къ тому же эти правила, представляя выводъ изъ предшествующихъ разсужденій,

*) См. Мат. Сборн. Т. XVII, 1893, стр. 385—391.

**) Тамъ-же, стр. 391—398.

***) Тамъ же. стр. 341—382.

оказываются непонятными въ отдѣльности отъ нихъ и потому не могутъ съ удобствомъ служить схемою для выполненія вычисленій.

Все это заставляетъ насъ думать, что вопросъ остается еще не доведеннымъ до достаточной степени простоты и ясности, и потому мы рѣшаемся представить его въ новомъ изложеніи, имѣя главнымъ образомъ въ виду выводъ возможно простой и общей схемы вычисленій, которыя должны производиться надъ коэффиціентами даннаго линейнаго уравненія для нахожденія его раціональныхъ частныхъ интеграловъ.

Подобно проф. П. А. Некрасову, мы будемъ придерживаться въ нашемъ изложеніи того пути, по которому шелъ въ своихъ изслѣдованіяхъ В. Г. Имшенецкій, отдавая ему предпочтеніе предъ анализомъ Ліувилля главнымъ образомъ потому, что на этомъ пути сразу открывается передъ нами (какъ будетъ показано ниже) рядъ послѣдовательныхъ ступеней, приводящихъ неуклонно къ окончательному и простѣйшему рѣшенію вопроса, чего нельзя сказать о способѣ Ліувилля. Слѣдуя за Ліувиллемъ, мы не видимъ, напротивъ, ни начала, ни конца этого ряда, и примѣняющему этотъ способъ приходится, для установленія послѣдовательности вычисленій, руководствоваться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ своею собственною сообразительностью.

4. Положимъ, что дано уравненіе

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=V, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которомъ $P_0$, $P_1$, $\ldots$ $P_n$ и $V$ суть извѣстные полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя.

Помножимъ обѣ части этого уравненія на неопредѣленный полиномъ $M$ и затѣмъ приведемъ его къ виду

$$\frac{d^n}{dx^n}(S_0y)+\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(S_1y)+\ldots+\frac{d}{dx}(S_{n-1}y)+(S_ny)=MV. \quad . \quad (2)$$

Здѣсь $S_0$, $S_1$ $\ldots$ $S_n$ суть также полиномы, выражающіеся опредѣленнымъ образомъ чрезъ полиномы $P_0$, $P_1$ $\ldots$ $P_n$ и $M$.

Чтобы получить эти выраженія, разложимъ каждое слагаемое первой части уравненія (2) по формулѣ Лейбница и сравнимъ сумму коэффиціентовъ при производной отъ $y$ порядка $(n-i)$ съ коэффиціентомъ при той же производной въ уравненіи (1), умноженномъ на $M$. Въ результатѣ будемъ имѣть:

$$S_i+(n-i+1)S'_{i-1}+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}S''_{i-2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}S_0^{(i)}=MP_i.$$

Отсюда, измѣненіемъ указателя $i$ и дифференцированіемъ, выводимъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$S_i+(n-i+1)S'_{i-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}S_0^{(i)}=MP_i$$

$$S'_{i-1}+(n-i+2)S''_{i-2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}S_0^{(i)}=(MP_{i-1})'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_1^{(i-1)}+nS_0^{(i)}=(MP_1)^{(i-1)}$$

$$S_0^{(i)}=(MP_0)^{(i)}$$

который представляетъ собою систему $(i+1)$ уравненій первой степени съ $(i+1)$ неизвѣстными $S_i$, $(S_{i-1})'$, $(S_{i-2})''$, $\ldots$ $S_0^{(i)}$.

Рѣшеніе этой системы по общимъ правиламъ и даетъ для полиномовъ $S_i$ слѣдующее общее выраженіе:

$$\left.\begin{aligned} S_i=MP_i-(n-i+1)(MP_{i-1})'+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}(MP_{i-2})''-\ldots \\ \ldots(-1)^i\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}(MP_0)^{(i)}. \end{aligned}\right\}(3)$$

Въ частности будемъ имѣть

$$S_n=MP_n-(MP_{n-1})'+(MP_{n-2})''-\ldots+(-1)^n(MP_0)^{(n)},$$

или

$$S_n=(-1)^n[(MP_0)^{(n)}-(MP_1)^{(n-1)}+(MP_2)^{(n-2)}-\ldots+(-1)^nMP_n]. \quad (4)$$

Выраженія (3) и (4) будутъ имѣть въ послѣдующемъ очень важное значеніе.

5. Допустимъ теперь, что данному уравненію (1) удовлетворяетъ раціональная дробь

$$y=\frac{Z}{Y},$$

подлежащая опредѣленію, и поставимъ себѣ ближайшею задачею найти такой видъ для полинома $M$, при которомъ всѣ полиномы

$$S_0,\ S_1,\ \ldots\ S_{n-1},\ S_n$$

дѣлятся на знаменателя $Y$ этой дроби.

Множитель $M$, удовлетворяющій этому условію, В. Г. Имшенецкій назвалъ интегрирующимъ на томъ основаніи, что при такомъ $M$, какъ показываетъ самый видъ уравненія (2), за знаменателя $Y$ искомаго раціональнаго рѣшенія этого уравненія можетъ быть принятъ общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $S_0$, $S_1 \ldots S_n$. Числитель же опредѣлится какъ цѣлая функція $Z$, удовлетворяющая уравненію, которое получимъ, раздѣливши въ уравненіи (2) полиномы $S_0$, $S_1 \ldots S_n$ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Наша задача будетъ, слѣдовательно, состоять въ нахожденіи интегрирующаго множителя, къ чему, такимъ образомъ, и сводится вся трудность разсматриваемаго вопроса.

Замѣтимъ прежде всего, что если $M$ есть интегрирующій множитель, то произведеніе его на какой угодно полиномъ $H$ будетъ также интегрирующимъ множителемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ $M$ черезъ $HM$ и обозначивъ черезъ $T_0$, $T_1$, $\ldots$ $T_n$ полиномы, въ которые обратятся при этомъ $S_0$, $S_1$, $\ldots$ $S_n$, получимъ изъ равенства (3) слѣдующее:

$$T_i = HMP_i - (n-i+1)(HMP_{i-1})' + \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}(HMP_{i-2})'' - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}(HMP_0)^{(i)},$$

которое примѣненіемъ формулы Лейбница легко преобразуется въ такое:

$$T_i = HS_i - (n-i+1)H'S_{i-1} + \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}H''S_{i-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}H^{(i)}S_0.$$

Отсюда и видимъ, что всякій общій дѣлитель всѣхъ $S_i$ будетъ общимъ дѣлителемъ и всѣхъ $T_i$. Слѣдовательно, при существованіи интегрирующаго множителя, такихъ множителей должно быть безчисленное множество.

Интегрирующій множитель возможно низшей степени, т. е. такой, который уже не будетъ произведеніемъ другого интегрирующаго множителя на цѣлую функцію, мы будемъ называть абсолютно наименьшимъ.

Изъ сказаннаго выше видно, что всякій интегрирующій множитель можетъ служить для нахожденія раціональнаго рѣшенія уравненія (1), но въ то-же время очевидно, что, въ видахъ упрощенія вычисленій и съ цѣлью полученія простѣйшаго результата, нужно стараться найти интегрирующій множитель возможно низшей степени при существующихъ условіяхъ или относительно наименьшій.

6. Для того чтобы полиномъ $M$ былъ интегрирующимъ множителемъ уравненія (1), вполнѣ достаточно, чтобы онъ дѣлалъ дѣлящимися на $Y$ только полиномы

$$S_0, S_1, \dots S_{n-1}.$$

Дѣлимость же на $Y$ полинома $S_n$ есть необходимое слѣдствіе этого условія.

Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ условіи всѣ слагаемыя первой части уравненія (2), за исключеніемъ послѣдняго, равно какъ и вторая часть, будутъ функціи цѣлыя. Таковою же функціей должно быть, слѣдовательно, и послѣднее слагаемое $S_n y$.

Эта дѣлимость полинома $S_n$ на общаго дѣлителя полиномовъ $S_0$, $S_1, \dots S_{n-1}$, принимаемаго за знаменателя $Y$ искомаго раціональнаго рѣшенія даннаго дифференціальнаго уравненія, есть обстоятельство первостепенной важности. Основываясь на немъ, всегда можно достигнуть нахожденія интегрирующаго множителя.

7. Положимъ, что $(x-a)$ есть одинъ изъ линейныхъ множителей знаменатель $Y$, входящій въ него въ степени $\alpha$, и допустимъ, что тотъ же множитель входитъ въ интегригующій множитель $M$ въ степени $\beta$, такъ что

$$M=(x-a)^\beta N,$$

гдѣ $N$ означаетъ полиномъ, не дѣлящійся на $(x-a)$.

Условимся, далѣе, обозначать чрезъ $K$ всякій полиномъ, дѣлящійся на $(x-a)$, и чрезъ $P_0(a)$, $P_1(a) \dots P_0'(a)$, $P_1'(a) \dots$ значенія функцій $P_0$, $P_1, \dots$ и ихъ производныхъ при $x=a$.

Въ такомъ случаѣ по теоремѣ Тейлора будемъ имѣть:

$$P_0=P_0(a)+K, \qquad P_1=P_1(a)+K, \dots$$

Вслѣдствіе этого, полагая $\beta > n-1$, получимъ: *)

$$(MP_0)^{(n)}=\Big\{(x-a)^\beta[NP_0(a)+K]\Big\}^{(n)}=$$

$$=(x-a)^{\beta-n}[\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)NP_0(a)+K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)}=\Big\{(x-a)^\beta[NP_1(a)+K]\Big\}^{(n-1)}=$$

$$=(x-a)^{\beta-n+1}[\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+2)NP_1(a)+K],$$

. . . . . .

*) Возможность неравенства $\beta > n-1$ не можетъ подлежать сомнѣнію, если не ставить необходимымъ условіемъ, чтобы разсматриваемый интегрирующій множитель былъ абсолютно наименьшій.

и потому по формулѣ (4):

$$S_n = (-1)^n (x-a)^{\beta-n}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)NP_0(a)+K].$$

Въ то же время, какъ видно изъ формулы (3), будемъ имѣть вообще:

$$S_i = (x-a)^{\beta-i}U_i,$$

гдѣ $U_i$ есть нѣкоторый опредѣленный полиномъ.

Слѣдовательно, полиномы

$$S_0,\ S_1,\ \ldots\ S_{n-1}$$

будутъ имѣть общимъ множителемъ

$$(x-a)^{\beta-n+1}$$

и для того, чтобы множитель $M$ былъ интегрирующимъ и притомъ возможно меньшимъ, нужно положить

$$\beta - n + 1 = \alpha.$$

Такъ какъ при этомъ и полиномъ $S_n$ долженъ дѣлиться на $(x-a)^{\beta-n+1}$, то, принимая во вниманіе послѣднее выраженіе для этого полинома, будемъ имѣть

$$P_0(a) = 0,$$

ибо полиномъ $N$ не дѣлится на $(x-a)$, а множители $\beta$, $(\beta-1)$, ... всѣ положительны.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что всякій линейный множитель, входящій въ знаменателя $Y$ раціональнаго рѣшенія, есть дѣлитель полинома $P_0$, и потому его можно считать извѣстнымъ.

8. На основаніи доказаннаго будемъ имѣть по теоремѣ Тейлора

$$P_0 = (x-a)P_0'(a) + K$$

и потому, полагая $\beta > n-2$, получимъ:

$$(MP_0)^{(n)} = \left\{(x-a)^{\beta+1}[NP_0'(a)+K]\right\}^{(n)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+1}[(\beta+1)\beta\ldots(\beta-n+2)NP_0'(a)+K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \left\{(x-a)^{\beta}[NP_1(a)+K]\right\}^{(n-1)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+1}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)NP_1(a)+K],$$

и т. д.

Слѣдовательно, согласно равенству (4),

$$S_n=(-1)^n(x-a)^{\beta-n+1}\left\{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)N[(\beta+1)P_0'(a)-P_1(a)]+K\right\}.$$

Въ тоже время, какъ показываетъ общая формула (3), будемъ имѣть:

$$S_i=(x-a)^{\beta-i+1}U_i.$$

Полиномы $S_0, S_1, \ldots S_{n-1}$ будутъ, слѣдовательно, имѣть общимъ множителемъ

$$(x-a)^{\beta-n+2}$$

и для того, чтобы полиномъ $M$ былъ возможно меньшимъ интегрирующимъ множителемъ, нужно положить

$$\beta-n+2=\alpha.$$

При этомъ полиномъ $S_n$ долженъ дѣлиться также на $(x-a)^{\beta-n+2}$, для чего, какъ видно изъ послѣдняго выраженія для $S_n$, должно выполняться условіе:

$$(\beta+1)P_0'(a)-P_1(a)=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

т. е. полиномъ

$$(\beta+1)P_0'-P_1$$

долженъ дѣлиться на $(x-a)$.

Это возможно въ двухъ случаяхъ: 1) когда множитель $(x-a)$ входитъ въ общаго наибольшаго дѣлителя $D_1$ полиномовъ $P_0'$ и $P_1$, и 2) когда $D_1$ не дѣлится на $(x-a)$.

Остановимся сперва на второмъ изъ нихъ.

Въ этомъ случаѣ изъ равенства (5) можно по данному $a$ опредѣлить соотвѣтственное $\beta$, т. е. найти показателя степени, въ которой биномъ $(x-a)$, взятый изъ числа дѣлителей полинома $P_0$, долженъ входить въ интегрирующаго множителя $M$.

Согласно предположеніямъ, на которыхъ основывается нашъ выводъ, $\beta$ должно быть цѣлымъ, положительнымъ, конечнымъ числомъ, большимъ $(n-2)$. Поэтому въ случаѣ, когда изъ уравненія (5) такого значенія для $\beta$ не получается, $(x-a)$ вовсе не будетъ дѣлителемъ полинома $M$.

9. Если подъ $(x-a)$ будемъ подразумѣвать не какой-либо опредѣленный биномъ, служащій дѣлителемъ полинома $P_0$, а любой изъ линейныхъ множителей этого послѣдняго, не входящій въ $D_1$, то $a$ будетъ общимъ корнемъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}(\beta+1)P_0'-P_1&=0,\\ X_1&=0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

и

гдѣ $X_1$ есть произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей $P_0$, не входящихъ въ $D_1$.

Слѣдовательно, для опредѣленія $\beta$ нужно будетъ въ этомъ случаѣ исключить изъ двухъ послѣднихъ уравненій неизвѣстное $x$, что дастъ нѣкоторое алгебраическое уравненіе

$$F_1(\beta) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

содержащее только одно неизвѣстное $\beta$. При этомъ первое изъ уравненій (6) можетъ быть предварительно раздѣлено на $D_1$. Что же касается второго, то его первая часть $X_1$, какъ показываетъ самое ея значеніе, легко опредѣляется слѣдующимъ образомъ.

Сперва находимъ произведеніе $X$ всѣхъ линейныхъ множителей полинома $P_0$, раздѣливъ для этого $P_0$ на его общаго наибольшаго дѣлителя съ $P_0'$, и затѣмъ раздѣляемъ $X$ на его общаго наибольшаго дѣлителя съ $D_1$.

Уравненіе (7) будетъ, вообще говоря, степени выше первой. Только цѣлыя, положительныя, большія $(n-2)$, числа, ему удовлетворяющія, будутъ показателями линейныхъ множителей полинома $M$ изъ числа входящихъ въ $X_1$.

Если назовемъ черезъ $\beta_1$ наибольшій изъ цѣлыхъ, положительныхъ корней уравненія (7), то интегрирующій множитель $M$ можетъ быть отыскиваемъ подъ видомъ

$$M = X_1^{\beta_1} M_1,$$

гдѣ $M_1$ есть полиномъ, состоящій только изъ такихъ линейныхъ множителей полинома $P_0$, которые входятъ въ $D_1$.

Понятно, что въ этомъ видѣ интегрирующій множитель не будетъ, вообще говоря, наименьшимъ. Онъ будетъ, однако, возможно меньшимъ изъ тѣхъ, которые можно найти, не прибѣгая къ разложенію полинома $X_1$ на множители.

10. Обратимся теперь къ первому изъ названныхъ выше случаевъ дѣлимости на $(x-a)$ полинома

$$(\beta+1)P_0' - P_1,$$

т. е. положимъ, что $(x-a)$ входитъ множителемъ въ $D_1$.

Въ этомъ случаѣ по теоремѣ Тейлора будемъ имѣть:

$$P_0 = \frac{(x-a)^2}{2!}[P_0''(a) + K],$$

$$P_1 = (x-a)\,[P_1'(a) + K].$$

Слѣдовательно, при условіи $\beta > n-3$, должно быть:

$$(MP_0)^{(n)} = \left\{\frac{(x-a)^{\beta+2}}{2!}[NP_0''(a)+K]\right\}^{(n)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta-n+2}}{2!}[(\beta+2)(\beta+1)\ \ldots(\beta-n+3)NP_0''(a)+K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \left\{(x-a)^{\beta+1}[NP_1'(a)+K]\right\}^{(n-1)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+2}[(\beta+1)\beta\ldots(\beta-n+3)NP_1'(a)+K],$$

$$(MP_2)^{(n-2)} = \left\{(x-a)^{\beta}[NP_2(a)+K]\right\}^{(n-2)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+2}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+3)NP_2(a)+K],$$

и потому, по формулѣ (4),

$$S_n = (-1)^n(x-a)^{\beta-n+2}\left\{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+3)N\left[\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''(a)-(\beta+1)P_1'(a)+P_2(a)\right]+K\right\}.$$

Въ то же время, на основаніи общей формулы (3), имѣемъ:

$$S_i = (x-a)^{\beta-i+2}U_i,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(x-a)^{\beta-n+3}$$

будетъ общимъ дѣлителемъ полиномовъ

$$S_0,\ S_1,\ \ldots S_{n-1},$$

и если $M$ есть интегрирующій множитель, то можно положить

$$\beta-n+3=\alpha.$$

Такъ какъ при этомъ на $(x-a)^{\beta-n+3}$ долженъ дѣлиться полиномъ $S_n$, то, принимая во вниманіе послѣднее выраженіе для $S_n$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''(a)-(\beta+1)P_1'(a)+P_2(a)=0. \quad \ldots \quad (8)$$

Отсюда и опредѣлится $\beta$ подобно тому, какъ ранѣе изъ уравненія (5), если только $(x-a)$ не будетъ входить множителемъ въ общаго наибольшаго дѣлителя $D_2$ полиномовъ $P_0''$, $P_1'$ и $P_2$.

11. Подъ $(x-a)$ можетъ быть подразумѣваемъ въ предыдущемъ любой изъ линейныхъ множителей полинома $D_1$, не входящій въ $D_2$. Произведеніе $X_2$ всѣхъ такихъ множителей найдемъ, раздѣливши общій

наибольшій дѣлитель $\triangle_1$ полиномовъ $X$ и $D_1$ на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $\triangle_1$ и $D_2$.

Тогда $a$ будетъ общимъ корнемъ уравненій:

$$\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''-(\beta+1)P_1'+P_2=0$$

и

$$X_2=0,$$

такъ что, исключивъ изъ этихъ уравненій неизвѣстное $x$ (причемъ первое должно быть предварительно раздѣлено на $D_2$), получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

$$F_2(\beta)=0,$$

служащее для опредѣленія $\beta$.

При этомъ по условіямъ, положеннымъ въ основаніе нашихъ разсужденій, $\beta$ должно быть цѣлымъ, положительнымъ, конечнымъ числомъ, большимъ $(n-3)$.

Пусть $\beta_2$ будетъ наибольшій изъ корней послѣдняго уравненія, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ. Такъ какъ въ такомъ случаѣ всякій линейный множитель полинома $X_2$ будетъ входить въ $X_2^{\beta_2}$ въ степени не низшей чѣмъ въ $M$, то интегрирующій множитель можетъ быть отыскиваемъ подъ видомъ

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}M_2.$$

12. Для нахожденія показателей степеней, въ которыхъ входятъ въ интегрирующій множитель такіе линейные дѣлители полинома $P_0$, которые содержатся въ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ $D_2$ полиномовъ $P_0''$, $P_1'$, $P_2$, придется, очевидно, повторять періодически тѣ же разсужденія. При этомъ число послѣдовательныхъ коэффиціентовъ даннаго уравненія (1), вліяющихъ на значеніе опредѣляемаго показателя, будетъ постепенно возрастать, равно какъ и порядокъ ихъ производныхъ.

Изысканіе окончится лишь тогда, когда мы дойдемъ до ряда полиномовъ

$$P_0^{(k)},\ P_1^{(k-1)},\ P_2^{(k-2)}\ldots,$$

которые не будутъ имѣть общаго дѣлителя, входящаго въ $P_0$, что необходимо должно случиться (вслѣдствіе конечности степеней полиномовъ $P_0$, $P_1\ldots$), если не при $k\leq n$, то при $k>n$.

Случай, когда $k>n$, не представляетъ никакихъ особенностей, какъ для примѣненія общаго хода сужденій, такъ и для формулировки вывода. Чтобы выяснить все это, повторимъ предыдущія разсужденія въ общемъ видѣ.

Положимъ, что на $(x-a)$ дѣлятся полиномы

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \dots\ P_{k-1},$$

а также и ихъ послѣдовательныя производныя до

$$P_0^{(k-1)},\ P_1^{(k-2)},\ P_2^{(k-3)},\ \dots\ P'_{k-2}$$

включительно.

Здѣсь $k$ означаетъ какое угодно цѣлое положительное число, но при $k>n$ должно, очевидно, полагать: $P_{n+1}=0,\ P_{n+2}=0,\ \dots$

По теоремѣ Тейлора мы будемъ имѣть:

$$P_0=\frac{(x-a)^k}{k!}P_0^{(k)}(a)+K,$$

$$P_1=\frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a)+K,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

вслѣдствіе чего получимъ, полагая $\beta>n-k-1$,

$$(MP_0)^{(n)}=\left\{\frac{(x-a)^{\beta+k}}{k!}[NP_0^{(k)}(a)+K]\right\}^{(n)}=$$

$$=\frac{(x-a)^{\beta+k-n}}{k!}[(\beta+k)(\beta+k-1)\dots(\beta+k-n+1)\,NP_0^{(k)}(a)+K]$$

$$(MP_1)^{(n-1)}=\left\{\frac{(x-a)^{\beta+k-1}}{(k-1)!}[NP_1^{(k-1)}(a)+K]\right\}^{(n-1)}=$$

$$=\frac{(x-a)^{\beta+k-n}}{(k-1)!}[(\beta+k-1)(\beta+k-2)\dots(\beta+k-n+1)NP_1^{(k-1)}(a)+K]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

При помощи этихъ значеній выраженіе (4) для $S_n$ приметъ видъ:

$$S_n=(-1)^n(x-a)^{\beta+k-n}\left\{N\left[\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\dots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}(a)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\dots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a)+\dots\right]+K\right\}.$$

Въ тоже время по общей формулѣ (3) будемъ имѣть:

$$S_i=(x-a)^{\beta+k-i}U_i,$$

откуда заключаемъ, что

$$(x-a)^{\beta+k-n+1}$$

будетъ общимъ дѣлителемъ полиномовъ

$$S_0,\ S_1,\ \ldots S_{n-1},$$

такъ что можно положить

$$\beta+k-n+1=\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Но для того, чтобы на этого дѣлителя дѣлился и полиномъ $S_n$, нужно, какъ показываетъ предыдущее выраженіе для $S_n$, чтобы $\beta$ удовлетворяло условію:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}(a)- \\ &-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a)+\ldots=0, \end{aligned}\right\} (10)$$

откуда значеніе $\beta$ и можетъ быть опредѣлено.

Въ первой части послѣдняго равенства число слагаемыхъ равно $k+1$, когда $k<n$, и $n+1$, когда $k\geqq n$. Кромѣ того, при $k<n$, эти слагаемыя будутъ имѣть, какъ мы видѣли ранѣе, общихъ множителей, зависящихъ отъ $\beta$, чего не будетъ, очевидно, при $k\geqq n$.

Если общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P_0^{(k)},\ P_1^{(k-1)},\ \ldots P_k,$$

есть постоянная величина или такая цѣлая функція, которая не имѣетъ общихъ множителей съ $P_0$, то уравненіе (10) будетъ опредѣлять показателя $\beta$ для всякаго линейнаго множителя полинома $P_0$, входящаго въ общій наибольшій дѣлитель $D_{k-1}$ полиномовъ

$$P_0^{(k-1)},\ P_1^{(k-2)},\ \ldots P_{k-1}.$$

Обозначая чрезъ $X_k$ произведеніе всѣхъ такихъ линейныхъ множителей, будемъ имѣть, что соотвѣтствующіе имъ показатели, съ которыми они входятъ въ интегрирующій множитель $M$, опредѣлятся, какъ цѣлыя, положительныя и притомъ большія чѣмъ $n-k-1$, если $k<n-1$, рѣшенія уравненія

$$F_k(\beta)=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

получаемаго по исключеніи неизвѣстнаго $x$ изъ двухъ уравненій:

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\dots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)} -$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\dots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}+\dots=0$$

и

$$X_k=0.$$

Интегрирующій множитель $M$ можетъ быть разсматриваемъ поэтому, какъ содержащій множителя $X_k^{\beta_k}$, гдѣ $\beta_k$ есть наибольшій изъ цѣлыхъ, положительныхъ корней уравненія (11), большихъ $n-k-1$.

Изъ сказаннаго видимъ, что, при

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}\dots X_k^{\beta_k},$$

полиномы

$$S_0,\ S_1,\dots S_{n-1},\ S_n$$

будутъ дѣлиться на всѣ линейные множители, могущіе входить въ знаменателя $Y$ искомаго раціональнаго рѣшенія даннаго уравненія (1), и притомъ взятые въ степеняхъ не низшихъ, чѣмъ въ этомъ знаменателѣ. Эти полиномы будутъ, слѣдовательно, дѣлиться на $Y$.

Такимъ образомъ, при извѣстныхъ $X_1$, $X_2,\dots X_k$ и $\beta_1$, $\beta_2\dots\beta_k$, интегрирующій множитель нужно считать найденнымъ.

Само собою понятно, что несуществованіе интегрирующаго множителя еще не есть признакъ несуществованія дробнаго раціональнаго рѣшенія, такъ какъ полиномы $S_0$, $S_1,\dots S_n$ могутъ имѣть общаго дѣлителя независимо отъ интегрирующаго множителя, т. е. при $M=1$.

Прибавимъ къ сказанному, что общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $S_0$, $S_1,\dots S_n$ будетъ общимъ знаменателемъ всѣхъ раціональныхъ дробей, удовлетворяющихъ данному уравненію (1), если при разысканіи числителя получится нѣсколько рѣшеній.

13. Все вышеизложенное приводитъ насъ къ возможности формулировать правила для нахожденія интегрирующаго множителя, служащаго для разысканія дробныхъ раціональныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія (1), въ видѣ слѣдующей *схемы вычисленій*.

1) Сперва нужно составить изъ коэффиціентовъ даннаго уравненія и ихъ производныхъ таблицу полиномовъ:

$$\left.\begin{array}{l} P_0, \\ P_0', \quad P_1, \\ P_0'', \quad P_1', \quad P_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_0^{(k)}, \quad P_1^{(k-1)}, \ldots P_{k-1}', \ P_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_0^{(n)}, \quad P_1^{(n-1)}, \ldots P_{n-1}', \ P_n \\ P_0^{(n+1)}, \ P_1^{(n)}, \ldots\ldots P_{n-1}'', \ P_n' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}, \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (12)$$

отыскивая для полиномовъ каждой строки (начиная со второй) общихъ наибольшихъ дѣлителей $D_1$, $D_2$, $D_3$, ... и заканчивая ее тою строкою, для которой общій наибольшій дѣлитель не будетъ имѣть общихъ множителей съ $P_0$.

2) Затѣмъ нужно составить рядъ полиномовъ:

$$X, \ X_1, \ X_2 \ldots X_k, \ldots X_n, \ X_{n-1} \ldots,$$

опредѣляя каждый изъ нихъ по коэффиціентамъ даннаго уравненія слѣдующимъ образомъ.

Полиномъ $X$ есть произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей, входящихъ въ $P_0$, и получается раздѣленіемъ $P_0$ на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_0$ полиномовъ $P_0$ и $P_0'$.

Полиномъ $X_1$ есть произведеніе линейныхъ множителей, входящихъ въ $x$, но не входящихъ въ $D_1$. Онъ получается раздѣленіемъ $X$ на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_1$ полиномовъ $X$ и $D_1$, такъ что $X = X_1 \triangle_1$.

Полиномъ $X_2$ есть произведеніе линейныхъ множителей, входящихъ въ $\triangle_1$, но не входящихъ въ $D_2$, и, слѣдовательно, получается раздѣленіемъ $\triangle_1$ на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_2$ полиномовъ $\triangle_1$ и $D_2$, такъ что $\triangle_1 = X_2 \triangle_2$.

И вообще

$$X_k = \frac{\triangle_{k-1}}{\triangle_k},$$

гдѣ $\triangle_k$ означаетъ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ $\triangle_{k-1}$ и $D_k$.

3) Послѣ этого нужно составить уравненія:

$$F_1(\beta) = 0, \ F_2(\beta) = 0, \ldots F_k(\beta) = 0, \ldots F_n(\beta) = 0, \ F_{n+1}(\beta) \ldots$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ извѣстнаго $x$ изъ двухъ уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\dots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}- \\ &-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\dots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_0^{(k-1)}+\dots=0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

и

$$X_k=0$$

при $k=1, 2, \dots n, (n+1), \dots$

4) Наконецъ нужно найти рядъ чиселъ:

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k, \dots \beta_n, \beta_{n+1}, \dots$$

изъ которыхъ каждое, напр. $\beta_k$, есть наибольшій изъ цѣлыхъ положительныхъ, и притомъ большихъ $(n-k-1)$, корней уравненія

$$F_k(\beta)=0$$

и, въ случаѣ не существованія такихъ корней, должно считаться равнымъ нулю.

Послѣ всѣхъ этихъ вычисленій интегрирующій множитель $M$ опредѣлится формулою

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}\dots X_k^{\beta_k}\dots X_n^{\beta_n}X_{n+1}^{\beta_{n+1}}\dots \quad (14)$$

14. Вычисленія по предложенной схемѣ не допускаютъ никакого упрощенія лишь въ томъ случаѣ, когда полиномы $X_1, X_2 \dots$ не могутъ быть разложены на множители. Когда же какой-либо изъ нихъ можно разложить на множители, напр.

$$X_k=V_kW_k,$$

то составленіе уравненія $F_k(\beta)=0$ достигается проще, если въ системѣ уравненій (13) будемъ брать вмѣсто уравненія $X_k=0$ отдѣльно два уравненія $V_k=0$ и $W_k=0$.

Проще всего уравненіе $F_k(\beta)=0$ составляется, очевидно, тогда, когда $X_k$ состоитъ только изъ одного линейнаго множителя или можетъ быть разложено на такіе множители.

15. Приложимъ сказанное къ примѣрамъ. Пусть дано уравненіе

$$x(x+1)^2(x-2)^4\frac{d^2y}{dx^2}+(x-3)(x+1)(x-2)^4\frac{dy}{dx}-$$

$$-(35x^2-51x+17)(x+1)(x-2)^2y=-(31x^3-114x^2+123x-36).$$

Здѣсь имѣемъ:

$$P_0 = x(x+1)^2(x-2)^4, \quad P_1 = (x-3)(x+1)(x-2)^4,$$
$$P_3 = (35x^2 - 51x + 17)(x+1)(x-2)^2.$$

Такъ какъ полиномъ $P_0$ состоитъ изъ линейныхъ дѣлителей $x$, $(x+1)$, $(x-2)$, то интегрирующій множитель будетъ имѣть видъ

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}(x-2)^{\beta_3}.$$

Слѣдовательно, нужно найти $\beta_1$, $\beta_2$ и $\beta_3$.

Для опредѣленія $\beta_1$ полагаемъ $x = 0$; тогда

$$P_0(0) = 0,$$
$$P_0'(0) = 16, \; P_1(0) = -3.16.$$

Уравненіе, опредѣляющее $\beta$, будетъ, слѣдовательно,

$$(\beta+1)16 + 3.16 = 0,$$

откуда $\beta = -4$, и потому $\beta_1 = 0$.

Для опредѣленія $\beta_2$ полагаемъ $x = -1$; тогда

$$P_0(-1) = 0,$$
$$P_0'(-1) = 0, \; P_1(-1) = 0,$$
$$P_0''(-1) = -2.3^4, \; P_1'(-1) = -4.3^4, \; P_2(-1) = 0,$$

и уравненіе, опредѣляющее $\beta$, будетъ

$$-\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2}.2.3^4 + (\beta+1).4.3^4 = 0$$

или

$$-81(\beta+1)[(\beta+2)-4] = 0,$$

откуда $\beta = -1$, $\beta = 2$. Слѣдовательно, $\beta_2 = 2$.

Для опредѣленія $\beta_3$ полагаемъ $x = 2$; тогда

$$P_0(2) = 0,$$
$$P_0'(2) = 0, \; P_1(2) = 0,$$
$$P_0''(2) = 0, \; P_1'(2) = 0, \; P_2(2) = 0,$$
$$P_0'''(2) = 0, \; P_1''(2) = 0, \; P_2'(2) = 0,$$
$$P_0^{IV}(2) = 4!.2.3^2, \; P_1'''(2) = 0, \; P_2'' = -45.2.3,$$

и уравненіе, опредѣляющее $\beta$, будетъ

$$\frac{(\beta+4)(\beta+3)}{4!}.4!.2.3^2-\frac{1}{2!}.45.2.3=0$$

или

$$9[2(\beta+4)(\beta+3)-15]=0.$$

Такъ какъ это уравненіе не имѣетъ положительныхъ корней, то $\beta_3=0$.

Итакъ, интегрирующій множитель есть $(x+1)^2$.

Поэтому будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}
MP_0 &= x(x+1)^4(x-2)^4,\\
(MP_0)' &= (x+1)^3(x-2)^3(9x^2-5x-2),\\
(MP_0)'' &= 4(x+1)^2(x-2)^2(18x^3-20x^2-7x+4),\\
MP_1 &= (x-3)(x+1)^3(x-2)^4,\\
(MP_1)' &= 4(x+1)^2(x-2)^3(2x^2-6x+1),\\
MP_2 &= -(35x^2-51x+7)(x+1)^3(x-2)^2.
\end{aligned}$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned}
S_0 &= MP_0 = x(x+1)^4(x-2)^4,\\
S_1 &= MP_1-2(MP_0') = -(x+1)^3(x-2)^3(17x^2-5x-10),\\
S_2 &= MP_2-(MP_1)'+(MP_0)'' = (x+1)^3(x-2)^2(29x^2-53x+17).
\end{aligned}$$

Отсюда видимъ, что знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія, будучи общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій $S_0$, $S_1$ и $S_2$, есть

$$(x+1)^3(x-2)^2.$$

Для опредѣленія же числителя будемъ имѣть уравненіе вида (2):

$$\frac{d^2}{dx^2}[x(x+1)(x-2)^2z]-\frac{d}{dx}[(x-2)(17x^2-5x-10)z]+(29x^2-53x+17)z=$$
$$=-(x+1)^2(31x^3-114x^2+123x-36)$$

или

$$[(x^4-3x^3+4x)z]''-[(17x^3-39x^2+20)z]'+(29x^2-53x+17)z=$$
$$=-31x^5+52x^4+74x^3-96x^2-51x+36.$$

Полагая $z = Ax^\alpha + v$, находимъ изъ сравненія показателей и коэффиціентовъ старшихъ членовъ:

$$\alpha = 3\,,\quad A = 1$$

и, слѣдовательно,

$$z = x^3 + v.$$

Вслѣдствіе этого для опредѣленія $v$ получимъ уравненіе

$$[(x^4 - 3x^3 + 4x)v]'' - [(17x^3 - 39x^2 + 20)v]' + (29x^2 - 53x + 17)v =$$
$$= 57x^3 - 84x^2 - 51x + 36.$$

Полагая $v = Bx^\beta + w$, получимъ изъ сравненія старшихъ членовъ:

$$\beta = 1\,,\quad B = -3\,;$$

слѣдовательно,

$$v = -3x + w.$$

По подстановкѣ этого значенія въ предыдущее уравненіе будемъ имѣть:

$$[(x^4 - 3x^2 + 4x)w]'' - [17x^3 - 39x^2 + 20)w]' + (29x^2 - 53x + 17)w = 0\,,$$

откуда

$$w = 0\,,$$

и потому

$$z = x^3 - 3x = x(x^2 - 3).$$

Итакъ, данное уравненіе имѣетъ единственное раціональное рѣшеніе:

$$y = \frac{x(x^2 - 3)}{(x+1)^3(x-2)^2}\,.$$

16. Возьмемъ еще уравненіе

$$x^2(x+1)^5\frac{dy}{dx} + x(x+1)^2(3x^3 + 19x^2 + 17x + 5)y =$$
$$= 4(9 + 9x - x^2)\,,$$

предложенное профессоромъ К. А. Поссе *).

*) Матем. Сборн. Т. XVII, 1893. стр. 389.

Здѣсь

$$P_0 = x^2(x+1)^5,\ P_1 = x(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5).$$

Интегрирующій множитель долженъ имѣть видъ

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}.$$

Для опредѣленія $\beta_1$, полагаемъ $x=0$; тогда

$$P_0(0)=0,$$

$$P_0'(0)=0,\ P_1(0)=0,$$

$$P_0''(0)=2,\ P_1'(0)=5,$$

и уравненіе, опредѣляющее $\beta$, будетъ

$$\frac{(\beta+2)}{2}\cdot 2-5=0,$$

или

$$\beta-3=0.$$

Слѣдовательно,

$$\beta_1=3.$$

Полагая, для опредѣленія $\beta_2$, $x=-1$, будемъ имѣть:

$$P_0(-1)=0,$$

$$P_0'(-1)=0,\ P_1(-1)=0,$$

$$P_0''(-1)=0,\ P_1'(-1)=0,$$

$$P_0'''(-1)=0,\ P_1''(-1)=-2\cdot 4,$$

и потому $\beta$ должно опредѣляться изъ уравненія

$$\frac{\beta+3}{3!}\cdot 0+\frac{1}{2!}\cdot 2\cdot 4=0.$$

Но это уравненіе конечнаго значенія для $\beta$ не даетъ; стало быть

$$\beta_2=0.$$

Интегрирующій множитель будетъ, слѣдовательно,

$$M=x^3.$$

По умноженіи на этого множителя, данное уравненіе обращается въ

$$x^5(x+1)^5\frac{dy}{dx}+x^4(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5)y=4x^3(9+9x-x^2)$$

или

$$[x^5(x+1)^5y]'+x^4(x+1)^2[(3x^3+19x^2+17x+5)-5(x+1)^2(2x+1)]y=$$
$$=4x^3(9+9x-x^2)$$

или

$$[x^5(x+1)^5y]'-x^5(x+1)^2(7x^2+6x+3)y=4x^3(9+9x-x^2).$$

Знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія будетъ, слѣдовательно,

$$x^5(x+1)^2$$

и потому, полагая

$$y=\frac{z}{x^5(x+1)^2},$$

получимъ:

$$[(x+1)^3z]'-(7x^2+6x+3)z=4x^3(9+9x-x^2).$$

Подобно тому, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ находимъ, что это уравненіе удовлетворяется цѣлою функціей

$$z=4x^3+3$$

и потому

$$y=\frac{4x^3+3}{x^5(x+1)^2}.$$

17. Предложенная въ 13-мъ параграфѣ схема вычисленій даетъ правила для нахожденія интегрирующаго множителя, по которому знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія опредѣляется чрезъ посредство полиномовъ $S_0$, $S_1$, ... $S_n$, какъ ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Легко видѣть, однако, что между интегрирующимъ множителемъ и знаменателемъ искомаго рѣшенія существуетъ прямая связь, въ силу которой одна изъ этихъ функцій опредѣляется непосредственно черезъ другую. Связь эта выражается равенствомъ (9), представляющимъ зависимость между показателями степеней $\alpha$ и $\beta$, въ которыхъ одинъ и тотъ же линейный множитель $(x-a)$ входитъ въ искомаго знаменателя $Y$ и въ интегрирующаго множителя $M$.

Изъ общихъ соображеній параграфа 12-го слѣдуетъ, однако, что, допуская равенство (9), мы признаемъ въ то же время существующимъ такое цѣлое положительное значеніе для $\beta$, при которомъ на общаго дѣлителя

$$(x-a)^{\beta+k-n+1}$$

полиномовъ $S_0$, $S_1 \ldots S_{n-1}$ дѣлится и полиномъ $S_n$. Если же такого значенія не существуетъ, то, какъ показываетъ выраженіе для $S_n$, биномъ $(x-a)$ будетъ входить множителемъ въ общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ полиномовъ $S_0$, $S_1 \ldots S_n$ въ степени $\beta+k-n$. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ вмѣсто равенства (9) будемъ имѣть

$$\beta+k-n=\alpha.$$

На этомъ основаніи, имѣя интегрирующій множитель въ видѣ

$$M=(x-a_1)^{\beta_1}(x-a_2)^{\beta_2}\ldots(x-a_k)^{\beta_k}\ldots,$$

мы можемъ вычислить знаменателя искомой дроби по формулѣ

$$Y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}\ldots,$$

гдѣ вообще

$$\alpha_k=\beta_k+k-n+1, \quad \ldots\ldots \quad \ldots (15)$$

при существованіи цѣлаго положительнаго значенія для $\beta_k$, и

$$\alpha_k=\beta_k+k-n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

въ противномъ случаѣ.

Въ первомъ изъ приведенныхъ выше примѣровъ мы имѣли

$$M=x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}(x-2)^{\beta_3},$$

причемъ только для $\beta_2$ получилось цѣлое положительное значеніе $\beta_2=2$.

Такъ какъ мы видѣли кромѣ того, что при $x=0$, $k=1$; при $x=-1$, $k=2$ и при $x=2$, $k=4$, то знаменатель $Y$ опредѣлится формулою

$$Y=x^{\alpha_1}(x+1)^{\alpha_2}(x-2)^{\alpha_3},$$

гдѣ

$$\alpha_1=0+1-2, \quad \text{слѣд. } \alpha_1=0,$$
$$\alpha_2=2+2-2+1=3,$$
$$\alpha_3=0+4-2=2,$$

т. е.

$$Y=(x+1)^3(x-2)^2.$$

Во второмъ примѣрѣ мы имѣли

$$M=x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2},$$

причемъ $\beta_1=3$, а для $\beta_2$ не получилось цѣлаго конечнаго значенія.

Такъ какъ при этомъ мы видѣли, что для перваго множителя $k=2$, а для второго $k=3$, то

$$\alpha_1 = 3+2-1+1=5,$$

$$\alpha_2 = 0+3-1=2.$$

Слѣдовательно,

$$Y = x^5(x+1)^2.$$

Изъ равенствъ (15) и (16) видно, что съ прибавленіемъ къ $\beta_k$ какого нибудь цѣлаго положительнаго числа увеличивается на то же число и $\alpha_k$. Отсюда заключаемъ, что этими равенствами можно пользоваться для нахожденія знаменателя искомой дроби и въ томъ случаѣ, когда найденный интегрирующій множитель не есть наименьшій, и между прочимъ при интегрирующемъ множителѣ, найденномъ, согласно предложенной нами схемѣ, въ видѣ (14).

Но такой знаменатель также не будетъ, вообще говоря, наименьшимъ, т. е. онъ будетъ имѣть общихъ дѣлителей съ числителемъ. Этого, впрочемъ, нельзя избѣжать вообще, не прибѣгая къ разложенію полинома $P_0$ на линейные множители.

18. Вмѣсто того, чтобы находить знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія по найденному интегрирующему множителю, можно воспользоваться соотношеніемъ (9) между $\beta$ и $\alpha$ для того, чтобы самыя уравненія, служащія для опредѣленія $\beta$, преобразовать въ уравненія, опредѣляющія $\alpha$.

Мы видѣли въ параграфѣ 12-мъ, что для опредѣленія $\beta$ служитъ вообще уравненіе вида

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\dots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}(a) -$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\dots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a)+\dots=0.$$

По замѣнѣ въ немъ $\beta$ выраженіемъ чрезъ $\alpha$, взятымъ изъ равенства (9), получимъ уравненіе, служащее для опредѣленія $\alpha$,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{k!}P_0^{(k)}(a) -\\ &-\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-2)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a)+\dots=0\end{aligned}\right\}\quad\dots\quad(17)$$

Чтобы пользоваться этимъ уравненіемъ для нахожденія значеній $\alpha$, соотвѣтствующихъ смыслу вопроса, нужно, однако, принять во вниманіе слѣдующее.

Такъ какъ $(\beta+1)$ есть число положительное, то изъ соотношенія (9) слѣдуетъ, что

$$\alpha > k-n,$$

условіе, не включающееся въ $\alpha > 0$, только при $k>1$ и въ этомъ случаѣ существенное.

Въ то же время изъ выраженія для $S_i$ въ параграфѣ 12-мъ видно, что при $k>n$, всѣ полиномы $S_0$, $S_1 \ldots S_n$ дѣлятся на $(x-a)$ въ степени по меньшей мѣрѣ равной $(k-n)$.

Вслѣдствіе этихъ замѣчаній при опредѣленіи показателя $\alpha$ изъ уравненія (17) нужно различать случаи: когда $k \lessgtr n$ и когда $k>n$. Въ первомъ случаѣ искомымъ показателемъ будетъ всякое цѣлое, положительное, конечно число, удовлетворяющее этому уравненію, и при несуществованіи такихъ чиселъ, должно положить $\alpha=0$. Во второмъ же случаѣ искомый показатель будетъ равняться всякому цѣлому положительному корню уравненія (17), большему $(k-n)$, и при несуществованіи такихъ корней долженъ считаться равнымъ $(k-n)$.

Пользуясь уравненіемъ (17) для непосредственнаго нахожденія знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія въ первомъ изъ приведенныхъ выше примѣровъ, будемъ имѣть:

При $x=0$, $k=1$,

$$\alpha(\alpha+1)P_0'(0) - \alpha P_1(0) = 0$$

или

$$\alpha(\alpha+1).16 = \alpha.3.16 = 16\alpha(\alpha+4) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_1 = 0.$$

При $x=-1$, $k=2=n$,

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_0''(-1) - \alpha P_1'(-1) + P_2(-1) = 0$$

или

$$-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.2.3^4 + \alpha.4.3^4 = -3^4\alpha(\alpha+1-4) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_2 = 3.$$

При $x=2$, $k=4>n$,

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{4!}P_0^{\text{IV}}(2)-\frac{\alpha}{3!}P_1'''(2)+\frac{1}{2!}P_2''(2)=0$$

или

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{4!}.4!.2.3^2-\frac{1}{2!}.45.2.3=0$$

или

$$9[2\alpha(\alpha+1)-15]=0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_3=k-n=4-2=2.$$

Итакъ,

$$Y=(x+1)^3(x-2)^2.$$

Самая схема вычисленій, предложенная нами выше для нахожденія интегрирующаго множителя, превращается въ служащую для опредѣленія знаменателя искомаго раціональнаго интеграла, если въ ней уравненія

$$F_1(\beta)=0,\ F_2(\beta)=0,\ldots F_k(\beta)=0\ldots$$

будутъ замѣнены уравненіями

$$\Phi_1(\alpha)=0,\ \Phi_2(\alpha)=0,\ldots\Phi_k(\alpha)=0\ldots$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ неизвѣстнаго $x$ изъ двухъ уравненій:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{k!}P_0^{(k)}-\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}+\ldots=0$$

и

$$X_k=0,$$

при $k=1,\ 2,\ 3\ldots$

19. Изъ того, что нахожденіе знаменателя раціональнаго интеграла даннаго линейнаго уравненія (1) можетъ быть достигнуто непосредственно, т. е. безъ предварительнаго опредѣленія интегрирующаго множителя и полиномовъ $S_0$, $S_1$, $\ldots S_n$, было бы ошибочно заключить, что и самый интегралъ получается такимъ путемъ проще, т. е. при помощи менѣе сложныхъ вычисленій.

Въ самомъ дѣлѣ, когда извѣстны полиномы $S_0$, $S_1$, ... $S_n$, то, какъ мы видѣли ранѣе, будетъ извѣстно въ формѣ (2) и уравненіе, опредѣляющее числителя искомой дроби. Если же извѣстенъ только знаменатель этой дроби, то уравненіе, служащее для опредѣленія числителя, должно быть еще найдено. Въ какомъ бы видѣ мы его ни предполагали, задача будетъ состоять въ нахожденіи $(n+1)$ полиномовъ, служащихъ коэффиціентами этого уравненія.

Вычисленія для нахожденія этихъ полиномовъ по знаменателю $Y$ представляютъ тѣ же затрудненія и по меньшей мѣрѣ ту же степень сложности, какъ и вычисленія полиномовъ $S_0$, $S_1 \ldots S_n$ по множителю $M$.

Что же касается опредѣленія числителя искомой дроби, какъ цѣлой функціи, удовлетворяющей найденному дифференціальному уравненію, то оно представляетъ одинаковыя трудности, въ какомъ бы изъ двухъ видовъ (1) и (2) это уравненіе ни было получено.

Такимъ образомъ заключаемъ, что разысканіе раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя нельзя считать пріемомъ менѣе выгоднымъ даже въ практическомъ отношеніи, чѣмъ какой-либо другой пріемъ, служащій для той же цѣли. О теоретическомъ значеніи этого пріема, какъ орудія для вывода схемы вычисленій, предоставляемъ судить читателю на основаніи всего вышеизложеннаго.

20. Въ заключеніе скажемъ нѣсколько словъ о тѣхъ видахъ интегрирующаго множителя, въ которыхъ онъ разыскивался В. Г. Имшенецкимъ.

Изъ опредѣленія функцій $X$, $X_1$, $X_2 \ldots X_k \ldots$ слѣдуетъ, что

$$X = X_1 X_2 \ldots X_k \ldots$$

Поэтому, обозначая буквою $\gamma$ наибольшій изъ показателей $\beta_1$, $\beta_2$, ... въ выраженіи интегрирующаго множителя

$$M = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_k^{\beta_k} \ldots,$$

будемъ имѣть

$$X^\gamma = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_k^{\beta_k} \ldots H = MH,$$

гдѣ $H$ есть нѣкоторый полиномъ.

Слѣдовательно, $X^\gamma$ есть также интегрирующій множитель.

Если положимъ, далѣе, что $Q$ есть какая-нибудь извѣстная цѣлая функція, дѣлящаяся на $X$, то получимъ

$$Q^\gamma = X^\gamma G$$

и въ частности

$$P_0^\gamma = X^\gamma G_0 ,$$

гдѣ $G$ и $G_0$ суть нѣкоторые полиномы.

Слѣдовательно, $Q^\gamma$ и $P_0^\gamma$ будутъ также интегрирующіе множители.

Виды интегрирующаго множителя

$$P_0^\gamma \text{ и } X^\gamma$$

и суть тѣ, которые разсматривались В. Г. Имшенецкимъ.

Разысканіе множителя подъ этими видами имѣетъ ту теоретическую выгоду, что задача сводится при этомъ на опредѣленіе одного только числа $\gamma$. Вмѣстѣ съ тѣмъ и самый процессъ вычисленій можетъ быть формулированъ проще, а именно слѣдующимъ образомъ.

Для нахожденія интегрирующаго множителя подъ видомъ $P_0^\gamma$ нужно составить рядъ уравненій

$$F_1(\beta) = 0 , \; F_2(\beta) = 0 , \ldots F_k(\beta) \ldots ,$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ неизвѣстнаго $x$ изъ уравненія

$$P_0 = 0$$

и уравненія

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!} P_0^{(k)} -$$

$$- \frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!} P_1^{(k-1)} + \ldots = 0$$

при $k = 1 , 2 , 3 , \ldots$

Наибольшій изъ цѣлыхъ положительныхъ корней составленныхъ такимъ образомъ уравненій будетъ искомымъ значеніемъ $\gamma$.

Замѣтимъ, что замѣна каждаго изъ уравненій

$$X_1 = 0 , \; X_2 = 0 , \ldots X_k = 0 , \ldots$$

разсматривавшихся нами прежде, однимъ и тѣмъ же

$$P_0 = 0$$

позволительна потому, что $P_0$ содержитъ множителемъ каждый изъ полиномовъ $X_1$, $X_2 \dots X_k \dots$, вслѣдствіе чего и уравненіе

$$F_k(\beta) = 0$$

(каково бы въ немъ ни было $k$) можетъ получить отъ такой замѣны только нѣсколько лишнихъ корней, не утрачивая всѣхъ прежнихъ. Эти лишніе корни не нарушаютъ, однако, правильности результата, такъ какъ въ случаѣ, когда между ними не будетъ большаго чѣмъ наибольшій изъ прежнихъ корней, значеніе числа $\gamma$ не измѣнится; въ противномъ же случаѣ это значеніе увеличится, отъ чего $P_0^\gamma$ не перестанетъ быть интегрирующимъ множителемъ.

Допущеніе излишнихъ множителей въ полиномахъ, надъ которыми производятся вычисленія, не вредящее дѣлу теоретически, можетъ, впрочемъ, повлечь за собою слишкомъ большое усложненіе вычисленій. Въ этомъ и заключается единственное неудобство разысканія интегрирующаго множителя подъ тѣми видами, въ которыхъ онъ разсматривался В. Г. Имшенецкимъ.

# Нѣкоторые результаты наблюденій, произведенныхъ на астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета съ маятниками Реберъ-Пашвица.

**Г. В. Левицкаго.**

Въ началѣ августа 1893 года на астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета установлены были два горизонтальныхъ маятника Реберъ-Пашвица вмѣстѣ съ фотографическимъ регистрирнымъ приборомъ.

Маятники Реберъ-Пашвица служатъ, между прочимъ, для изслѣдованія колебаній отвѣстной линіи и движеній земной коры. По отношенію къ явленіямъ послѣдняго рода разсмотрѣніе произведенныхъ на Харьковской обсерваторіи отъ 4 августа 1893 по 4 августа 1894 года наблюденій дало слѣдующіе результаты:

1. Наблюденія Мильна, Реберъ-Пашвица и другихъ показали, что земная кора часто испытываетъ продолжительныя микроколебанія, обозначаемыя терминомъ: „seismische Unruhe“. Упомянутые ученые находили связь между вѣтромъ и этими колебаніями, но приписывали имъ однако, по крайней мѣрѣ отчасти, сейсмическое происхожденіе. Наблюденія въ Харьковѣ,—наиболѣе полныя изъ всѣхъ до сихъ поръ произведенныхъ, такъ какъ при этомъ употреблялось два маятника, въ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ,—показываютъ, съ значительною степенью вѣроятности, что единственная причина разсматриваемыхъ микроколебаній (seismische Unruhe) есть дѣйствіе вѣтра.

2. Вѣроятно, отчасти вслѣдствіе весьма значительной чувствительности харьковскихъ маятниковъ, замѣчены были весьма своеобразныя періодическія качанія земной коры, съ амплитудою до $0''07$ и съ періодомъ, измѣняющимся между предѣлами отъ $3^1/_2$ до 10 минутъ. Съ такою отчетливостью и въ теченіе столь значительныхъ промежутковъ времени, какъ въ Харьковѣ, качанія эти до сихъ поръ еще не наблю-

дались. Ниже будутъ упомянуты нѣкоторые факты, указывающіе, повидимому, на сейсмическое происхожденіе качаній.

3. Въ теченіе года чрезъ Харьковъ прошло не менѣе 120 землетрясеній весьма различной силы. Чрезвычайно сильны и продолжительны были землетрясенія 22 марта и 10 іюля 1894 г. (послѣднее — Константинопольское землетрясеніе). Происхожденіе многихъ землетрясеній удалось констатировать, въ томъ числѣ землетрясеній въ странахъ весьма отдаленныхъ, какъ въ Туркестанѣ, Японіи и Венецуэлѣ. Даже такія весьма слабыя землетрясенія, какъ Одесскія, отмѣчаются въ Харьковѣ весьма замѣтнымъ образомъ.

4. Значительная чувствительность Харьковскихъ маятниковъ и весьма удовлетворительная установка вала регистрирнаго прибора въ фотографическомъ фокусѣ линзъ маятниковъ (въ особенности для маятника въ меридіанѣ) позволила,—и повидимому не безъ успѣха,—искать предвѣстниковъ землетрясеній, т. е. движеній маятниковъ, обусловливаемыхъ тѣми процессами, результатомъ дѣйствія которыхъ является землетрясеніе. Приэтомъ оказалось, что въ большинствѣ случаевъ землетрясенію предшествуютъ за нѣсколько часовъ, иногда даже за 7 и за 9 *), весьма слабыя колебанія маятниковъ, нерѣдко съ амплитудой лишь въ 0″01 или 0″02, начинающіяся или отъ слабаго подземнаго толчка или небольшаго, но рѣзкаго качанія почвы, выражающагося короткимъ изгибомъ кривой отъ маятника на фотограммѣ. Затѣмъ, въ немногихъ случаяхъ, именно для тѣхъ землетрясеній, которыя имѣли мѣсто во время вышеупомянутыхъ продолжительныхъ періодическихъ качаній почвы, никакихъ колебаній маятника, какъ въ только что упомянутыхъ случаяхъ, не замѣчается. Повидимому эти періодическія качанія и служатъ въ разсматриваемыхъ случаяхъ предвѣстниками землетрясеній **). Наконецъ въ весьма небольшомъ числѣ случаевъ, именно только въ двухъ, при весьма слабыхъ притомъ землетрясеніяхъ, никакихъ предвѣстниковъ землетрясеній не замѣчено, т. е. процессы, ведущія къ появленію этихъ землетрясеній, чувствительныхъ для маятниковъ движеній земной коры не производили.

Предполагаемая связь между землетрясеніями и тѣми явленіями, которыя названы выше предвѣстниками, составляетъ, конечно, пока лишь гипотезу, нуждающуюся въ многократныхъ и многосторонніхъ подтвержденіяхъ. Однако почти постоянное присутствіе тѣхъ или другихъ

---

*) Вообще, чѣмъ значительнѣе землетрясеніе, тѣмъ раньше появляются его предвѣстники, хотя встрѣчаются, повидимому, и исключенія; именно, предвѣстники нѣкоторыхъ сильныхъ землетрясеній появлялись лишь за $3^1/_4$ часа, а землетрясеній средней силы—за 9 час.

**) Это указываетъ также на сейсмическое происхожденіе качаній.

предвѣстниковъ передъ землетрясеніями, придаетъ, повидимому, этой связи нѣкоторую степень вѣроятности.

Итакъ, въ Харьковѣ наблюдались землетрясенія троякаго рода:

a) землетрясенія, коимъ предшествуютъ очень слабые толчки и колебанія,

b) землетрясенія, происходящія во время періодическихъ качаній почвы, и

c) очень слабыя землетрясенія, происходящія безъ всякихъ предвѣстниковъ.

Не соотвѣтствуетъ-ли это категоріямъ землетрясеній, установленнымъ геологами, именно землетрясеніямъ дислокаціоннымъ, вулканическимъ и денудаціоннымъ?

# Гипотетическая среда Больтцмана и теорія Герца.

**А. П. Грузинцева.**

Больтцманъ въ концѣ прошлаго года опубликовалъ работу *), въ которой даетъ механическое толкованіе свойствъ гипотетической среды — („электромагнитной среды", какъ онъ ее называетъ, т. е. свѣтоваго эфира, по всей вѣроятности), приводящее его къ уравненіямъ Максуэлля въ теоріи электричества и магнетизма. Хотя свойства, приписываемыя Больтцманомъ той универсальной срединѣ, кинетическое состояніе которой обусловливаетъ электромагнитныя и оптическія явленія въ ней, совершенно гипотетическаго характера, но такъ какъ, съ одной стороны, они не противорѣчатъ общимъ взглядамъ физиковъ на сущность физическихъ явленій, а съ другой—крайне важно въ настоящее время имѣть хотя приблизительную картину кинетическаго состоянія діэлектрической универсальной среды, то мы думаетъ, что не безполезно будетъ разсмотрѣть предлагаемое Больтцманомъ. Задавшись такой цѣлью и вдумываясь въ соображенія мюнхенскаго физика, не трудно замѣтить, что его теорію должно дополнить условіемъ „несжимаемости электромагнитной среды"; когда же мы введемъ это условіе въ общія механическія уравненія Больтцмана, то увидимъ, что онѣ приводятъ не къ уравненіямъ Максуэлля, какъ полагаетъ Больтцманъ, а къ уравненіямъ Герца. Такой результатъ показываетъ всю важность предположеній Больтцмана и заставляетъ обработать ихъ съ болѣе общей точки зрѣнія черезъ введеніе силъ на границѣ срединъ, разсматривая „электромагнитную среду", какъ *упругую несжимаемую жидкость*, а не упругое твердое тѣло, какъ приходилось разсматривать „свѣтовой эфиръ" въ эластиціонныхъ теоріяхъ свѣта.

Такъ какъ расширеніе точки зрѣнія Больтцмана измѣняетъ результаты его теоріи и даетъ болѣе полную картину тѣхъ движеній, которыя

*) Wiedemann's Annalen, Bd. XLVIII, S. 78—99.

выполняются внутри діэлектрической средины, то мы раздѣлили настоящую замѣтку на двѣ части. *Въ первой* мы разсмотримъ теорію Больтцмана въ томъ видѣ, какъ онъ ее далъ самъ, дополнивъ ее лишь только въ одномъ пунктѣ, а именно введемъ въ уравненіе движенія условіе „несжимаемости“ средины,—условіе, о которомъ Больтцманъ упоминаетъ, но не пользуется имъ *), что, по нашему мнѣнію, неправильно.

*Во второй* части я дополняю силы, приложенныя къ частицамъ средины согласно теоріи Больтцмана, новыми силами, которыя должны быть приложены къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину или, лучше, отдѣляющей ее отъ другой, т. е. отъ подобной же среды, но заполняющей другое тѣло. Эти силы, приложенныя къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину, мнѣ кажется, необходимо должны существовать, такъ какъ на поверхности, отдѣляющей одно тѣло отъ другого, могутъ происходить, да и дѣйствительно происходятъ, особыя явленія (напримѣръ, явленіе оптической поляризаціи), а разъ имѣетъ мѣсто явленіе, необходимо допустить существованіе силъ, вызывающихъ его.

---

## I.

Изложимъ теперь теорію Больтцмана. Онъ предполагаетъ, что каждая частица „электромагнитной среды“, или эфира, выполняетъ нѣкоторое движеніе общаго характера, т. е. поступательное и вращательное. Пусть

$$u, \quad v, \quad w$$

будутъ проекціи перемѣщенія частицы $M(x, y, z)$ на координатныя оси, а

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

проекціи удвоенной скорости вращенія эфирнаго элемента на тѣ же оси; тогда:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \\ \beta &= \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \\ \gamma &= \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Къ частицѣ $M$, которую предполагаемъ внутри *изотропной* средины, ограниченной нѣкоторой поверхностью, приложены, по Больтцману, силы:

---

*) Его стѣсняетъ необходимость допускать въ такомъ случаѣ силы „гидростатическаго давленія“, но, какъ увидимъ, эти силы исключаются.

1. Ускорительныя, работа которыхъ за элементъ времени можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\delta T = \frac{k d\tau}{4\pi}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t} + v'\frac{\partial v'}{\partial t} + w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right)dt, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

если масса единицы объема эфира будетъ:

$$\frac{k}{4\pi},$$

а элементъ объема средины около точки $M(x, y, z)$ будетъ:

$$d\tau,$$

и кромѣ того:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

2. Сопротивленія среды движенію точки $M$; силу сопротивленія Больтцманъ принимаетъ пропорціональной скорости частицы, т. е. проекціи этой силы будутъ:

$$\lambda_1 u' d\tau, \quad \lambda_1 v' d\tau, \quad \lambda_1 w' d\tau,$$

гдѣ $\lambda_1$ коэффиціентъ пропорціональности.

Элементарная работа этихъ силъ будетъ:

$$\delta R = \lambda_1 d\tau (u'^2 + v'^2 + w'^2)\, dt. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Эта работа обращается внутри средины въ теплоту, которая извѣстна подъ именемъ „теплоты Джауля“.

3. Затѣмъ Больтцманъ допускаетъ существованіе силъ сопротивленія вращенію элемента; эти силы пропорціональны проекціямъ $\alpha, \beta, \gamma$, а слѣдовательно проекціи ихъ, обозначая коэффиціентъ пропорціональности черезъ $\frac{1}{4\pi\mu}$, будутъ:

$$\frac{\alpha d\tau}{4\pi\mu}, \quad \frac{\beta d\tau}{4\pi\mu}, \quad \frac{\gamma d\tau}{4\pi\mu}.$$

Работа ихъ должна состоять въ стремленіи уничтожить вращеніе элемента, т. е. сообщить ему перемѣщеніе, проекціи котораго должны быть:

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t}dt, \quad -\frac{\partial \beta}{\partial t}dt, \quad -\frac{\partial \gamma}{\partial t}dt;$$

слѣдовательно, эта работа можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\delta G = -\frac{d\tau}{4\pi\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)dt \ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

4. Наконецъ, къ точкѣ $M$ приложены внѣшнія силы, проекціи которыхъ пусть будутъ:

$$Xd\tau\,,\quad Yd\tau\,,\quad Zd\tau\,,$$

а слѣдовательно, элементарная работа ихъ будетъ:

$$\delta U = (Xu'+Yv'+Zw')d\tau\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

Сложивъ выраженія (b), (c), (d) и (e) и взявъ интегралъ по всему объему средины, мы, по закону сохраненія энергіи, получимъ:

$$\int(\delta T+\delta G+\delta R+\delta U)=0\,,$$

т. е.

$$dt\int d\tau\left\{k\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t}+v'\frac{\partial v'}{\partial t}+w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)+\right.$$
$$\left.+4\pi\lambda_1(u'^2+v'^2+w'^2)+4\pi(Xu'+Yv'+Zw')\right\}=0\,. \quad \ldots \text{(f)}$$

Преобразуя это равенство при помощи интегрированія по частямъ, послѣ подстановки значеній

$$\alpha\,,\quad \beta\,,\quad \gamma$$

изъ равенства (a), Больтцманъ получаетъ уравненія движенія въ томъ видѣ, въ какомъ ихъ далъ Максуэлль; но при этомъ онъ опустилъ изъ вида, что количества

$$u'dt\,,\quad v'dt\,,\quad w'dt$$

не совершенно произвольны, а должны удовлетворять нѣкоторому соотношенію. Дѣйствительно, вслѣдствіе несжимаемости средины имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

или, по дифференцированіи по $t$:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0\,. \ldots\ldots\ldots \text{(g)}$$

Вотъ этому уравненію и должны удовлетворять значенія $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$.

Чтобы ввести условіе (g) въ равенство (f) мы умножаемъ это уравненіе на $H\,dt\,d\tau$, если $H$—неизвѣстная функція координатъ $(x, y, z)$ и времени $t$, беремъ интегралъ по всему объему и прикладываемъ результатъ къ равенству (f); получаемъ:

$$dt\int d\tau\left\{k\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t}+v'\frac{\partial v'}{\partial t}+w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+4\pi\lambda_1(u'^2+v'^2+w'^2)+4\pi(Xu'+Yv'+Zw')+H\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\right\}=0. \quad \text{(h)}$$

Но при помощи равенствъ (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{\partial w'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y};$$

поэтому получимъ, пользуясь преобразованіемъ Грина:

$$\int\frac{d\tau}{\mu}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)=-\int d\tau\left\{u'\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+v'\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\right]+w'\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)\right]\right\}-\int\frac{dS}{\mu}[u'(C_1\beta-B_1\gamma)+$$

$$+v'(A_1\gamma-C_1\alpha)+w'(B_1\alpha-A_1\beta)] \quad \ldots\ldots \text{(k)}$$

$$\int Hd\tau\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=-\int d\tau\left(u'\frac{\partial H}{\partial x}+v'\frac{\partial H}{\partial y}+w'\frac{\partial H}{\partial z}\right)-$$

$$-\int HdS(A_1u'+B_1v'+C_1w'). \quad \ldots\ldots\ldots \text{(l)}$$

Въ правыхъ частяхъ этихъ равенствъ первые интегралы относятся ко всему объему, занятому срединой, а вторые—ко всѣмъ точкамъ поверхности, ограничивающей этотъ объемъ, и кромѣ того $dS$ обозначаетъ элементъ поверхности, а

$$A_1,\quad B_1,\quad C_1$$

косинусы угловъ нормала къ поверхности, проведеннаго внутрь объема.

Подставляя эти значенія интегралов изъ равенствъ (k) и (l) въ равенство (h), получимъ:

$$dt\int d\tau\left\{u'\left[k\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial u}{\partial t}+4\pi X-\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\right.$$
$$+v'\left[k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial v}{\partial t}+4\pi Y-\frac{\partial H}{\partial y}\right]+$$
$$\left.+w'\left[k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)+4\pi\lambda_1\frac{\partial w}{\partial t}+4\pi Z-\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}+$$
$$+dt\int dS\left\{u'\left[C_1\frac{\beta}{\mu}-B_1\frac{\gamma}{\mu}-A_1H\right]+v'\left[A_1\frac{\gamma}{\mu}-C_1\frac{\alpha}{\mu}-B_1H\right]+\right.$$
$$\left.+w'\left[B_1\frac{\alpha}{\mu}-A_1\frac{\beta}{\mu}-C_1H\right]\right\}=0\ldots\ldots\ldots(f')$$

Теперь имѣемъ право считать $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$ совершенно произвольными количествами, а потому послѣднее равенство распадается на слѣдующія двѣ системы уравненій:

A. *внутри* средины:

$$\left.\begin{aligned}k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-4\pi X+\frac{\partial H}{\partial x}\\ k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial v}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-4\pi Y+\frac{\partial H}{\partial y}\\ k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+4\pi\lambda_1\frac{\partial w}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)-4\pi Z+\frac{\partial H}{\partial z}\end{aligned}\right\}\ldots(A)$$

и B. *на границѣ* средины:

$$\left.\begin{aligned}C_1\beta-B_1\gamma&=A_1H\mu\\ A_1\gamma-C_1\alpha&=B_1H\mu\\ B_1\alpha-A_1\beta&=C_1H\mu\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(B)$$

Если въ этихъ уравненіяхъ положимъ:

$$H=0,$$

то они обратятся въ уравненія, полученныя Больцманомъ, какъ легко можно убѣдиться *).

*) L. c. стр. 82, уравненія (12); разница только въ обозначеніяхъ.

Предполагая средину неограниченной, мы увидимъ, что уравненія (B) сами собой удовлетворяются, ибо на безконечности всѣ функціи:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad H$$

обращаются въ нуль. Такимъ образомъ, для неограниченной средины условія на границахъ удовлетворяются; что же касается средины, ограниченной нѣкоторой поверхностью, то Больтцманъ вмѣсто системы (B) (при $H=0$) выводитъ другую, состоящую въ равенствѣ проекцій $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $u'$, $v'$, $w'$ на касательную плоскость; проекціи же на нормалъ къ поверхности не равны. Подробный выводъ этихъ условій Больтцмана можно найти въ его „Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und Lichtes", II Theil, S. 19—21 (Leipzig 1893). Но такой пріемъ совершенно искусственный: основное уравненіе движенія въ срединѣ должно дать и условія на границахъ, какъ это показано во *второй* части этой замѣтки. Уравненія (A) заключаютъ въ себѣ неизвѣстную функцію $H$, входящую въ видѣ членовъ:

$$\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial z},$$

аналогичныхъ проекціямъ „гидростатическаго давленія" въ уравненіяхъ гидродинамики; хотя подобныя силы ни Максвелль, ни Герцъ не разсматривали, но онѣ не вредятъ дѣлу, ибо, вслѣдствіе физической неопредѣленности функціи $H$, уравненія (A) не будутъ окончательными: эта функція $H$ должна быть исключена изъ нихъ *). Для исключенія продифференцируемъ $3^{\text{ье}}$ уравненіе въ системѣ (A) по $y$, $2^{\text{ое}}$ по $z$ и изъ перваго результата вычтемъ второй; получимъ при помощи (a) въ предположеніи, что силы

$$X, \quad Y, \quad Z$$

имѣютъ потенціалъ:

$$k\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Delta\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) - \frac{\partial l_1}{\partial x},$$

*) Если желаемъ опредѣлить аналитически эту функцію, то продифференцируемъ уравненія (A) по $x$, $y$, $z$ и результаты сложимъ; получимъ вслѣдствіе равенства (g):

$$\Delta H = 4\pi\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Если силы $X$, $Y$, $Z$ удовлетворяютъ тождественно уравненію:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

то функція $H$ опредѣлится изъ болѣе простого уравненія:

$$\Delta H = 0.$$

гдѣ:

$$l_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \ldots\ldots\ldots \text{(m)}$$

Положимъ:

$$\int_0^t \alpha dt = A\varepsilon\xi\,, \quad \int_0^t \beta dt = A\varepsilon\eta\,, \quad \int_0^t \gamma dt = A\varepsilon\zeta\,, \ldots\ldots \text{(n)}$$

считая время отъ момента начала движенія, т. е. отъ момента, когда всѣ функціи $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $u$, $v$, $w$ равны нулю, и подразумѣвая подъ $A$ и $\varepsilon$ двѣ постоянныя.

При такихъ положеніяхъ предыдущее уравненіе можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta\left(\frac{\xi}{\mu}\right) - \frac{\partial l'}{\partial x}\right],$$

гдѣ

$$l' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{\mu}\right) \ldots\ldots\ldots \text{(p)}$$

Интегрируя по $t$ и помня, что для $t = 0$ всѣ функціи равны нулю, получаемъ:

$$k\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial t} = \Delta\frac{\xi}{\mu} - \frac{\partial l'}{\partial x} \ldots\ldots\ldots \text{(q)}$$

Если примемъ, что $\mu$ постоянно, и положимъ:

$$k = A^2\varepsilon\,, \quad \lambda_1 = A^2\lambda, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(r)}$$

то уравненіе (q) обратимъ въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 4\pi\varkappa\frac{\partial\xi}{\partial t} = \omega^2\left(\Delta\xi - \frac{\partial l}{\partial x}\right), \ldots\ldots\ldots \text{(q bis)}$$

гдѣ

$$\varkappa = \frac{\lambda_1}{k}\,, \quad \omega^2 = \frac{1}{k\mu}$$

и

$$l = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(s)}$$

Уравненіе (q bis) и ему аналогичныя съ $\eta$ и $\zeta$ тождественны съ уравненіями (XIII) въ моей „Электромагнитной теоріи свѣта“ (стр. 11), выведенными изъ общихъ уравненій Г. Герца.

Разсмотримъ ближе положенія (n). Подставляя значенія $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ изъ (n) въ равенства (a), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ A\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ A\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (t)$$

а это уравненія (XI) моей теоріи (стр. 10).

Если внѣшнихъ силъ нѣтъ, т. е., если

$$X = Y = Z = 0,$$

тогда изъ уравненій (A) можемъ получить систему (X) стр. 9 моей „Электромагнитной теоріи свѣта“.

Дѣйствительно, положимъ:

$$H = \frac{\partial H_1}{\partial t},$$

тогда первое изъ уравненій (A) будетъ при помощи (a):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{k\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 u - \frac{\partial H_1}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{A\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right\},$$

откуда:

$$k\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 u - \frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{A\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

или, если примемъ въ разсчетъ обозначенія (r):

$$A\mu\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi A\mu\varkappa(u - u_0) = \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

и два подобныхъ уравненія для $v$ и $w$.

Въ нихъ положено:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = 4\pi A^2\lambda u_0,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = 4\pi A^2\lambda v_0,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} = 4\pi A^2\lambda w_0.$$

Такимъ образомъ, получимъ уравненія (X) стр. 9; кромѣ того, видимъ, что

$$H_1 = 4\pi A^2 \lambda \psi .$$

Хотя, какъ показано дальше, при

$$X = Y = Z = 0$$

функція $H = 0$, но функція $H_1$ будетъ существовать, и она будетъ функціей только координатъ $(x, y, z)$; въ этомъ убѣждаемся прямымъ интегрированіемъ по $t$ уравненій (A): $H_1$ явится какъ постоянное интегрированія.

Займемся теперь уравненіями (B). Исключая изъ нихъ $H$, найдемъ:

$$\frac{\alpha}{A_1} = \frac{\beta}{B_1} = \frac{\gamma}{C_1} , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(u)}$$

что показываетъ, что вращеніе элемента эфира происходитъ въ плоскости касательной къ поверхности, ограничивающей средину.

Равенства (u) показываютъ, что если средина безпредѣльна, то

$$H = 0$$

на границѣ средины. Если силы $X$, $Y$, $Z$ удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 ,$$

то тогда

$$H = 0$$

вездѣ.

Равенства (u) даютъ для $\xi$, $\eta$, $\zeta$ подобныя же соотношенія:

$$\frac{\xi}{A_1} = \frac{\eta}{B_1} = \frac{\zeta}{C_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(v)}$$

## II.

Хотя мы и получили вполнѣ опредѣленныя рѣшенія, но во всякомъ случаѣ нашъ анализъ не полонъ, ибо несомнѣнно, что на границѣ срединъ дѣйствуютъ нѣкоторыя силы, къ разсмотрѣнію которыхъ и перейдемъ.

Пусть

$$X_n , \quad Y_n , \quad Z_n$$

будутъ проекціи силъ приложенныхъ къ каждому элементу $dS$ поверхности, ограничивающей средину; въ такомъ случаѣ работа этихъ силъ за безконечно-малый элементъ времени будетъ:

$$dt\int dS(X_n u' + Y_n v' + Z_n w') \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

и въ уравненіяхъ (f) и (f′) прибавится въ лѣвой части этотъ членъ ($\alpha$).

Преобразуя эти уравненія такъ же, какъ и выше, мы найдемъ для всякой точки *внутри* средины тѣ же уравненія (A), а для точекъ на границахъ получимъ новую систему, а именно:

$$\left.\begin{aligned} C_1\beta - B_1\gamma - A_1 H\mu + X_n\mu = 0 \\ A_1\gamma - C_1\alpha - B_1 H\mu + Y_n\mu = 0 \\ B_1\alpha - A_1\beta - C_1 H\mu + Z_n\mu = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\text{B bis})$$

Если умножимъ эти равенства на $dt$ и возьмемъ интегралъ отъ 0 до $t$, то эти уравненія дадутъ при помощи (n):

$$\left.\begin{aligned} C_1\eta - B_1\zeta - A_1 H_1 + \Xi = 0 \\ A_1\zeta - C_1\xi - B_1 H_1 + H = 0 \\ B_1\xi - A_1\eta - C_1 H_1 + Z = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (\text{C})$$

гдѣ положено:

$$\int_0^t H\mu dt = A\varepsilon H_1,$$

$$\frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t X_n\mu dt = \Xi, \quad \frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t Y_n\mu dt = H, \quad \frac{1}{A\varepsilon}\int_0^t Z_n\mu dt = Z. \quad \ldots (\beta)$$

Не трудно видѣть, что $\Xi$, $H$, $Z$ суть проекціи нѣкотораго вектора $P$, т. е., что

$$\Xi = P\cos(Px), \quad H = P\cos(Py), \quad Z = P\cos(Pz). \quad \ldots (\gamma)$$

Выведемъ слѣдствія изъ условій (C).

Сначала напишемъ уравненія (C) въ болѣе ясномъ видѣ.

Пусть

$$\varrho = +\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

и

$$\frac{\xi}{\varrho} = \cos(\varrho x), \quad \frac{\eta}{\varrho} = \cos(\varrho y), \quad \frac{\zeta}{\varrho} = \cos(\varrho z).$$

Введемъ два направленія: $S$ и $T$; первое перпендикулярное къ плоскости $nMP$, а другое перпендикулярное къ плоскости $nMS$, тогда для косинусовъ угловъ этихъ перпендикуляровъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\cos(Sx)\sin(Pn) &= C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)\\ \cos(Sy)\sin(Pn) &= A_1\cos(Pz) - C_1\cos(Px)\\ \cos(Sz)\sin(Pn) &= B_1\cos(Px) - A_1\cos(Py)\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (\delta)$$

затѣмъ

$$\left.\begin{aligned}\cos(Tx) &= B_1\cos(Sz) - C_1\cos(Sy)\\ \cos(Ty) &= C_1\cos(Sx) - A_1\cos(Sz)\\ \cos(Tz) &= A_1\cos(Sy) - B_1\cos(Sx)\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\varepsilon)$$

Напишемъ уравненія (C) въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\Xi = P\cos(Px) &= A_1H_1 + \varrho\,[B_1\cos(\varrho z) - C_1\cos(\varrho y)]\\ H = P\cos(Py) &= B_1H_1 + \varrho\,[C_1\cos(\varrho x) - A_1\cos(\varrho z)]\\ Z = P\cos(Pz) &= C_1H_1 + \varrho\,[A_1\cos(\varrho y) - B_1\cos(\varrho x)]\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (\text{C bis})$$

Умножимъ эти равенства сначала на $A_1$, $B_1$, $C_1$, а потомъ на $\cos(\varrho x)$, $\cos(\varrho y)$, $\cos(\varrho z)$, и складывая результаты, получимъ:

$$P\cos(Pn) = H_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\varkappa)$$

$$P\cos(P\varrho) = H_1\cos(\varrho n)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\lambda)$$

Уравненіе ($\varkappa$) показываетъ, что функція $H_1$ численно равна проекціи давленія $P$ на нормалъ къ поверхности.

Умножимъ тѣ же уравненія (C bis) на $\cos(Sx)$, $\cos(Sy)$ и $\cos(Sz)$ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$P\cos(PS) = \varrho\,\{\cos(\varrho x)\,[C_1\cos(Sy) - B_1\cos(Sz)] + \ldots\}$$

или при помощи ($\varepsilon$):

$$P\cos(PS) = -\varrho\cos(\varrho T).$$

Но по условію

$$\cos(PS) = 0,$$

слѣдовательно:

$$\cos(\varrho T) = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mu)$$

т. е. прямая $T$ перпендикулярна къ $\varrho$: значитъ, векторъ $\varrho$ лежитъ въ плоскости $nMS$.

Итакъ, векторы $P$ и $\varrho$ лежатъ въ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, что видно и изъ сравненія равенствъ $(\varkappa)$ и $(\lambda)$, которыя даютъ по исключеніи $H_1$:

$$\cos(P\varrho) = \cos(Pn)\cos(\varrho n).$$

Умножая уравненія $(\varepsilon)$ на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$ и $\cos(Pz)$, по сложеніи получимъ:

$$\cos(PT) = \cos(Sx)[C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)] +$$
$$+ \cos(Sy)[A_1\cos(Pz) - C_1\cos(Px)] + \cos(Sz)[B_1\cos(Px) - A_1\cos(P_1y)]$$

или, при помощи $(\delta)$:

$$\cos(PT) = \sin(Pn). \quad \ldots\ldots\ldots (\nu)$$

Умножимъ теперь уравненія (C bis) на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$ и $\cos(Pz)$; получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P = H_1\cos(Pn) + \varrho\{\cos(\varrho x)[C_1\cos(Py) - B_1\cos(Pz)] + \ldots\},$$

т. е.

$$P = H_1\cos(Pn) + \varrho\sin(Pn)\cos(\varrho S). \quad \ldots\ldots (\omega)$$

Подставляя сюда значеніе $H_1$ изъ равенства $(\varkappa)$, получимъ:

$$P\sin^2(Pn) = \varrho\sin(Pn)\cos(\varrho S)$$

или, если $P$ не совпадаетъ съ $n$:

$$P\sin(Pn) = \varrho\cos(\varrho S). \quad \ldots\ldots\ldots (\pi)$$

Возведемъ уравненія (C bis) въ квадратъ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$P^2 = H_1^2 + \varrho^2\sin^2(\varrho n). \quad \ldots\ldots\ldots (\varrho)$$

Складывая же квадраты $(\varkappa)$ и $(\pi)$, получимъ:

$$P^2 = H_1^2 + \varrho^2\cos^2(\varrho S). \quad \ldots\ldots\ldots (\tau)$$

Сравнивая съ $(\varrho)$, находимъ:

$$\cos(\varrho S) = \pm\sin(\varrho n). \quad \ldots\ldots\ldots (\sigma)$$

Къ тѣмъ же результатамъ мы пришли бы, если бы представили формулы (C bis) въ иной формѣ. Съ этой цѣлью умножимъ второе изъ уравненій (C bis) на $C_1$, третье на $-B_1$ и сложимъ результаты; найдемъ

при помощи ($\sigma$) первое изъ ниженаписанныхъ уравненій; остальныя два получатся подобнымъ же образомъ:

$$P\sin(Pn)\cos(Sx) = \varrho[\cos(\varrho x) - A_1\cos(\varrho n)],$$
$$P\sin(Pn)\cos(Sy) = \varrho[\cos(\varrho y) - B_1\cos(\varrho n)],$$
$$P\sin(Pn)\cos(Sz) = \varrho[\cos(\varrho z) - C_1\cos(\varrho n)].$$

Отсюда, умножая на $\cos(\varrho x)$, $\cos(\varrho y)$, $\cos(\varrho z)$, получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P\sin(Pn)\cos(S\varrho) = \varrho\sin^2(\varrho n).$$

Умножимъ на $\cos(Sx)$, $\cos(Sy)$, $\cos(Sz)$ и сложимъ; найдемъ:

$$P\sin(Pn) = \varrho\{\cos(\varrho S) - \cos(\varrho n)\cos(nS)\},$$

т. е.

$$P\sin(Pn) = \varrho\cos(\varrho S).$$

Сравнивая съ предыдущимъ, получимъ равенство ($\sigma$).

Умножимъ на $\cos(Tx)$, $\cos(Ty)$, $\cos(Tz)$, получимъ по сложеніи результатовъ:

$$P\sin(Pn)\cos(ST) = \varrho\{\cos(\varrho T) - \cos(\varrho n)\cos(Tn)\},$$

т. е.

$$\cos(\varrho T) = 0.$$

Умножимъ на $\cos(Px)$, $\cos(Py)$, $\cos(Pz)$; получимъ:

$$P\sin(Pn)\cos(PS) = \varrho\{\cos(P\varrho) - \cos(\varrho n)\cos(Pn)\},$$

т. е.

$$\cos(\varrho P) = \cos(nP)\cos(n\varrho),$$

или: плоскости $nMP$ и $nM\varrho$ взаимно перпендикулярны.

Если давленіе $P$ перпендикулярно къ поверхности, то предыдущія соотношенія дадутъ:

$$\cos(\varrho S) = 0,$$

т. е. и векторъ $\varrho$ совпадаетъ съ нормаломъ къ поверхности; другими словами, частицы среды вращаются въ плоскостяхъ касательныхъ къ поверхности. Затѣмъ находимъ, что

$$H_1 = P.$$

До сихъ поръ мы разсматривали условія на границахъ по отношенію къ одной средѣ; разсмотримъ ихъ по отношенію къ обѣимъ срединамъ,

раздѣленнымъ поверхностью, нормалъ къ которой мы теперь обозначимъ знакомъ $N$. Возьмемъ на касательной плоскости двѣ ортогоналеныя прямыя $MP$ и $MQ$; въ такомъ случаѣ система прямыхъ:

$$MP,\quad MQ,\quad MN$$

будетъ ортогональная система и пусть косинусы направленія $MP$ будутъ $A''$, $B''$, $C''$, а $MQ$ — $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$. Пусть проекціи $\xi$, $\eta$, $\zeta$ на прямыя $MP$, $MQ$ и $MN$ будутъ: $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$; тогда, умножая уравненія (C) сначала на $A''$, $B''$, $C''$, потомъ на $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$ и наконецъ на $A_1$, $B_1$, $C_1$ и складывая результаты, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta' + P\cos(PP) &= 0 \\ \xi' - P\cos(PQ) &= 0 \\ H_1 - P\cos(PN) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

ибо

$$B_1C'' - C_1B'' = A_{,,} \text{ и т. п.}$$
$$B_1C_{,,} - C_1B_{,,} = -A'' \text{ и т. п.}$$

Но по физическому смыслу силъ давленія на поверхности, имѣемъ:

$$(X_n)_1 = (X_n)_2,\quad (Y_n)_1 = (Y_n)_2,\quad (Z_n)_1 = (Z_n)_2, \ldots\ldots (E)$$

да при помощи равенства ($\beta$) находимъ:

$$P\cos(PP) = \frac{\mu}{A\varepsilon}\int_0^t X_n'dt,\quad P\cos(PQ) = \frac{\mu}{A\varepsilon}\int_0^t Y_n'dt;$$

поэтому, обозначая указателями (1) и (2) принадлежность количества *первой* или *второй* средѣ получимъ:

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}P_1\cos(P_1P) = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}P_2\cos(P_2P),$$
$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}P_1\cos(P_1Q) = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}P_2\cos(P_2Q),$$

если $\mu$ отъ времени не зависитъ. Подставляя въ первыя уравненія (D), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\eta'\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\eta'\right]_2 \\ \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\xi'\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu}\xi'\right]_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (F)$$

Третье уравненіе въ системѣ (D) по равенству ($\varkappa$) есть тождество.

Условія (B bis), обработанныя такимъ же образомъ, дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} \beta' + \mu X'_n &= 0 \\ \alpha' - \mu Y'_n &= 0 \\ H - Z'_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(G)}$$

Отсюда найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\alpha'}{\mu}\right]_1 &= \left[\frac{\alpha'}{\mu}\right]_2 \\ \left[\frac{\beta'}{\mu}\right]_1 &= \left[\frac{\beta'}{\mu}\right]_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

Имѣя условія относительно $\xi'$ и $\eta'$, или для $\alpha'$ и $\beta'$, безъ труда составимъ условія для $u'$, $v'$ и $w'$.

Именно при помощи уравненій (H) и (n) или уравненій (F) и (t) получаемъ равенства:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\right]_1 &= \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\right]_2 \\ \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\right]_1 &= \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'}\right)\right]_2 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \text{(K)}$$

гдѣ $u'$, $v'$, $w'$ суть проекціи $u$, $v$, $w$ на прямыя $MP$, $MQ$ и $MN$, а $x'$, $y'$, $z'$ координаты точки поверхности по отношенію тѣхъ же осей: $MP$, $MQ$, $MN$.

Такимъ образомъ теорія Больтцмана, надлежащимъ образомъ разработанная, приводитъ къ условіямъ на границахъ въ видѣ системы условій Фрэнэля, т. е. или (F) или (H) и ихъ слѣдствій. Что касается третьихъ уравненій въ системахъ (D) и (G), то они опредѣляютъ измѣняемость функцій $H$ или $H_1$ на поверхности двухъ срединъ въ видѣ условій

$$\left.\begin{aligned} [H]_1 &= [H]_2 \\ \left[\frac{\varepsilon}{\mu} H_1\right]_1 &= \left[\frac{\varepsilon}{\mu} H_1\right]_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Эти условія необходимы для полнаго опредѣленія функцій $H$ и $H_1$.

Всѣ эти условія суть слѣдствія положеній (E); если же мы не примемъ этихъ положеній, то и условія на границахъ будутъ иными.

23 Сентября 1894 г.

# Нахожденіе алгебраическихъ раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ алгебраическими раціональными коэффиціентами.

П. А. Некрасова *).

Труды академика *В. Г. Имшенецкаго* и вызванный ими оживленный обмѣнъ мыслей между многими русскими математиками привели къ тому, что указанная въ заглавіи задача получила полное и всестороннее разъясненіе въ нашей литературѣ **). Въ настоящее время задача на столько исчерпана, что дѣло можетъ касаться улучшенія развѣ лишь изложенія теоріи.

*) Статья эта была предметомъ сообщенія автора Московскому Математическому Обществу въ засѣданіи 20 сентября 1894 г. и затѣмъ въ извлеченіи доложена Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 4 ноября 1894 г.

**) Привожу здѣсь эту литературу въ слѣдующемъ спискѣ:

*В. Г. Имшенецкій.* 1. Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. (Записки Имп. Академіи Наукъ, т. LV, прилож. № 9. 1887).

2. Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. (Записки Имп. Академіи Наукъ, т. LVIII. 1888).

3. Сообщеніе академика В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи Моск. Матем. Общества 19 мая 1892 года. (Матем. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 391—398. 1893).

*К. А. Поссе.* Извлеченіе изъ письма проф. К. А. Поссе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобылева). (Математич. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 386—391. 1893).

*П. А. Некрасовъ.* Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія. (Матем. Сб., т. XVII, вып. 2, стр. 341—382. 1893).

*К. А. Андреевъ.* О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя. (Сообщенія Харьк. Матем. Общества, т. IV. 1894).

*Н. Гюнтеръ.* О нахожденіи дробныхъ раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. (Матем. Сб., т. XVII, в. 4, 1894). Статья Н. Гюнтера рекомендована академикомъ А. А. Марковымъ.

Въ предлагаемой статьѣ я намѣренъ представить новое изложеніе, не смотря на существованіе нѣсколькихъ изложеній.

Имѣя дѣло въ настоящемъ изложеніи съ уравненіемъ:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_ny=V, \quad \ldots\ldots (1)$$

гдѣ $P_0$, $P_1$, $\ldots$, $P_n$ и $V$ суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя, я не буду прибѣгать здѣсь къ посредствующей формѣ:

$$\frac{d^n(Q_0y)}{dx^n}+\frac{d^{n-1}(Q_1y)}{dx^{n-1}}+\ldots+Q_ny=V, \quad \ldots\ldots (A)$$

которую избралъ В. Г. Имшенецкій и съ которою мнѣ, какъ комментатору В. Г. Имшенецкаго, пришлось имѣть дѣло въ статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ *).

Далѣе въ настоящемъ изложеніи я не намѣренъ слѣдовать безусловно одному какому-либо направленію, а напротивъ буду относиться свободно ко всѣмъ направленіямъ, отовсюду извлекая то, что мнѣ представляется заслуживающимъ вниманія, и приводя это въ такія сочетанія, какія мнѣ кажутся болѣе удобными.

Въ §§ 2, 3 и 4 изложены основанія теоріи безъ посредства интегрирующаго множителя. Въ это изложеніе я по возможности переношу всѣ тѣ усовершенствованія, которыя были достигнуты при другомъ изложеніи теоріи, основанномъ на употребленіи интегрирующаго множителя В. Г. Имшенецкаго **). Такимъ образомъ я широко пользуюсь здѣсь свойствами полиномовъ $\zeta_n$, на которые распадается полиномъ $\sigma_n$ В. Г. Имшенецкаго ***) и которые теперь я обозначаю короче чрезъ $\zeta$. Эти полиномы могли бы быть взяты прямо изъ моей статьи: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ при $m=n+\alpha-\beta-1$; но здѣсь я получаю ихъ независимо, основываясь непосредственно на формѣ (1) дифференціальнаго уравненія и придавая имъ соотвѣтствующій этой формѣ видъ ****). Вмѣстѣ съ тѣмъ я разсматриваю здѣсь полиномъ $\sigma$, который по своему

*) Пріемы вычисленія, изложенные въ этой моей статьѣ, удобнѣе всего примѣняются тогда, когда дифференціальное уравненіе дано непосредственно въ формѣ (A). Но если дифференціальное уравненіе дано въ общеупотребительной формѣ (1), то, какъ видно изъ статьи проф. К. А. Андреева, предварительное приведеніе уравненія (1) къ формѣ (A) является безполезнымъ и ненужнымъ осложненіемъ въ способѣ В. Г. Имшенецкаго.

**) Отчасти это перенесеніе уже осуществлено въ статьѣ Н. Гюнтера, рекомендованной академикомъ А. А. Марковымъ.

***) См. Матем. Сборн., т. XVII, вып. 2, стр. 355, 366, 376 и 382. Собственно говоря, В. Г. Имшенецкій употребляетъ въ своемъ мемуарѣ полиномъ $S_n$, а не $\sigma_n$; но полиномъ $\sigma_n$ отличается отъ $S_n$ лишь множителемъ, не играющимъ существенной роли въ нашемъ изложеніи.

****) Полиномы $\zeta_n$, какъ въ теоріи сравненій, могутъ являться въ различныхъ видахъ, сравнимыхъ другъ съ другомъ по извѣстному модулю. Это замѣчаніе надлежитъ имѣть въ виду при сопоставленіи полиномовъ $\zeta_n$ съ приводимыми здѣсь полиномами $\zeta$.

значенію соотвѣтствуетъ полиному $\sigma_n$, а по составу болѣе соотвѣтствуетъ формѣ (1).

Полиномы $\zeta$ суть только различныя видоизмѣненія полинома $\sigma$, соотвѣтствующія различнымъ обстоятельствамъ.

Содержаніе §§ 2, 3 и 4 предлагаемой статьи, кажется, достаточно убѣждаетъ, что какимъ бы порядкомъ ни рѣшалась задача о нахожденіи раціональныхъ интеграловъ уравненія (1), полиномъ $\sigma$ В. Г. Имшенецкаго и его видоизмѣненіе $\zeta$ всегда вносятъ въ теорію такую стройность, какой не было въ изложеніи Ліувилля *).

Въ § 5 предлагаемой статьи показано, что способъ, основанный на употребленіи интегрирующаго множителя, имѣетъ особое преимущество. Способъ этотъ даетъ возможность при изысканіи числителя дробнаго рѣшенія уничтожать въ дифференціальномъ уравненіи дроби подъ знакомъ дифференцированія. Интегрирующій множитель этого рода составляется порядкомъ, указаннымъ въ статьѣ проф. К. А. Андреева.

Укажу еще на слѣдующую особенность настоящей статьи.

Въ предлагаемой статьѣ, какъ и въ статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“, я, по примѣру Ліувилля, внимательно отношусь не только къ составу знаменателя дробнаго рѣшенія, но и къ составу числителя, выдѣляя въ немъ, по возможности, множители вида $(x+a)^m$, гдѣ $x+a$ есть линейный дѣлитель полинома $P_0$. Это выдѣленіе облегчаетъ послѣдующее вычисленіе числителя дробнаго рѣшенія, нисколько не осложняя труда въ остальныхъ отношеніяхъ, такъ какъ всѣ данныя для этого облегченія, когда оно возможно, являются сами собою въ процессѣ изысканія состава знаменателя. Въ связи съ этимъ облегченіемъ необходимо слѣдить за низшими предѣлами $\alpha'$ показателей $\alpha$.

## § 1. Обозначенія; цѣлые частные интегралы.

Пусть данное линейное дифференціальное уравненіе будетъ:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_ny=V, \quad \ldots\ldots (1)$$

гдѣ $P_0$, $P_1$, $\ldots$, $P_n$ и $V$ суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя.

---

*) Не слѣдуетъ думать, что сущность изслѣдованій В. Г. Имшенецкаго сводится только къ пріему, состоящему въ употребленіи интегрирующаго множителя. Кромѣ этого примѣчательнаго *средства* рѣшеніе задачи В. Г. Имшенецкій подмѣтилъ *правило*, данное на страницѣ 28 перваго мемуара его и точнѣе выраженное по указаніямъ его сообщенія въ § 2 моей статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“. Правило это примѣчательно по чрезвычайной простотѣ его выраженія и лишь даетъ знаменатель въ формѣ недостаточно простой; но и этотъ недочетъ правила В. Г. Имшенецкаго легко пополненъ естественнымъ его продолженіемъ, указаннымъ въ § 3 статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“. Такимъ образомъ съ именемъ В. Г. Имшенецкаго связаны въ отношеніи рѣшенія данной задачи не только извѣстнаго рода средства, но и правила, неизмѣнно сохраняющіяся при любыхъ средствахъ ихъ полученія.

Пусть $\Delta$ есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $P_0$ и $\frac{dP_0}{dx}$. Буквой $p$ будемъ обозначать полиномъ, опредѣляемый равенствомъ:

$$p = \frac{P_0}{\Delta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Всевозможные различные линейные дѣлители (т. е. дѣлители $x+a$) полинома $P_0$ будемъ обозначать такъ:

$$x+a_1,\ x+a_2, \ldots,\ x+a_\nu. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Очевидно, будемъ имѣть:

$$p = (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_\nu). \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Буквой $D$ будемъ обозначать общій наибольшій дѣлитель полиномовъ:

$$P_0 p^{-1},\ P_1,\ P_2 p, \ldots, P_n p^{n-1}. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Разлагая $D$ на линейные множители, будемъ это разложеніе обозначать такъ:

$$D = (x+a_1)^{\beta_1}(x+x_2)^{\beta_2}\ldots(x+a_\nu)^{\beta_\nu}, \quad \ldots\ldots (6)$$

гдѣ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ суть цѣлыя положительныя числа.

Буквой $\sigma$ обозначается полиномъ

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)\frac{P_i p^{i-1}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^{n-i} =$$

$$= (-1)^n\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\frac{P_0 p^{-1}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^n + \ldots + \alpha(\alpha+1)\frac{P_{n-2}p^{n-3}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$$

$$- \alpha\frac{P_{n-1}p^{n-2}}{D}\frac{dp}{dx} + \frac{P_n p^{n-1}}{D}. \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Этотъ полиномъ по значенію своему вполнѣ аналогиченъ полиному $\sigma_n$ В. Г. Имшенецкаго.

Полиномъ $\sigma$ при произвольномъ $\alpha$, очевидно, не имѣетъ общихъ дѣлителей съ полиномомъ $p$ или $P_0$.

Полиномъ $V$ представимъ подъ формой:

$$V = (x+a_1)^{\varepsilon_1}(x+a_2)^{\varepsilon_2}\ldots(x+a_\nu)^{\varepsilon_\nu}.U, \quad \ldots\ldots (8)$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ суть цѣлыя числа и $U$ есть цѣлый полиномъ, не имѣющій съ $p$ общихъ дѣлителей.

Другія обозначенія выяснятся впослѣдствіи.

Изъ раціональныхъ интеграловъ уравненія (1) съ наибольшею простотою находятся цѣлые, если таковые существуютъ. Въ самомъ дѣлѣ, представивъ цѣлое рѣшеніе подъ формой:

$$y = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m,$$

мы можемъ внести это выраженіе $y$ въ уравненіе (1) и опредѣлить показатель $m$ по извѣстному правилу, которое Н. В. Бугаевъ называетъ началомъ наибольшихъ показателей и которое состоитъ въ сопоставленіи членовъ высшихъ степеней. Послѣ опредѣленія $m$ находятся коэффиціенты $B_0$, $B_1, \ldots, B_m$ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Указанными ниже пріемами сама общая задача о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) приводится къ нахожденію цѣлыхъ рѣшеній преобразованнаго уравненія.

§ 2. Теорема Ліувилля; форма, подъ которою изыскиваются всѣ раціональныя рѣшенія.

Алгебраическое раціональное рѣшеніе уравненія (1), если таковое существуетъ, обозначимъ такъ:

$$y = \frac{X}{Y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

разумѣя подъ $X$ и $Y$ цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей.

Представимъ то же самое раціональное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{K}{(x+a)^{\alpha} L}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ $\alpha$—цѣлое число, $K$ и $L$—цѣлые полиномы, не дѣлящіеся на $x+a$. Замѣтимъ притомъ, что при $\alpha > 0$ сумма $x+a$ есть дѣлитель знаменателя $Y$ раціональнаго рѣшенія (8'), а при $\alpha < 0$ сумма $x+a$ есть дѣлитель числителя $X$ того же рѣшенія.

Дифференцируя равенство (9) послѣдовательно $n$ разъ, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\alpha K}{L(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{K_2}{L^2(x+a)^{\alpha}}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\alpha(\alpha+1)K}{L(x+a)^{\alpha+2}} + \frac{K_2}{L^3(x+a)^{\alpha+1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)K}{(-1)^n L(x+a)^{\alpha+n}} + \frac{K_n}{L^{n+1}(x+a)^{\alpha+n-1}}, \end{aligned}\right\} \ldots (9')$$

гдѣ $K_1$, $K_2, \ldots, K_n$ означаютъ цѣлыя функціи.

Подставивъ найденныя выраженія $y$, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ въ уравненіе (1) и умноживъ обѣ части полученнаго равенства на

$$L^{n+1}(x+a)^{\alpha+n-1},$$

мы получимъ

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)P_0L^nK}{(x+a)} + H = L^{n+1}V(x+a)^{\alpha+n-1}, \quad (9'')$$

гдѣ $H$ есть цѣлая функція.

Отсюда видно, что сумма $(x+a)$ должна быть дѣлителемъ полинома $P_0$ въ двухъ случаяхъ: 1) когда $\alpha > 0$ и 2) когда $-(\varepsilon+n-1) \leqq \alpha < -(n-1)$, гдѣ $\varepsilon$ опредѣляется при помощи равенства

$$V = v(x+a)^{\varepsilon},$$

въ которомъ $v$ есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $(x+a)$.

Первый изъ этихъ случаевъ представляетъ теорему Ліувилля, утверждающую, что каждый линейный дѣлитель (т. е. дѣлитель вида $x+a$) знаменателя $Y$ раціональнаго рѣшенія есть въ то же время дѣлитель полинома $P_0$.

Второй случай распространяетъ теорему Ліувилля, показывая, что линейный дѣлитель $(x+a)$ числителя $X$, дѣлящій его не менѣе $n$ разъ и не болѣе $(\varepsilon+n-1)$ разъ, также долженъ быть дѣлителемъ полинома $P_0$. Это обстоятельство даетъ достаточныя основанія обращать вниманіе на связь линейныхъ дѣлителей полинома $P_0$ не только съ знаменателемъ $Y$, но и съ числителемъ $X$. Выдѣленіе въ числителѣ указанныхъ дѣлителей, когда къ тому представляется какая-либо возможность, полезно потому, что оно, какъ ниже увидимъ, облегчаетъ вычисленіе числителя по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и въ тоже время не осложняетъ остальныхъ вычисленій. Такое упрощеніе, если оно окажется возможнымъ, полезно даже тогда, когда искомое раціональное рѣшеніе оказывается цѣлымъ.

Въ томъ случаѣ, когда $P_0$ есть количество постоянное, уравненіе (1) не можетъ имѣть иныхъ раціональныхъ рѣшеній, кромѣ цѣлыхъ. Замѣтивъ это, мы въ дальнѣйшемъ изложеніи устранимъ изъ разсмотрѣнія случай, когда $P_0$ есть постоянное.

Легко видѣть, что разлагая на множители знаменатель $Y$ раціональнаго рѣшенія, а также выдѣляя въ числителѣ всѣ его множители, общіе съ дѣлителями полинома $P_0$ (или $p$), и перенося эти множители въ знаменатель съ отрицательными показателями, мы можемъ представить раціональное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{Z}{(x+a_1)^{\alpha_1}(x+a_2)^{\alpha_2}\ldots(x+a_\nu)^{\alpha_\nu}}, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

гдѣ $Z$ есть цѣлый полиномъ, не имѣющій общихъ дѣлителей съ полиномомъ $p$. Задача о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній линейнаго уравненія сводится затѣмъ къ нахожденію показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, которые должны быть числами цѣлыми.

Какъ увидимъ ниже, при изысканіи показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ обнаруживается, что каждый изъ нихъ можетъ имѣть по одному, а иногда по нѣсколько значеній, и если $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ представляютъ соот-

вѣтственно высшіе предѣлы этихъ значеній (т. е. $\alpha_i \leqq A_i$, гдѣ $i = 1, 2, \ldots, \nu$), то очевидно, всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) могутъ быть изыскиваемы подъ общей формой:

$$y = \frac{\xi}{(x+a_1)^{A_1}(x+a_2)^{A_2}\ldots(x+a_\nu)^{A_\nu}}, \quad \ldots\ldots (11)$$

гдѣ $\xi$ есть цѣлый полиномъ.

Изыскивая ниже всевозможныя значенія показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ и затѣмъ опредѣляя ихъ высшіе предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ мы будемъ по возможности избѣгать излишнихъ повышеній этихъ предѣловъ, напримѣръ, не будемъ замѣнять нулями тѣ изъ нихъ, которые окажутся отрицательными (такъ какъ всякое повышеніе этихъ предѣловъ ведетъ къ повышенію степени полинома $\xi$ и осложняетъ его вычисленіе). Если предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ выбраны съ указанными предосторожностями, то форму (11), подъ которой изыскиваются всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1), будемъ называть *наипростѣйшею* общею формою раціональныхъ рѣшеній.

Можно спросить между прочимъ, не представляется-ли выгоднымъ, для упрощенія вычисленія числителя раціональнаго рѣшенія уравненія (1), вводить въ знаменатель формы (11) факторы вида $(x+a)^A$, когда $(x+a)$ не есть дѣлитель полинома $P_0$. На этотъ вопросъ приходится отвѣтить отрицательно. Въ самомъ дѣлѣ, если $P_0$ не дѣлится на $(x+a)$, то равенство (9″), не представляетъ противорѣчія лишь въ томъ случаѣ, когда $\alpha$ имѣетъ одно изъ значеній:

$$-(n+\varepsilon), \quad -(n-1), \quad -(n-2), \ldots \quad -2, \quad -1, \quad 0.$$

Притомъ $\alpha$ можетъ совпадать съ каждымъ изъ этихъ чиселъ. Поэтому высшій предѣлъ $A$ возможныхъ значеній $\alpha$ есть $A = 0$ и слѣдовательно знаменатель формы (11) не требуетъ включенія факторовъ вида $(x+a)^A$ при $(x+a)$ не дѣлящемъ полинома $P_0$.

§ 3. Нахожденіе всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) въ томъ случаѣ, когда дано полное разложеніе полинома $p$ на линейные множители. Примѣры.

Будемъ ниже разумѣть подъ $x+a$ одинъ изъ линейныхъ дѣлителей полинома $p$, подъ $\alpha$ соотвѣтственный изъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, входящихъ въ знаменатель второй части равенства (10), подъ $\beta$ соотвѣтственный изъ показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$, входящихъ во вторую часть равенства (6), и подъ $\varepsilon$ соотвѣтственный изъ показателей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$, входящихъ во вторую часть равенства (8). Изъ опредѣленія числа $\beta$ слѣдуетъ, что функціи

$$P_0(x+a)^{-1-\beta}, \; P_1(x+a)^{-\beta}, \; P_2(x+a)^{1-\beta}, \ldots, \; P_n(x+a)^{n-1-\beta} \quad (12)$$

суть цѣлыя и не имѣютъ общаго дѣлителя $(x+a)$.

Представивъ искомое дробное рѣшеніе $y$ и его производныя подъ формами (9) и (9′) и внеся эти ихъ выраженія въ уравненіе (1), мы получимъ:

$$\frac{K\zeta}{(x+a)^{\alpha+n-\beta-1}L}+\frac{H}{(x+a)^{\alpha+n-\beta-2}L^{n+1}}=V, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

гдѣ $\zeta$ и $H$ суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый представляется такъ:

$$\zeta=(-1)^n\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)P_0(x+a)^{-1-\beta}+\ldots$$

$$\ldots+\alpha(\alpha+1)P_{n-2}(x+a)^{n-3-\beta}-\alpha P_{n-1}(x+a)^{n-2-\beta}+P_n(x+a)^{n-1-\beta}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)P_i(x+a)^{i-1-\beta}. \quad . \quad (14)$$

Представивъ полиномъ $V$ подъ формой

$$V=v.(x+a)^{\varepsilon}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ $v$ есть цѣлая функція, не дѣлящаяся не $(x+a)$, и умноживъ обѣ части равенства (13) на

$$(x+a)^{\alpha+n-\beta-1}L^{n+1},$$

будемъ имѣть:

$$KL^n\zeta+r(x+a)=L^{n+1}v(x+a)^{\alpha+n-\beta-1+\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

гдѣ $r$ есть цѣлый полиномъ.

Разсмотримъ, во первыхъ, тотъ случай, когда показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) *положительный*, т. е. когда

$$\alpha>\alpha', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

гдѣ

$$\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Въ этомъ случаѣ равенство (16) получаетъ видъ:

$$KL^n\zeta=R(x+a), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

гдѣ $R$ есть цѣлый полиномъ. Такъ какъ $K$ и $L$, по условію, не дѣлятся на $x+a$, то, какъ показываетъ равенство (19), полиномъ $\zeta$ долженъ дѣлиться на $x+a$. Этимъ необходимымъ признакомъ въ достаточной мѣрѣ характеризуются значенія $\alpha$, удовлетворяющія условію (17). Въ самомъ дѣлѣ, по свойству полиномовъ (12) функція $\zeta$ при произ-

вольномъ значеніи $\alpha$ не можетъ дѣлиться на $x+a$. Чтобы $\zeta$ дѣлилось на $x+a$, количество $\alpha$ должно удовлетворять условію:

$$\Phi(\alpha)=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

гдѣ $\Phi(\alpha)$ есть значеніе $\zeta$ при $x=-a$ или, иначе, первый членъ въ разложеніи $\zeta$ по восходящимъ степенямъ $x+a$.

Цѣлыя значенія $\alpha$, удовлетворяющія условіямъ (17) и (20), будемъ ниже обозначать чрезъ $\alpha''$, $\alpha'''$,....

Разсмотримъ, во вторыхъ, тотъ случай, когда показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) равенъ *нулю*, т. е. когда

$$\alpha=\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

Въ этомъ случаѣ равенство (16) приводится къ виду:

$$L^n[Lv-K\zeta]=r(x+a)$$

и показываетъ, что полиномъ

$$Lv-K\zeta$$

дѣлится на $x+a$, т. е. имѣетъ мѣсто условіе:

$$[Lv-K\zeta]_{x=-a}=0.$$

Условіе это можетъ быть удовлетворено на счетъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ числителя $Z$ во второй части равенства (10). Поэтому число $\alpha'$ нужно присоединить къ значеніямъ, которыя можетъ принимать показатель $\alpha$.

Легко наконецъ видѣть, что показатель $\alpha+n-\beta-1+\varepsilon$ при $(x+a)$ во второй части равенства (16) не можетъ быть отрицательнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ равенство (16) было бы противорѣчивымъ. Поэтому число $\alpha'$ есть *низшій* предѣлъ показателя $\alpha$.

Итакъ, вышеуказанными числами $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$,... исчерпываются всѣ возможныя значенія показателя $\alpha$ въ раціональномъ рѣшеніи (9). Наибольшее изъ чиселъ $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$,... опредѣлитъ *высшій* предѣлъ значеній $\alpha$. Этотъ предѣлъ обозначимъ буквой $A$.

Можетъ иногда случиться, что не существуетъ цѣлыхъ значеній $\alpha$, удовлетворяющихъ условіямъ (17) и (20). Въ этомъ случаѣ высшій предѣлъ $A$ показателя $\alpha$ и его низшій предѣлъ $\alpha'$, очевидно, должны совпадать. Такимъ образомъ, даже при отсутствіи цѣлыхъ значеній $\alpha$, удовлетворяющихъ вышеуказаннымъ условіямъ, раціональное рѣшеніе уравненія (1) можетъ существовать; лишь для уравненія безъ второй части при этихъ обстоятельствахъ представляется особенность, разъясненная ниже.

Примѣняя указанный порядокъ вычисленія къ каждому изъ линейныхъ дѣлителей

$$x+a_1,\ x+a_2,\ \ldots,\ x+a_\nu$$

полинома $p$, получимъ всѣ соотвѣтственные высшіе предѣлы $A_1$, $A_2, \ldots, A_\nu$ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Зная эти предѣлы, мы можемъ отыскать наконецъ всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) при посредствѣ равенства (11), въ которомъ числитель $\xi$ при существованіи раціональныхъ рѣшеній долженъ быть цѣлымъ полиномомъ, опредѣляемымъ какъ цѣлое рѣшеніе преобразованнаго при посредствѣ равенства (11) дифференціальнаго уравненія.

Такимъ образомъ, при разсматриваемыхъ данныхъ задачу о нахожденіи раціональныхъ интеграловъ уравненія (1) можно считать разрѣшенною.

Теперь остановимся на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ заслуживающихъ особаго вниманія свойствахъ полиномовъ $\zeta$. Начнемъ съ указанія связи этихъ полиномовъ съ полиномомъ $\sigma$.

Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x+a}+\varrho(x+a),$$

гдѣ $\varrho$ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенства (7) и принявъ во вниманіе равенство (14), находимъ:

$$G\sigma=H\zeta+U(x+a), \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ $G$, $H$ и $U$ суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$G=\frac{D}{(x+a)^\beta} \quad \text{и} \quad H=\left(\frac{p}{x+a}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы $G$ и $H$ не могутъ дѣлиться на $x+a$, то связь между полиномами $\sigma$ и $\zeta$, выражаемая равенствомъ (22), показываетъ, что *значенія* $\alpha$, *при которыхъ полиномъ* $\zeta$ *дѣлится на* $(x+a)$, *вполнѣ совпадаютъ съ значеніями* $\alpha$, *при которыхъ полиномъ* $\sigma$ *дѣлится на тотъ же дѣлитель* $(x+a)$ *полинома* $p$. Такимъ образомъ разсмотрѣніе всѣхъ полиномовъ $\zeta$, опредѣляемыхъ при помощи равенства (14), сводится къ разсмотрѣнію одного только полинома $\sigma$.

Этому свойству полинома $\sigma$, вполнѣ аналогичному со свойствомъ полинома $\sigma_n$ В. Г. Имшенецкаго, мы дадимъ примѣненіе въ теоріи, которая изложена въ § 4.

Далѣе перейдемъ къ другимъ свойствамъ полиномовъ $\zeta$.

Изыскивая условіе (20), при выполненіи котораго $\zeta$ дѣлится на $x+a$, можно полиномъ $\zeta$ упрощать, отбрасывая или прибавляя въ немъ члены, кратные $x+a$, и множители, которые ни при какомъ значеніи $\alpha$ не дѣлятся на $x+a$.

Эти отбрасыванія и прибавленія членовъ и множителей ведутъ къ многочисленнымъ видоизмѣненіямъ формы полинома $\zeta$. Разсмотримъ важнѣйшія изъ этихъ видоизмѣненій.

Если эти видоизмѣненія привели отъ полинома $\zeta$ къ полиному $\varsigma$, то эту связь между полиномами $\zeta$ и $\varsigma$ будемъ обозначать такъ:

$$\zeta \equiv \varsigma .$$

Между прочимъ при $\beta = 0$ будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)[(\alpha+n-1)P_0(x+a)^{-1} - P_1];$$

при $\beta = 1$ будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-3)[(\alpha+n-2)(\alpha+n-1)P_0(x+a)^{-2} - (\alpha+n-2)P_1(x+a)^{-1} + P_2];$$

и т. д. Если условимся полагать: $k = \beta+1$ при $\beta < n-1$ и $k = n$ при $\beta \geqq n-1$, то будемъ имѣть вообще:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)P_i(x+a)^{i-1-\beta}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующая форма полинома $\zeta$, данная при другихъ обозначеніяхъ проф. К. А. Андреевымъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^{n-i} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)}{(1+\beta-i)!} \frac{d^{1+\beta-i}P_i}{dx^{1+\beta-i}} \quad . \quad (22')$$

Послѣ всевозможныхъ отбрасываній въ полиномѣ $\zeta$ членовъ, кратныхъ $x+a$, и множителей, не дѣлящихся на $x+a$ ни при какомъ значеніи $\alpha$, въ концѣ концовъ получимъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \Phi(\alpha),$$

гдѣ $\Phi(\alpha)$ лишь постояннымъ множителемъ можетъ отличаться отъ первой части равенства (20).

Остановимъ вниманіе на случаѣ, когда уравненіе (1) не имѣетъ второй части, т. е. имѣетъ видъ:

$$P_0\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Въ этомъ случаѣ цѣлое положительное число $\varepsilon$, которое для уравненія (1) опредѣлялось равенствомъ (15), нужно считать равнымъ $+\infty$. Слѣдовательно, $\alpha' = -\infty$ и низшій предѣлъ $\alpha'$ самъ собою отпадаетъ. Такимъ образомъ, въ случаѣ уравненія (23) условіе (17) для всякаго конечнаго $\alpha$ само собою выполняется, значеніе $\alpha$, опредѣляемое равенствомъ (21), отпадаетъ и всѣ значенія показателя $\alpha$ опредѣляются всевозможными цѣлыми числами, удовлетворяющими только уравненію (20). Отсутствіе таковыхъ цѣлыхъ чиселъ есть рѣшительный признакъ того, что уравненіе (23) не имѣетъ раціональныхъ рѣшеній.

Приведемъ для поясненія теоріи три примѣра.

*Примѣръ 1.* Данное уравненіе пусть будетъ:

$$x^7 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x^4 \frac{dy}{dx} + 2(2 - 3x^2)xy = 2(2 - 5x^2 + x^4).$$

Въ этомъ случаѣ $p = x$, $D = x^2$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 0$, $\alpha' = 1$,

$$\zeta = \alpha(\alpha + 1)x^4 - 4\alpha x^2 + 2(2 - 3x^2) \equiv 4.$$

Очевидно, не существуетъ значеній $\alpha$, при которыхъ полиномъ $\zeta$ дѣлится на $x$. Поэтому $A = \alpha' = 1$ и раціональное рѣшеніе изыскивается подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{x^A} = \frac{\xi}{x},$$

гдѣ $\xi$ есть цѣлый полиномъ. Отыскивая этотъ полиномъ, получимъ: $\xi = 1$, т. е. данное уравненіе допускаетъ раціональное рѣшеніе

$$y = \frac{1}{x}.$$

*Примѣръ 2.* Данное уравненіе пусть будетъ:

$$(1 + x)^3 [x^6 \frac{d^2y}{dx^2} + 2(45 - 80x + 36x^2)y] =$$
$$= 2x^{10}(45 - 80x + 36x^2)[(1 + x)^2 + x^4].$$

Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$P_0 = x^6(1 + x)^3, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 2(1 + x)^3(45 - 80x + 36x^2);$$
$$p = x(1 + x), \quad D = x(1 + x)^2.$$

Для дѣлителя $x + a_1 = x$ полинома $p$ имѣемъ:

$$\beta_1 = 1, \quad \varepsilon_1 = 10, \quad \alpha_1' = -10,$$
$$\zeta = [\alpha(\alpha + 1)x^4 + 2(45 - 80x + 36x^2)](1 + x)^3 \equiv 90.$$

Очевидно, не существуетъ значеній $\alpha$, при которыхъ этотъ полиномъ $\zeta$ дѣлится на $x+a_1$. Слѣдовательно, $A_1=\alpha'_1=-10$.

Далѣе, для дѣлителя $x+a_2=1+x$ полинома $p$ имѣемъ:

$$\beta_2=2,\ \varepsilon_2=0,\ \alpha'_2=1,$$

$$\zeta=\alpha(\alpha+1)x^6+2(1+x)^2(45-80x+36x^2)\equiv\alpha(\alpha+1).$$

Этотъ полиномъ дѣлится на $x+a_2=1+x$ при $\alpha=0$ и при $\alpha=-1$; но эти значенія не годятся, такъ какъ они ниже низшаго предѣла $\alpha'_2$. Выше же этого предѣла не существуетъ цѣлыхъ значеній $\alpha$, при которыхъ $\zeta$ дѣлится на $x+a_2$. Поэтому $A_2=\alpha'_2=1$.

Итакъ, раціональное рѣшеніе изыскивается подъ формой:

$$y=\frac{\xi}{x^{A_1}(1+x)^{A_2}}=\frac{x^{10}\cdot\xi}{1+x},$$

гдѣ $\xi$ есть полиномъ. Отыскивая этотъ полиномъ, получаемъ: $\xi=1$, т. е. данное уравненіе допускаетъ раціональное рѣшеніе:

$$y=\frac{x^{10}}{1+x}.$$

*Примѣръ 3.* Дано дифференціальное уравненіе:

$$(x-1)^2\frac{d^3y}{dx^3}+10(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(x^2-2x-19)\frac{dy}{dx}$$
$$-2(x-1)y=0.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$p=x-1,\ D=x-1,\ \beta=1,\ \varepsilon=+\infty,\ \alpha'=-\infty,$$
$$\zeta=-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)+10\alpha(\alpha+1)+\alpha(x^2-2x-19)-2(x-1)^2\equiv$$
$$\equiv-\alpha(\alpha-3)(\alpha-4).$$

Этотъ полиномъ $\zeta$ дѣлится на $x-1$ при слѣдующихъ значеніяхъ $\alpha$:

$$\alpha''=0,\ \alpha'''=3,\ \alpha''''=4.$$

Поэтому $A=4$ и раціональное рѣшеніе даннаго уравненія изыскивается подъ формой:

$$y=\frac{\xi}{(x-1)^4},$$

гдѣ $\xi$ есть цѣлый полиномъ. Опредѣляя $\xi$, находимъ: $\xi = x^2 - 2x + 3$, т. е. данное уравненіе имѣетъ раціональное рѣшеніе

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^4}.$$

Примѣръ этотъ заимствованъ изъ перваго мемуара В. Г. Имшенецкаго.

§ 4. Нахожденіе раціональныхъ рѣшеній въ томъ случаѣ, когда не дано полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$. Примѣры.

Въ этомъ случаѣ полиномъ $p$ находится при помощи формулы (2), представленіе же его подъ формой (4) не считается даннымъ.

Будемъ предполагать, что требуется не только избѣгнуть полнаго рѣшенія уравненія $p = 0$, но также требуется: 1) избѣгнуть обязательности имѣть напередъ заданное полное разложеніе полинома $p$ на неприводимые множители, такъ какъ это дѣйствіе иногда сопряжено съ затрудненіями *) и 2) при этихъ обстоятельствахъ составить *наипростѣйшую* форму, при помощи которой изыскиваютъ всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) **), т. е. форму, совпадающую въ сущности съ формой (11), найденной по указаннымъ въ § 3 правиламъ.

Предлагаемый процессъ вычисленія, основанный на разсмотрѣніи общихъ наибольшихъ дѣлителей различныхъ данныхъ полиномовъ, даже при полномъ незнаніи неприводимыхъ дѣлителей полинома $p$ самъ собою приводитъ къ разложенію полинома $p$ на такіе именно множители, какіе нужны при составленіи искомой наипростѣйшей общей формы всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1). Если же мы знаемъ напередъ нѣкоторые изъ неприводимыхъ дѣлителей полинома $p$, то при помощи ихъ предлагаемый процессъ еще болѣе облегчается (что и понятно въ виду связи этого процесса съ теоріей общихъ дѣлителей). Переходя къ изложенію этого процесса, условимся всякій полиномъ, не имѣющій кратныхъ корней, называть *первичнымъ* ***).

Прежде всего отыскиваемъ общій наибольшій дѣлитель $D$ полиномовъ (5). Затѣмъ извѣстнымъ способомъ, сводящимся въ сущности къ повторенію процесса нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя данной

---

*) Затрудненія эти нельзя считать маловажными, такъ какъ не существуетъ общей схемы вычисленій съ конечнымъ числомъ дѣйствій, которая всегда рѣшала бы вопросъ о разложеніи даннаго полинома на неприводимые множители.

**) Въ моей статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ указанъ способъ составленія этой формы въ предположеніи, что не дано полнаго рѣшенія уравненія $p = 0$, но дано разложеніе полинома $p$ на *неприводимые* дѣлители. Это ограниченіе теперь устраняется если разложеніе полинома $p$ на неприводимые множители по какой либо причинѣ затруднено.

***) Этотъ терминъ заимствую изъ теоріи чиселъ, именно изъ сочиненія Н. В. Бугаева: „Ученіе о числовыхъ производныхъ“.

цѣлой функціи и ея производной, достигаемъ представленія функціи $D$ подъ формой:

$$D = D_1^{d_1} D_2^{d_2} \dots D_{k-1}^{d_{k-1}},$$

гдѣ $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ суть различныя цѣлыя положительныя числа и $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$ суть цѣлые первичные полиномы, не имѣющіе попарно общихъ дѣлителей. Если къ этимъ полиномамъ присоединимъ цѣлый полиномъ:

$$D_k = \frac{p}{D_1 D_2 \dots D_{k-1}},$$

то будемъ имѣть:

$$D = D_1^{d_1} D_2^{d_2} \dots D_{k-1}^{d_{k-1}} D_k^{d_k}, \quad \dots\dots\dots (24)$$
$$d_k = 0, \quad D_1 D_2 \dots D_{k-1} D_k = p.$$

Далѣе и полиномъ $V$ можемъ представить такъ:

$$V = V_1^{b_1} V_2^{b_2} \dots V_{s-1}^{b_{s-1}},$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$ суть различныя цѣлыя положительныя числа и $V_1, V_2, \dots, V_{s-1}$ суть первичные полиномы, не имѣющіе попарно общихъ дѣлителей. Въ этихъ полиномахъ насъ должны интересовать особенно лишь общіе наибольшіе дѣлители каждаго изъ нихъ съ полиномомъ $p$, которые пусть соотвѣтственно будутъ:

$$W_1, W_2, \dots, W_{s-1}.$$

Къ этимъ полиномамъ присоединимъ еще полиномъ

$$W_s = \frac{p}{W_1 W_2 \dots W_{s-1}}.$$

Затѣмъ полиномъ $V$ представимъ такъ:

$$V = W_1^{b_1} W_2^{b_2} \dots W_{s-1}^{b_{s-1}} W_s^{b_s} \cdot U, \quad \dots\dots\dots (25)$$
$$b_s = 0, \quad W_1 W_2 \dots W_s = p,$$

при чемъ $U$ есть цѣлый полиномъ, не имѣющій общихъ дѣлителей съ полиномомъ $p$.

Равенства:

$$p = D_1 D_2 \dots D_k = W_1 W_2 \dots W_s$$

показываютъ, что каждый изъ полиномовъ $D_1, D_2, \dots, D_k$ долженъ имѣть общихъ наибольшихъ дѣлителей съ нѣкоторыми изъ полино-

мовъ $W_1$, $W_2, \ldots, W_s$ и наоборотъ. Разсмотрѣніе и выдѣленіе этихъ дѣлителей иногда ведетъ къ дальнѣйшему распаденію полиномовъ $D_1$, $D_2, \ldots, D_k$, а также полиномовъ $W_1$, $W_2, \ldots, W_s$ на множители представляемые полиномами низшихъ степеней. Выдѣленіе этихъ множителей необходимо для дальнѣйшаго.

Сверхъ того рекомендуется достигать всякими другими способами разложенія полиномовъ $D_1, \ldots, D_k$, $W_1, \ldots, W_s$ на приводимые и, еще лучше, неприводимые множители, но это добавочное разложеніе, весьма полезное для облегченія послѣдующихъ дѣйствій, теоретически вовсе не обязательно.

Изъ числа полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $D_1, \ldots, D_k$, $W_1, \ldots, W_s$ и ихъ найденныхъ дѣлителей надлежитъ выбрать полиномы $F_1, F_2, \ldots, F_t$, которые удовлетворяютъ условію

$$p = F_1 F_2 \ldots F_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

и чрезъ которые сверхъ того представляются въ видѣ произведеній каждый изъ полиномовъ $D_1, D_2, \ldots, D_k$, $W_1$, $W_2, \ldots, W_s$ и каждый изъ ихъ дѣлителей, на которые они распались.

Внеся выраженія полиномовъ $D_1, \ldots, D_k$, $W_1, \ldots, W_s$ чрезъ полиномы $F_1, F_2, \ldots, F_t$ въ равенства (24) и (25), получимъ:

$$D = F_1^{\beta_1} F_2^{\beta_2} \ldots F_t^{\beta t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$V = F_1^{\varepsilon_1} F_2^{\varepsilon_2} \ldots F_t^{\varepsilon t} . U. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Равенство (27) опредѣляетъ показатели $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$, котоорые при другомъ порядкѣ обозначеній входятъ, какъ показатели, во вторую часть равенства (6). Равенство (28) опредѣляетъ показатели $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$, которые при другомъ порядкѣ обозначеній опредѣлялись равенствомъ (8). Опредѣленіе показателей $\beta$ и $\varepsilon$ важно для полученія низшихъ предѣловъ $\alpha'$ значеній показателей $\alpha$, каковые предѣлы опредѣляются равенствомъ вида (18).

Пусть $F$ есть одинъ изъ полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$ и пусть $\beta$ и $\varepsilon$ будутъ показатели во вторыхъ частяхъ равенствъ (27) и (28), соотвѣтствующіе полиному $F$. Затѣмъ вообразимъ, что $x + a$ есть одинъ изъ линейныхъ дѣлителей полинома $F$. Мы можемъ не знать разложенія полинома $F$ на дѣлители этого рода, но мы беремъ дѣлитель $x + a$ лишь для теоретическихъ соображеній. Соотвѣтствующій дѣлителю $x + a$ показатель $\alpha$, входящій въ раціональное рѣшеніе, представленное подъ видомъ (9), какъ видно изъ предшествующаго §, либо опредѣляется равенствомъ:

$$\alpha = \alpha' = 1 + \beta - n - \varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

либо долженъ удовлетворять неравенству

$$\alpha > \alpha' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

и притомъ характеризуется тѣмъ свойствомъ, что полиномъ $\sigma$, опредѣляемый равенствомъ (7), долженъ дѣлиться на $x+\alpha$. Слѣдовательно, въ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто условіе (30), *полиномы* $\sigma$ и $F$ *должны имѣть общій дѣлитель.*

Этимъ признакомъ сразу охарактеризованы и удовлетворяющіе условію (30) показатели $\alpha$, соотвѣтствующіе дѣлителямъ полинома $F$, и самые эти дѣлители. Въ самомъ дѣлѣ, для существованія общихъ дѣлителей полиномовъ $\sigma$ и $F$ цѣлое число $\alpha$ должно удовлетворять уравненію:

$$\Theta(\alpha) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

гдѣ $\Theta(\alpha)$ представляетъ собою послѣдній остатокъ въ процессѣ послѣдовательнаго дѣленія полиномовъ $\sigma$ и $F$, посредствомъ котораго находится ихъ общій наибольшій дѣлитель *). Затѣмъ, при найденномъ изъ условій (30) и (31) цѣломъ значеніи $\alpha$, тотчасъ же опредѣляется и соотвѣтствующій общій наибольшій дѣлитель $\delta$ полиномовъ $\sigma$ и $F$. Притомъ въ силу равенства (22) найденный показатель $\alpha$ соотвѣтствуетъ *каждому* изъ линейныхъ дѣлителей полинома $\delta$ (этихъ линейныхъ дѣлителей мы можемъ даже и не имѣть въ явной формѣ). Слѣдовательно, среди раціональныхъ рѣшеній можетъ существовать такое, которое представляется подъ формой:

$$y = \frac{K}{\delta^{\alpha} L}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

гдѣ $K$ и $L$ суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей съ полиномомъ $\delta$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ будутъ *всѣ* цѣлыя значенія $\alpha$, удовлетворяющія условіямъ (30) и (31). Соотвѣтствующіе этимъ значеніямъ $\alpha$ общіе наибольшіе дѣлители полиномовъ $\sigma$ и $F$ пусть будутъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$

Полиномы $\delta_1, \delta_2, \ldots$ надлежитъ сопоставить попарно другъ съ другомъ, отыскивая у каждой пары, если окажется возможнымъ, общаго наибольшаго дѣлителя, каковые дѣлители поведутъ къ дальнѣйшему распаденію полиномовъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$ на множители пониженныхъ степеней. Затѣмъ изъ числа всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$ и множителей ихъ, на которые они распались, мы можемъ выдѣлить рядъ такихъ полиномовъ

$$X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

*) Условіе (31) иначе получается какъ результатъ исключенія $x$ изъ уравненій: $\sigma = 0$ и $F = 0$.

которые попарно не имѣютъ общихъ дѣлителей и чрезъ которые выражаются въ видѣ произведеній каждый изъ полиномовъ $\delta_1, \delta_2, \ldots$

Присоединимъ къ полиномамъ (33) еще полиномъ

$$X_m = \frac{F}{X_1 X_2 \ldots X_{m-1}}, \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

который не можетъ имѣть съ полиномами $\delta_1, \delta_2, \ldots$ общихъ дѣлителей. Полиномъ $X_m$ (если онъ не приводится къ виду: $X_m = 1$) примѣчателенъ въ томъ отношеніи, что для его дѣлителей не существуетъ соотвѣтствующихъ значеній $\alpha$, удовлетворяющихъ условіямъ (30) и (31). Слѣдовательно, дѣлители полинома $X_m$ должны входить въ раціональное рѣшеніе не иначе, какъ подъ формой, приводимой къ виду:

$$y = \frac{K}{X_m^{\alpha'} L}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

гдѣ $K$ и $L$ суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общихъ дѣлителей съ $X_m$. Если же уравненіе (1) не имѣетъ второй части, т. е. совпадаетъ съ уравненіемъ (26), то $\alpha' = -\infty$ и, если $X_m$ не приводится къ виду: $X_m = 1$, уравненіе (27) не допускаетъ никакихъ раціональныхъ рѣшеній.

Для дѣлителей полинома $X_m$ (если онъ не приводится къ виду: $X_m = 1$) высшій предѣлъ $A_m$ показателя $\alpha$ совпадаетъ съ низшимъ предѣломъ $\alpha'$, т. е.

$$A_m = \alpha'.$$

Высшіе предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ значеній показателя $\alpha$ для дѣлителей каждаго изъ полиномовъ (33) будутъ болѣе $\alpha'$ и могутъ быть получены изъ предшествующихъ вычисленій слѣдующимъ порядкомъ. Пусть $X$ есть одинъ изъ полиномовъ (33). Изъ числа полиномовъ

$$\delta_1, \delta_2, \ldots$$

отмѣтимъ всѣ тѣ, которые дѣлятся на $X$, и изъ вышеуказанныхъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ выберемъ тѣ, которые соотвѣтствуютъ отмѣченнымъ полиномамъ $\delta$. Пусть эти показатели будутъ: $\alpha'', \alpha''', \ldots$ Наибольшее изъ чиселъ $\alpha'', \alpha''', \ldots$ и представитъ высшій предѣлъ $A$ показателя $\alpha$, соотвѣтствующаго полиному $X$. По этому плану получатся всѣ высшіе предѣлы $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$.

Составимъ затѣмъ выраженіе $N$, опредѣляемое такъ:

$$N = X_1^{A_1} X_2^{A_2} \ldots X_m^{A_m} \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Это выраженіе представляетъ ту часть знаменателя формы, служащей для изысканія всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1), которая

соотвѣтствуетъ дѣлителямъ полинома $F$. Выраженіе $N$ этого рода нужно составить для каждаго изъ полиномовъ $F_1, F_2, \ldots, F_t$. Пусть эти выраженія $N$ соотвѣтственно будутъ; $N_1, N_2, \ldots, N_t$. Всѣ раціональныя рѣшенія уравненія (1) изыскиваются подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{N_1 N_2 \ldots N_t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

гдѣ $\xi$ есть цѣлый полиномъ.

Форма (37) должна по существу совпадать съ формой (11), опредѣляемой по правиламъ, изложеннымъ въ § 3. Но особенность формы (37) въ томъ, что для составленія ея не только не нужно знать полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$, но не требуется имѣть и разложенія полинома $P_0$ на неприводимые множители (хотя, какъ сейчасъ увидимъ, знать неприводимые множители полинома $P_0$ или $p$ весьма полезно).

Въ изложенномъ процессѣ играетъ существенную роль изысканіе условія (31) существованія общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ $\sigma$ и $F$, а также, если это условіе и условіе (30) выполнены, изысканіе общаго наибольшаго дѣлителя $\delta$ тѣхъ же полиномовъ. Въ этихъ изысканіяхъ полиномъ $\sigma$ можно замѣнять болѣе простыми полиномами, отбрасывая или прибавляя въ немъ члены, кратные полиному $F$, и устраняя или присоединяя множители, не имѣющіе съ $F$ общихъ дѣлителей ни при какихъ значеніяхъ $\alpha$. Основываясь на этомъ свойствѣ, мы можемъ подвергать полиномъ $\sigma$ различнымъ видоизмѣненіямъ.

Если при этихъ видоизмѣненіяхъ полиномъ $\sigma$ приводится къ полиному $\varsigma$, то эту связь полиномовъ $\sigma$ и $\varsigma$ будемъ обозначать такъ:

$$\sigma \equiv \varsigma .$$

Докажемъ затѣмъ, что

$$\sigma \equiv \zeta ,$$

гдѣ *)

$$\zeta = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1) P_i F^{i-1-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i} =$$

$$= (-1)^n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) P_0 F^{-1-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^n + \ldots +$$

$$+ \alpha(\alpha+1) P_{n-2} F^{n-3-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - \alpha P_{n-1} F^{n-2-\beta} \left(\frac{dF}{dx}\right) + P_n F^{n-1-\beta} . \quad (38)$$

*) Этотъ полиномъ $\zeta$ соотвѣтствуетъ полиному $\zeta_n$, который въ статьѣ „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ опредѣляется равенствомъ (68). Очевидно, полиномъ $\zeta$, опредѣляемый равенствомъ (14), есть частный случай полинома $\zeta$, опредѣляемаго равенствомъ (38).

Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{F}\frac{dF}{dx} + \varrho . F,$$

гдѣ $\varrho$ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенстта (7) и принявъ во вниманіе равенство (38), находимъ:

$$G . \sigma = H . \zeta + F . U, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

гдѣ $G$, $H$ и $U$ суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются такъ:

$$G = \frac{D}{F^{\beta}} \quad \text{и} \quad H = \left(\frac{p}{F}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы $G$ и $H$ не имѣютъ общихъ дѣлителей съ полиномомъ $F$, то равенство (39) непосредственно показываетъ, что $\sigma \equiv \zeta$, что̀ и требовалось доказать. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ процессѣ вмѣсто полинома $\sigma$ можно брать полиномъ $\zeta$, опредѣляемый равенствомъ (38).

Это замѣчаніе относится къ каждому изъ полиномовъ $F_1$, $F_2$, ..., $F_t$, которымъ соотвѣтствуетъ $t$ полиномовъ $\zeta$, вводимыхъ вмѣсто одного только полинома $\sigma$. Эта замѣна полинома $\sigma$ нѣсколькими полиномами $\zeta$ можетъ оказаться полезною, такъ какъ на практикѣ въ разныхъ случаяхъ могутъ имѣть значеніе разныя видоизмѣненія функціи $\sigma$. Прослѣдимъ нѣкоторыя изъ дальнѣйшихъ видоизмѣненій этого рода.

При $\beta = 0$ находимъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)\left[(\alpha+n-1)P_0F^{-1}\frac{dF}{dx} - P_1\right],$$

при $\beta = 1$ находимъ:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-3)\left[(\alpha+n-2)(\alpha+n-1)P_0F^{-2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - (\alpha+n-2)P_1F^{-1}\frac{dF}{dx} + P_2\right],$$

и т. д. Если условимся полагать: $k = \beta + 1$ при $\beta < n-1$ и $k = n$ при $\beta \geq n$, то будемъ имѣть вообще:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-i}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-i-1)P_iF^{i-1-\beta}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i}. \quad (40)$$

Отсюда легко усмотрѣть, что полиномъ $\zeta$, опредѣляемый равенствомъ (38), можно привести къ указанному въ статьѣ проф. К. А. Андреева виду (22′), т. е.

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-i-1)}{(1+\beta-i)!} \frac{d^{1+\beta-i}P_i}{dx^{1+\beta-i}}. \quad (41)$$

Изъ этого разнообразія формъ, къ которымъ приводятся полиномы $\sigma$ и $\zeta$, можно выбирать любую, смотря по обстоятельствамъ.

Покажемъ наконецъ, что въ отношеніи легкости разсматриваемаго процесса вычисленія идеальнымъ случаемъ будетъ тотъ, когда полиномъ $F$ есть *неприводимый*. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣетъ мѣсто этотъ случай и если $\alpha$ есть цѣлое число, удовлетворяющее условію (31), то общій наибольшій дѣлитель $\delta$ полиномовъ $\zeta$ и $F$ непремѣнно долженъ совпадать съ $F$; полиномы $X_1$, $X_2$, ... въ формулахъ (33), (34) и (36) должны сводиться къ одному только полиному $F$, и сверхъ того будемъ имѣть:

$$\sigma \equiv \zeta \equiv \Theta(\alpha),$$

т. е. первая часть равенства (31) получается посредствомъ однихъ только отбрасываній въ полиномѣ $\sigma$ или $\zeta$ членовъ, кратныхъ $F$, и множителей, которые ни при какомъ значеніи $\alpha$ не дѣлятся на $F$. Въ виду этихъ упрощеній на практикѣ никогда не слѣдуетъ упускать случаевъ выдѣлять изъ полинома $p$ его неприводимые дѣлители и вводить ихъ въ число полиномовъ $F_1$, $F_2$, ..., $F_t$, входящихъ въ равенства (26), (27) и (28). Но окончательная форма (37) не будетъ однако зависѣть отъ этихъ промежуточныхъ упрощеній.

Примѣнимъ изложенную теорію къ двумъ примѣрамъ.

*Примѣръ 1.* Данное уравненіе пусть будетъ:

$$(x^2+gx+h)^2x^5\frac{d^2y}{dx^2} - 6(x^3-hx-gh)x^4y =$$
$$= 12h(x^2+gx+h)^3(gx+h).$$

Имѣемъ:

$$P_0 = (x^2+gx+h)^2x^5, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = -6(x^3-hx-gh)x^4,$$
$$V = 12h(x^2+gx+h)^3(gx+h).$$

Отыскивая раціональныя рѣшенія, удовлетворяющія данному уравненію при произвольныхъ $g$ и $h$, получаемъ:

$$p = (x^2+gx+h)x, \quad D = (x^2+gx+h)x^4,$$
$$F_1 = x^2+gx+h, \quad F_2 = x, \quad D = F_1F_2^4, \quad V = F_1^3F_2^0 \cdot 12h(gx+h).$$

Дѣлители $F_1$ и $F_2$ полинома $p$ неприводимые, что̀ служитъ къ облегченію вычисленій.

Для дѣлителя $F_1$ полинома $p$ имѣемъ:

$$\beta_1 = 1\,,\quad \varepsilon_1 = 3\,,\quad \alpha_1' = -3\,,$$

$$\zeta = x^4[\alpha(\alpha+1)x(2x+g)^2 - 6(x^3 - hx - gh)] \equiv$$

$$\equiv \alpha(\alpha+1)x(2x+g)^2 - 6(x^3 - hx - gh) \equiv$$

$$\equiv (g^2 - 4h)\alpha(\alpha+1) - 6(g^2 - 2h).$$

Условіе (31) при этихъ данныхъ получаетъ видъ:

$$(g^2 - 4h)\alpha(\alpha+1) - 6(g^2 - 2h) = 0.$$

Получаемыя отсюда значенія $\alpha$, при произвольныхъ $g$ и $h$, не будутъ вообще цѣлыми и, слѣдовательно, должно полагать: $A_1 = \alpha_1' = -3$.

Для дѣлителя $F_2 = x$ полинома $p$ имѣемъ:

$$\beta_2 = 4\,,\quad \varepsilon_2 = 0\,,\quad \alpha_2' = 3\,,$$

$$\zeta = \alpha(\alpha+1)(x^2+gx+h)^2 - 6x(x^3 - hx - gh) \equiv \alpha(\alpha+1)h^2.$$

Очевидно, $\zeta$ не можетъ дѣлиться на $F_2$ ни при какихъ значеніяхъ $\alpha$, бо́льшихъ предѣла $\alpha_2'$. Поэтому $A_2 = \alpha_2' = 3$.

Раціональное рѣшеніе даннаго уравненія изыскивается подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{F_1^{A_1} F_2^{A_2}} = \frac{(x^2+gx+h)^3\,\xi}{x^3}\,,$$

гдѣ $\xi$ есть цѣлый полиномъ. Изыскивая $\xi$, получаемъ: $\xi = 1$ и, слѣдовательно, при произвольныхъ $g$ и $h$ существуетъ раціональное рѣшеніе:

$$y = \left(\frac{x^2+gx+h}{x}\right)^3.$$

*Примѣръ 2.* Данное уравненіе пусть будетъ:

$$x(x^5 - h)(x^5 + 5gx + 4h)\frac{d^2y}{dx^2} +$$

$$+ (7x^{10} - 5gx^6 - 24hx^5 - 20ghx - 8h^2)\frac{dy}{dx} +$$

$$+ (5x^9 - 15gx^5 - 30hx^4 - 10gh)\,y = 0.$$

Имѣемъ:

$$P_0 = x(x^5 - h)(x^5 + 5gx + 4h),$$

$$P_1 = 7x^{10} - 5gx^6 - 24hx^5 - 20ghx - 8h^2,$$

$$P_2 = 5x^9 - 15gx^5 - 30hx^4 - 10gh, \quad V = 0.$$

Отыскивая раціональныя рѣшенія, удовлетворяющія данному уравненію при произвольныхъ $g$ и $h$, находимъ:

$$p = P_0 = F_1 F_2 F_3,$$

гдѣ $F_1$, $F_2$, $F_3$ суть неприводимые полиномы, опредѣляемые такъ:

$$F_1 = x, \quad H_2 = x^5 - h, \quad F_3 = x^5 + 5gx + 4h.$$

Далѣе находимъ: $D = 1$, т. е. для всѣхъ дѣлителей полинома $p$ имѣемъ: $\beta = 0$. Сверхъ того для тѣхъ же дѣлителей имѣемъ: $\varepsilon = +\infty$ и, слѣдовательно, $\alpha' = -\infty$.

Для дѣлителя $F_1 = x$ полинома $p$ имѣемъ:

$$\zeta \equiv -4h^2\alpha(\alpha - 1) \equiv \alpha(\alpha - 1).$$

Отсюда видно, что $\zeta$ дѣлится на $F_1 = x$ при слѣдующихъ цѣлыхъ значеніяхъ $\alpha$:

$$\alpha_1'' = 0, \quad \alpha_1''' = 1.$$

Слѣдовательно, $A_1 = \alpha_1''' = 1$.

Для дѣлителя $F_2 = x^5 - h$ полинома $p$ имѣемъ:

$$\zeta \equiv 5x^4[5\alpha(\alpha + 1)x(x^5 + 5gx + 4h) - \alpha P_1] \equiv \alpha(\alpha + 2).$$

Отсюда видно, что $\zeta$ будетъ дѣлиться на $F_2$ при слѣдующихъ цѣлыхъ значеніяхъ $\alpha$:

$$\alpha_2'' = -2, \quad \alpha_2''' = 0.$$

Слѣдовательно, $A_2 = \alpha_2''' = 0$.

Для дѣлителя $F_3 = x^5 + 5gx + 4h$ полинома $p$ находимъ:

$$\zeta \equiv 5(x^4 + g)\alpha[5(\alpha + 1)x(x^5 - 1)(x^4 + g) - P_1] \equiv$$

$$\equiv \alpha[5(\alpha + 1)x(x^5 - 1)(x^4 + g) - P_1] \equiv$$

$$\equiv 5\alpha(\alpha - 1)x(x^5 - h)(x^4 + g) \equiv \alpha(\alpha - 1).$$

Очевидно, $\zeta$ дѣлится на $F_3$ при слѣдующихъ значеніяхъ $\alpha$:

$$\alpha_3''=0\,,\quad \alpha_3'''=1\,.$$

Поэтому $A_3=\alpha_3'''=1$.

Всѣ искомыя раціональныя рѣшенія даннаго уравненія опредѣляются при посредствѣ формы:

$$y=\frac{\xi}{F_1^{A_1}F_2^{A_2}F_3^{A_3}}=\frac{\xi}{x(x^5+5gx+4h)}\,,$$

гдѣ $\xi$ есть цѣлый полиномъ. Опредѣляя полиномъ $\xi$, находимъ:

$$\xi=C_1x^5+C_2x+4C_1q\,,$$

гдѣ $C_1$ и $C_2$ суть произвольныя постоянныя. Слѣдовательно общій интегралъ даннаго уравненія представляется въ раціональной формѣ:

$$y=\frac{C_1(x^5+4q)+C_2x}{x(x^5+5gx+4h)}\,.$$

Примѣръ этотъ съ небольшою перемѣною въ обозначеніяхъ заимствованъ изъ перваго мемуара В. Г. Имшенецкаго.

§ 5. Особое преимущество способа, основаннаго на употребленіи интегрирующаго множителя.

Изложеніе теоріи, основанное на употребленіи интегрирующаго множителя В. Г. Имшенецкаго, представлено въ статьѣ проф. К. А. Андреева и въ моей статьѣ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ съ такою полнотою, что считаю излишнимъ излагать здѣсь эту теорію и коснусь лишь одной ея особенности.

Послѣ перенесенія всѣхъ усовершенствованій изъ этой теоріи въ вышеприведенную теорію, изложенную безъ посредства интегрирующаго множителя, обѣ эти теоріи почти сливаются, такъ какъ различіе между ними остается главнымъ образомъ только формальное, исключая одного пункта, касающагося вычисленія числителя $\xi$ въ равенствѣ (11) или (37).

Представивъ равенство (11) или (37) въ формѣ:

$$y=\frac{M_1\xi}{M}\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(42)$$

гдѣ $M_1$ и $M$ суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя, мы должны внести это выраженіе $y$ въ уравненіе (1). Если не прибѣгать къ интегрирующему множителю, то послѣ указанной замѣны получимъ уравненіе вида:

$$\Phi_0\frac{d^n\xi}{dx^n}+\Phi_1\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}}+\ldots+\Phi_n\xi=V\,,\quad\ldots\ldots\quad(43)$$

гдѣ вообще

$$\Phi_i = P_i + \binom{n-i+1}{1} P_{i-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{M_1}{M}\right) + \cdots$$
$$+ \binom{n-i+s}{s} P_{i-s} \frac{d^s}{dx^s}\left(\frac{M_1}{M}\right) + \cdots + \binom{n}{i} P_0 \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{M_1}{M}\right), \quad . \quad . \quad (44)$$

при чемъ

$$\binom{k}{s} = \frac{k(k-1)\ldots(k-s+1)}{1.2\ldots s}.$$

При вычисленіи выраженій $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ приходится, такимъ образомъ, производить дифференцированіе дроби $\frac{M_1}{M}$.

При употребленіи интегрирующаго множителя $\mu$ можно вовсе избѣгнуть дифференцированія дробей. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ уравненіемъ:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{S_0 M_1}{M}\xi\right) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{S_1 M_1}{M}\xi\right) + \cdots + \frac{S_n M_1}{M}\xi = V\mu, \quad . \quad . \quad (45)$$

гдѣ вообще

$$S_i = \mu P_i - \binom{n-i+1}{1} \frac{d(\mu P_{i-1})}{dx} + \cdots +$$
$$+ (-1)^s \binom{n-i+s}{s} \frac{d^s(\mu P_{i-s})}{dx^s} + \cdots + (-1)^i \binom{n}{i} \frac{d^i(\mu P_0)}{dx^i}. \quad (46)$$

Существуетъ множество способовъ выбрать интегрирующій множитель $\mu$ такъ, чтобы онъ представлялъ функцію *цѣлую* и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ полиномы $S_0, S_1, \ldots, S_n$ имѣли общій дѣлитель $M$. Если множитель $\mu$ выбранъ съ соблюденіемъ этихъ условій, то функціи

$$\frac{S_0}{M}, \frac{S_1}{M}, \ldots, \frac{S_n}{M}$$

должны быть цѣлыми и ни въ формулахъ (46), ни въ коэффиціентахъ уравненія (45) не будетъ дробныхъ выраженій *).

Итакъ, интегрирующій множитель $\mu$, надлежащимъ образомъ выбранный, уничтожаетъ въ дифференціальномъ уравненіи (45) дроби подъ знаками дифференцированія.

*) Форма (45) сама по себѣ удобна также для дальнѣйшаго вычисленія полинома $\xi$ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и не нуждается въ приведеніи ея къ виду:

$$f_0 \frac{d^n\xi}{dx^n} + f_1 \frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \cdots + f_n\xi = V.\mu.$$

Это преимущество неотъемлемо принадлежитъ способу, основанному на употребленіи интегрирующаго множителя. Вмѣстѣ съ тѣмъ выборъ цѣлаго множителя $\mu$, уничтожающаго въ уравненіи (45) дроби, представлялъ съ самаго начала одну изъ существенныхъ особенностей способа В. Г. Имшенецкаго, которую впослѣдствіи съ наибольшею полнотою развилъ въ своей статьѣ проф. К. А. Андреевъ.

Слѣдуя схемѣ проф. К. А. Андреева, займемся составленіемъ болѣе простаго множителя $\mu$, уничтожающаго въ уравненіи (45) дроби и представляемаго цѣлою функціей.

Замѣтимъ прежде всего, что въ функцію $\mu$, удовлетворяющую предъявленнымъ къ ней требованіямъ, нужно вводить лишь такіе множители вида $(x+a)^\gamma$, для которыхъ $x+a$ есть дѣлитель знаменателя $M$. Поэтому линейные дѣлители полинома $p$, на которые не дѣлится полиномъ $M$, вовсе устранимъ изъ дальнѣйшаго разсмотрѣнія.

Пусть $x+a$ есть дѣлитель полинома $M$ и пусть $A$ есть соотвѣтствующій изъ показателей $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, входящихъ въ знаменатель второй части равенства (11). Очевидно, будемъ имѣть:

$$A>0 \quad \text{и} \quad M=(x+a)^A.H, \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

гдѣ $H$ есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $x+a$. Далѣе представимъ искомый интегрирующій множитель $\mu$ такъ:

$$\mu=(x+a)^\gamma.G, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

гдѣ $G$ есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $x+a$. Цѣлое число $\gamma$ надлежитъ опредѣлить.

Очевидно, число $\gamma$, удовлетворяя условію:

$$\gamma \geqq 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ должно быть таково, чтобы полиномы

$$S_0, \; S_1, \ldots, \; S_{n-1}, \; S_n$$

дѣлились на $(x+a)^A$. Но для выполненія этого послѣдняго требованія необходимо и достаточно, чтобы только полиномы

$$S_0, \; S_1, \ldots, \; S_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

дѣлились на $(x+a)^A$, такъ какъ при этомъ условіи полиномъ $S_n$ непремѣнно раздѣлится на $(x+a)^A$ (иначе уравненіе (45) привело бы къ противорѣчію). Замѣтивъ при этомъ, что на основаніи равенствъ (46) и (48) и свойствъ функцій (12) должно имѣть силу равенство:

$$S_i=(x+a)^{\gamma+1+\beta-i}\,T_i, \quad (i=0, \; 1, \ldots, \; n)$$

гдѣ $T_i$ есть цѣлый полиномъ, усматриваемъ, что функціи (50) дѣлятся нацѣло на

$$(x+a)^{\gamma+2+\beta-n}.$$

Поэтому число $\gamma$ удовлетворитъ указанному требованію, если положимъ:

$$\gamma+2+\beta-n=A+\omega, \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

гдѣ $\omega$ есть цѣлое число, не меньшее нуля и выбираемое такъ, чтобы имѣло силу неравенство (49). При соблюденіи этихъ условій число $\omega$ выгодно брать наименьшимъ.

Выбирая число $\omega$, предположимъ во-первыхъ, что имѣетъ мѣсто совпаденіе $A$ съ $\alpha'$, т. е.

$$A=\alpha'=1+\beta-n-\varepsilon.$$

Имѣя въ виду, что $A>0$, убѣждаемся, что $1+\beta-n>0$. Отсюда и изъ разсмотрѣнія полиномовъ (12) вытекаетъ, что полиномы $P_0$, $P_1, \ldots, P_n$ имѣютъ общій дѣлитель $x+a$. Слѣдовательно, полиномъ $V$ не дѣлится $x+a$ или, иначе, $\varepsilon=0$. Поэтому $A=\alpha'=1+\beta-n$ и $\gamma=\omega-1$. Отсюда видно, что наименьшее положительное $\omega$, удовлетворяющее условію (49), будетъ: $\omega=1$, и слѣдовательно

$$\gamma=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Этотъ результатъ показываетъ, что $x+a$ не будетъ дѣлителемъ искомаго полинома $\mu$ въ томъ случаѣ, когда $A=\alpha'$.

Во-вторыхъ предположимъ, что $A$ не совпадаетъ съ $\alpha'$ и слѣдовательно $A>\alpha'$. Покажемъ, что въ этомъ случаѣ условіе (49) соблюдается при $\omega=0$, т. е. число

$$\gamma=A+n-\beta-2 \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

удовлетворяетъ условію: $A+n-\beta-2\geqq 0$. Если допустимъ противное, то помня, что $A>0$, будемъ имѣть:

$$0<A<\beta+2-n$$

и, слѣдовательно, $1+\beta-n>0$. Отсюда и изъ разсмотрѣнія полиномовъ (12) убѣждаемся, что полиномы $P_0$, $P_1, \ldots, P_n$ имѣютъ общаго дѣлителя $x+a$ и, слѣдовательно, полиномъ $V$ не дѣлится на $x+a$, иначе, $\varepsilon=0$. Поэтому $\alpha'=1+\beta-n$ и неравенство $A>\alpha'$ получаетъ видъ: $\beta+1-n<A$. Такимъ образомъ приходимъ къ противорѣчивымъ для цѣлаго числа $A$ неравенствамъ:

$$\beta+1-n<A<\beta+2-n.$$

Поэтому нельзя допустить неравенства $A+n-\beta-2<0$ и, слѣдовательно, число $\gamma$, опредѣляемое равенствомъ (53), удовлетворитъ неравенству (49).

Распространяя указанный порядокъ вычисленія показателя $\gamma$ на всѣ линейные дѣлители $x+a$ полинома $M$, вполнѣ опредѣлимъ цѣлый интегрирующій множитель $\mu$, уничтожающій въ уравненіи (45) дроби.

Если не дано разложенія полинома $p$ на линейные дѣлители, то вмѣсто этихъ дѣлителей можно брать дѣлители вида (33) и (34), находимые процессомъ вычисленія, указаннымъ въ § 4.

Выясненное сейчасъ преимущество способа, основаннаго на употребленіи интегрирующаго множителя, приводитъ къ заключенію, что вообще этотъ способъ безусловно превосходитъ всѣ остальные, если поставить себѣ главной задачей только свести нахожденіе всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) къ нахожденію цѣлыхъ рѣшеній преобразованнаго уравненія, каковая задача находится въ связи съ опредѣленіемъ лишь знаменателя $M$.

Что же касается опредѣленія полинома $M_1$, то интегрирующій множитель при этомъ опредѣленіи теряетъ свои преимущества *), уступая въ своихъ достоинствахъ другимъ пріемамъ вычисленія, изложеннымъ выше въ §§ 3 и 4.

Само собою разумѣется, что теорія нахожденія раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) не нуждается въ опредѣленіи полинома $M_1$, какъ въ неизбѣжной необходимости. Но выдѣленіе полинома $M_1$ вообще приноситъ существенное и естественное облегченіе, благодаря пониженію степени того цѣлаго рѣшенія, къ которому задача приводится. Подобнымъ облегченіемъ теорія не должна пренебрегать.

Если при рѣшеніи задачи о нахожденіи раціональныхъ рѣшеній уравненія (1) нужно дорожить всѣми упрощеніями, какія допускаются характеромъ данныхъ, то, мнѣ кажется, удобнѣе всего отыскивать сначала знаменатель формы (11) или (37), опредѣляющій полиномы $M$ и $M_1$, по указаннымъ въ § 3 или 4 правиламъ. Затѣмъ указаннымъ сейчасъ порядкомъ опредѣлять цѣлый интегрирующій множитель $\mu$. Очевидно, вычисленіе множителя $\mu$ не представляется уже никакихъ затрудненій, послѣ того какъ найдены полиномы $M$ и $M_1$. Наконецъ слѣдуетъ вычислять полиномъ $\xi$ при посредствѣ уравненія (45).

---

*) Въ § 3 моей статьи „Способъ В. Г. Имшенецкаго...“ даны средства опредѣлять при помощи интегрирующаго множителя всѣ показатели $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и слѣдовательно оба полинома $M$ и $M_1$. Но при опредѣленіи состава полинома $M_1$ и соотвѣтствующихъ факторовъ множителя $\mu$ приходится брать отрицательные показатели, т. е. считать множитель $\mu$ дробнымъ. Пользуясь этимъ множителемъ, можно было бы достигнуть сокращенія въ уравненіи (45) не только полинома $M$, но и полинома $M_1$. Но невыгода этого вычисленія въ томъ, что формулы (46) осложняются, содержа дифференцированіе дробнаго выраженія $\mu$.

# Объ автоморфной функціи, аналогичной экспонентной.

**В. И. Алексѣевскаго.**

Періодическія функціи обладаютъ автоморфизмомъ, т. е. не измѣняются отъ замѣны перемѣннаго простѣйшею группою линейныхъ подстановокъ. Однако, не однѣ періодическія, но и автоморфныя функціи въ собственномъ смыслѣ слова, встрѣчаются очень часто, но ихъ основное свойство оставалось незамѣченнымъ; напр. выраженіе

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

служащее исходнымъ пунктомъ для вывода строки $e^x$, есть автоморфная функція и, при томъ, аналогичная $e^x$.

Не лишено интереса опредѣлить самый общій видъ функціи, обладающей тѣми-же свойствами.

Задачу можно формулировать такимъ образомъ:

Опредѣлить функцію $F(x)$, обладающую слѣдующими свойствами: 1) при всѣхъ линейныхъ преобразованіяхъ независимаго перемѣннаго $x$, составляющихъ группу,

$$F\left(\frac{\alpha_i x+\beta_i}{\gamma_i x+\delta_i}\right)=F(x),$$

2) для нѣкоторой функціи $z$ перемѣнныхъ $x$ и $y$

$$F(z)=F(x).F(y).$$

Группа линейныхъ подстановокъ должна быть прерывной; въ противномъ случаѣ искомая функція была-бы постоянной. Но можно къ искомой функціи присоединить непрерывную группу, по отношенію къ ко-

торой прерывная будетъ подгруппой. Успѣхъ рѣшенія и зависитъ отъ способа введенія этой непрерывной группы. Мы достигаемъ этого сдѣдующимъ *опредѣленіемъ* функціи $z$.

Функція

$$z = \Phi(x, y)$$

отъ *всякаго* линейнаго преобразованія $x$ преобразуется *такимъ-же* образомъ, т. е.

$$\Phi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, y\right) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

и $z$ обращается въ $y$, когда $x$ равно нѣкоторому постоянному $c$.

Такое опредѣленіе отнюдь не исключаетъ непрерывности линейной подстановки и, слѣдовательно, допускаетъ существованіе безконечномалыхъ преобразованій.

Всякая линейная подстановка обладаетъ двумя инваріантными точками. Называя ихъ чрезъ $a$ и $b$ и подвергая нашу функцію безконечномалому преобразованію, получимъ:

$$l(z-a)(z-b) = \frac{\partial z}{\partial x} l(x-a)(x-b),$$

гдѣ $l$ — нѣкоторое постоянное.

Интегрируя это уравненіе, предполагая, что $l$ не равно нулю, и опредѣляя произвольную функцію, вводимую интегрированіемъ съ помощью вышеупомянутыхъ начальныхъ условій, получимъ:

$$\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-a}{c-b} = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-a}{y-b}.$$

Отсюда

$$z = \frac{ab(x+y-c) - (a+b-c)xy}{ab - xy + c(x+y-a-b)} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

До сихъ поръ мы предполагали, что $a$ и $b$ различны, а $l$ не равно нулю, но формула распространяется и на эти случаи; относительно допущенія $l = 0$ слѣдуетъ замѣтить, что оно эквивалентно удаленію одной или обѣихъ точекъ въ безконечность.

Полагая въ формулѣ (1) $c = a$, находимъ

$$z = b,$$

т. е. при совпаденіи постояннаго $c$ съ одной изъ инваріантныхъ точекъ, $z$ совпадаетъ съ другой; поэтому дальше мы должны предполагать, что *$c$ отлично отъ каждой изъ инваріантныхъ точекъ.*

Итакъ, выраженіе (1) замѣняетъ для искомой функціи $F(x)$ сумму $x+y$, характерную для экспонентной. Но послѣдняя удовлетворяетъ требованіямъ нашей задачи, слѣдовательно и

$$z = x + y$$

должно быть частнымъ случаемъ выраженія (1). И дѣйствительно, формула (1) обращается въ предыдущую, когда $c = 0$, а инваріантныя точки $a$ и $b$ удаляются въ безконечность.

Полагая на время $z = x_1$, напишемъ формулу (1) такимъ образомъ:

$$x_1 = \Phi_1(x, y).$$

Составимъ теперь рядъ выраженій:

$$x_2 = \Phi_1(x_1, y), \quad x_3 = \Phi_1(x_2, y), \ldots.$$

По исключеніи изъ нихъ промежуточныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots$, найдемъ

$$x_1 = \Phi_1(x, y), \quad x_2 = \Phi_2(x, y), \quad x_3 = \Phi_3(x, y) \ldots$$

гдѣ правыя части будутъ линейныя функціи относительно $x$; слѣдовательно, онѣ представляютъ группу, въ которой $y$—параметръ. Эту группу мы и желали присоединить.

Подставляя теперь $x_1, x_2, x_3 \ldots$ въ искомую функцію $F(x)$, по второму ея свойству найдемъ:

$$F(x_1) = F(x)\,F(y), \quad F(x_2) = F(x)\,F^2(y), \quad F(x_3) = F(x)\,F^3(y)$$

и т. д.

Отсюда ясно, что если $y$ будетъ корнемъ уравненія

$$F(x) = 1,$$

то

$$F(x_i) = F(x).$$

Итакъ, непрерывная группа линейныхъ подстановокъ обращается въ прерывную, когда положимъ $y$ равнымъ корню вышеупомянутаго уравненія.

Переходимъ къ составленію дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ функція $F(x)$.

Съ этою цѣлью составимъ выраженіе

$$F(z) - F(x).$$

На основаніи условія

$$F(z) = F(x)\,F(y)$$

имѣемъ

$$F(z) - F(x) = F(x)\,[F(y) - 1].$$

Съ другой стороны

$$F(z) - F(x) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x} \cdot (z - x).$$

Вычисливъ $(z - x)$ изъ формулы (1), находимъ:

$$z - x = \frac{(y - c)\,(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b) - (c - x)\,(c - y)}.$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущее тождество и сравнивая результатъ съ первымъ выраженіемъ, по раздѣленіи на $(y - c)$, получимъ:

$$\frac{(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b) - (c - x)\,(c - y)} \cdot \frac{F(z) - F(x)}{z - x} = F(x) \cdot \frac{F(y) - 1}{y - c}.$$

Допустивъ теперь, что $c$ есть корень уравненія

$$F(x) = 1$$

и замѣтивъ, что когда $y = c$, то $z = x$, найдемъ:

$$\frac{(x - a)\,(x - b)}{(c - a)\,(c - b)}\,F'(x) = F(x) \cdot F'(c) \quad \ldots\ldots (2)$$

Таково искомое дифференціальное уравненіе.

Изъ него видимъ: 1) что функція $F(x)$ зависитъ отъ значенія $F'(c)$, 2) что послѣдняя величина есть произвольное постоянное количество, 3) что для существованія $F(x)$ вообще $F'(c)$ должна быть отлична отъ нуля (въ противномъ случаѣ $F(x)$ будетъ постоянной), и наконецъ 4) что когда $c = \infty$, $F'(c)$ должна быть нулемъ 2-го порядка, такъ какъ произведеніе

$$(c - a)\,(c - b)\,F'(c)$$

должно быть постоянной величиной.

Съ точки зрѣнія теоріи непрерывныхъ группъ найденный результатъ получаетъ новое толкованіе. Дѣйствительно, просматривая ходъ предыдущихъ разсужденій, видимъ, что лѣвая часть уравненія (2) представляетъ символъ $U$ (С. Ли) безконечно-малаго преобразованія функціи

$F(x)$ относительно группы. Слѣдовательно, уравненіе (2) эквивалентно слѣдующему:

$$UF(x) = F(x) \cdot F'(c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

т. е. *символъ безконечно-малаго преобразованія $F(x)$ пропорціоналенъ самой функціи.*

Этотъ результатъ аналогиченъ извѣстному предложенію: производная экспонентной функціи пропорціональна самой функціи.

Легко убѣдиться повѣркою, что нашъ выводъ остается справедливъ и тогда, когда $c = \infty$. Для этого надо положить сначала въ равенствѣ (1) $c = \infty$ и затѣмъ повторить разсужденія, служившія для вывода дифференціальнаго уравненія.

Для нахожденія $F(x)$ остается проинтегрировать уравненіе (2).

Такимъ образомъ получимъ:

$$F(x) = \left( \frac{\frac{x-a}{x-b}}{\frac{c-a}{c-b}} \right)^g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ

$$g = \frac{(c-a)(c-b)F'(c)}{a-b}.$$

Итакъ, точки $a$ и $b$ суть критическія точки функціи; сама функція вообще многозначная.

Чтобы показать разнообразіе формъ функціи $F$ мы разсмотримъ нѣкоторые частные случаи, при чемъ для упрощенія будемъ давать постояннымъ $c$ и $F'(c)$ частныя значенія.

Полагая $c = 0$, $F'(c) = 1$ получимъ:

$$E(x) = \left( \frac{1 - \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{b}} \right)^{\frac{ab}{a-b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

когда $a \lessgtr b$*); при этомъ

$$z = \frac{ab(x+y) - (a+b)xy}{ab - xy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Полагая $a = b$, имѣемъ:

$$E(x) = e^{\frac{ax}{a-x}}$$

и

$$z = \frac{a^2(x+y) - 2axy}{a^2 - xy}.$$

*) Буквою $E$ означаются частные виды функціи $F$. (*Ред.*)

Въ этомъ случаѣ функція стала однозначной. Причина понятна; предыдущая функція $E(x)$ при обходѣ перемѣннымъ замкнутаго контура, заключающаго обѣ точки $a$ и $b$, не мѣняетъ своей величины, поэтому то же самое остается, когда обѣ точки совпали.

Пусть $a$ и $b$ *чисто мнимыя* сопряженныя количества, функція принимаетъ видъ:

$$E(x) = e^{\alpha \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)},$$

гдѣ $\alpha$ коэффиціентъ обоихъ мнимыхъ количествъ.

Соотвѣтственная формула для $z$ такая:

$$z = \frac{\alpha^2(x+y)}{\alpha^2 - xy}.$$

Пусть $b = \infty$; тогда

$$E(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-a}$$

и

$$z = x + y - \frac{1}{a}xy.$$

Если $a = \infty$, $b = \infty$, то

$$E(x) = e^{x}.$$

Такимъ образомъ, наша *автоморфная функція обращается въ экспонентную, когда обѣ критическія точки въ безконечности.*

Когда одна изъ инваріантныхъ точекъ совпадаетъ съ нулемъ, предыдущая формула не годится, потому-что одновременное существованіе условій $c = 0$ и $b = 0$ требуетъ совпаденія $c$ и $b$, что, какъ мы видѣли, нужно исключить.

Поэтому, полагая $b = 0$, принимаемъ напр. $c = 1$, $F'(c) = m$; тогда, полагая еще $a = \infty$, получаемъ

$$E(x) = x^m.$$

Если $c = \infty$, то положимъ $\lim.\,(c-a)(c-b)F'(c) = \lim.\,c^2F'(c) = 1$.

Тогда

$$E(x) = \left(\frac{1 - \frac{a}{x}}{1 - \frac{b}{x}}\right)^{\frac{1}{a-b}},$$

$$z = \frac{xy - ab}{x + y - a - b}.$$

Слѣдовательно, когда $b=0$, то

$$E(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{a}}$$

и

$$z=\frac{xy}{x+y-a}.$$

Если $b=0$ и $a=0$

$$E(x)=e^{-\frac{1}{x}}$$

и

$$z=\frac{xy}{x+y}.$$

Вычисленіе группы дѣлается по указанному выше правилу.

Возьмемъ напр. форму (5) для $E(x)$. Опредѣляя корни $\alpha_n$ уравненія

$$E(x)=1,$$

находимъ:

$$\alpha_n=\frac{ab(1-\varrho^{2n})}{b-a\varrho^{2n}},$$

гдѣ

$$\varrho=e^{\frac{\pi i(a-b)}{ab}}.$$

Полагая теперь въ формулѣ (6)

$$z=x_n,\quad y=\alpha_n,$$

находимъ прерывную группу для взятой формы $E(x)$:

$$x_n=\frac{x(a-b\varrho^{2n})-ab(1-\varrho^{2n})}{x(1-\varrho^{2n})-(b-a\varrho^{2n})} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія.

Линейныя дифференціальныя уравненія съ перемѣнными коэффиціентами, приводимые къ виду

$$U^n y+A_1U^{n-1}y+\ldots+A_{n-1}Uy+A_ny=0, \quad \ldots\ldots (8)$$

интегрируются въ функціяхъ $E(x)$ такъ-же, какъ и линейныя дифференціальныя уравненія съ постоянными коэффиціентами.

*

Дѣйствительно, основаніемъ для интегрированія послѣднихъ служитъ свойство экспонентной функціи:

$$\frac{d^n e^{rx}}{dx^n} = r^n \cdot e^{rx}.$$

Пусть

$$Uy = k(x-a)(x-b)y'.$$

На основаніи предыдущаго всегда существуетъ такая функція $E(x)$, что

$$UE(x) = k(x-a)(x-b)E'(x).$$

или

$$UE(x) = E(x),$$

и слѣдовательно:

$$U^n[E(x)]^r = r^n \cdot [E(x)]^r.$$

Отсюда и явствуетъ справедливость нашего утвержденія.

Приведеніе дифференціальныхъ уравненій къ указанному типу совершается посредствомъ слѣдующихъ формулъ.

Положимъ для краткости

$$(x-a)(x-b) = t,$$

тогда

$$t' = 2x - a - b, \quad t'' = 2,$$

и

$$Uy = kty'$$

$$U^2y = k^2(t^2y'' + tt'y')$$

$$U^3y = k^3[t^3y''' + 3t^2t'y'' + (tt'^2 + 2t^2)y']$$

. . . . . .

Такъ какъ мы убѣдились, что интегралы предыдущаго уравненія выражаются чрезъ $E(x)$, то замѣтивъ, что

$$E(x) = e^{\log E(x)}$$

заключаемъ, что ур. (8) приводится къ линейному дифференціальному уравненію съ постоянными коэффиціентами посредствомъ замѣны независимаго перемѣннаго, по формулѣ

$$\xi = \log E(x).$$

Изъ формы (8) легко выводятся другія извѣстныя уравненія, приводимыя къ уравненіямъ съ постоянными коэффиціентами.

Если одна изъ точекъ $a$ или $b$ въ безконечности, то $t$ становится первой степени относительно $x$; символы упрощаются:

$$Uy = kty' , \quad U^2y = k^2t^2y'' , \quad U^3y = k^3t^3y''' , \ldots .$$

и уравненіе принимаетъ весьма извѣстный видъ.

Для полученія формы Гальфена (Mémoires présentés par divers savants, t. XXVIII, 1884.)

$$z^{(n)} + \frac{A}{(x-a)^n (x-b)^n} z = 0$$

надо предварительно измѣнить зависимое перемѣнное положеніемъ

$$y = (x-a)^{\mu} z$$

и затѣмъ спеціализировать постоянныя $\mu$ , $A_1$ , $A_2$ , ....

Напр. уравненіе

$$U^2y + AUy + By = 0$$

или

$$t^2y'' + t(A+t')y' + By = 0$$

при выборѣ

$$\mu = -1 , \quad A = a - b$$

обращается въ

$$z'' + \frac{B}{(x-a)^2 (x-b)^2} z = 0$$

Добавимъ къ сказанному нѣсколько словъ объ обратной функціи, которая должна быть аналогична логариѳму.

Полагая напр. въ (5)

$$E(x) = u ,$$

получаемъ обратную функцію

$$x = \lambda(u) .$$

На основаніи равенства (6) ея характерное свойство выражается равенствомъ:

$$\lambda(uv) = \frac{ab[\lambda(u) + \lambda(v)] - (a+b)\,\lambda(u)\,\lambda(v)}{ab - \lambda(u)\,\lambda(v)} .$$

Функція $E(x)$ можетъ быть и однозначна, и многозначна. Въ послѣднемъ случаѣ $\lambda(u)$ будетъ автоморфна. Дѣйствительно, общее выраженіе для $E(x)$ таково

$$k^m . E(x)$$

гдѣ

$$k = e^{\frac{2\pi i ab}{a-b}},$$

а $m$ — цѣлое число. Слѣдовательно,

$$\lambda(k^m u) = \lambda(u),$$

такъ что группа функціи $\lambda(u)$ характеризуется типичной подстановкой

$$u_m = k^m u .$$

Наоборотъ, автоморфизму $E(x)$ соотвѣтствуетъ многозначность $\lambda(u)$. Называя ея два значенія чрезъ $\lambda(u)$ и $\lambda_0(u)$, находимъ связь между ними изъ формулы (7):

$$\lambda(u) = \frac{\lambda_0(u)(a - b\varrho^{2n}) - ab(1-\varrho^{2n})}{\lambda_0(u)(1-\varrho^{2n}) - (b - a\varrho^{2n})}$$

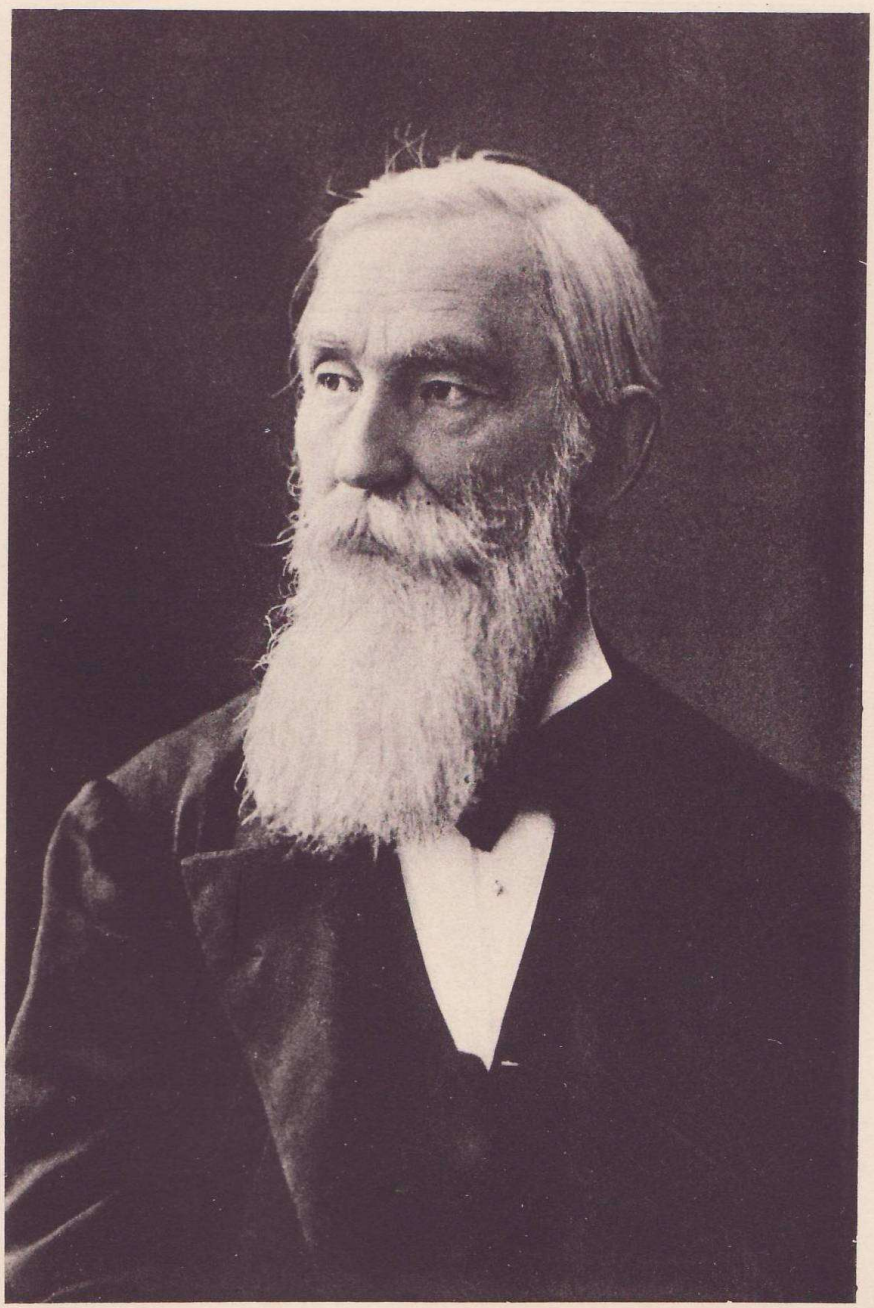
Не останавливаясь на выводѣ различныхъ выраженій для $\lambda(u)$, отмѣтимъ только двѣ формы:

$$\lambda(u) = \log u \quad \text{при } a = b = \infty$$
$$\lambda(u) = \operatorname{tg} \log u \text{ при } a = -i,\ b = +i.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ констатировать слѣдующее. Съ точки зрѣнія проективной геометріи равенство (6) или (1), какъ непосредственное слѣдствіе уравненія:

$$\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-a}{c-b} = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{y-a}{y-b},$$

выражаетъ постоянство сложнаго отношенія четырехъ точекъ на прямой. Въ то-же время въ немъ заключается теорема сложенія функціи $\lambda(u)$, частными случаями которой являются логариѳмъ и тангенсъ.



Фототипія Шереръ, Набгольцъ и К° въ Москвѣ.

# Пафнутій Львовичъ Чебышевъ.

**Очеркъ А. М. Ляпунова.**

26 ноября 1894 г. скончался академикъ П. Л. Чебышевъ, въ лицѣ котораго наука утратила одного изъ величайшихъ геометровъ истекающаго столѣтія.

Своими изслѣдованіями П. Л. Чебышевъ разъяснилъ многіе трудные вопросы анализа, установилъ связь между различными, весьма разнородными теоріями и проложилъ путь къ рѣшенію многихъ важныхъ задачъ, неразрѣшимыхъ обычными методами.

Въ запискѣ академиковъ А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, посвященной памяти покойнаго ученаго, находимъ, между прочимъ, слѣдующую прекрасную характеристику его трудовъ:

„Труды Чебышева носятъ отпечатокъ геніальности. Онъ изобрѣлъ новые методы для рѣшенія многихъ трудныхъ вопросовъ, которые были поставлены давно и оставались не рѣшенными. Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ поставилъ рядъ новыхъ важныхъ вопросовъ, надъ разработкою которыхъ трудился до конца своихъ дней.

„Въ виду оригинальности изслѣдованій П. Л. Чебышева, ему рѣдко приходилось упоминать о чужихъ изслѣдованіяхъ. За то другіе ученые все чаще и чаще упоминаютъ о нашемъ славномъ сочленѣ и черпаютъ свои идеи изъ той богатой сокровищницы мыслей, которую представляютъ труды П. Л. Чебышева“ *).

Оцѣнить надлежащимъ образомъ значеніе великаго ученаго немыслимо безъ подробнаго анализа всѣхъ его трудовъ, и я не беру на себя этой задачи, которая невозможна безъ глубокаго ихъ изученія и въ настоящее время еще не могла бы быть выполнена сколько нибудь удовлетворительно. Геніальныя идеи, разсѣянныя въ трудахъ П. Л. Чебышева, безъ сомнѣнія, не только не исчерпаны во всѣхъ своихъ вы-

*) Извѣстія Академіи Наукъ. Томъ II, № 1. 1895. (Засѣданіе Физико-Математическаго Отдѣленія 30 ноября 1894 г.).

водахъ, но могутъ принести надлежащіе плоды лишь въ будущемъ, и тогда только явится возможность получить правильное представленіе о великомъ значеніи ученаго, котораго лишилась недавно наука.

Въ настоящемъ очеркѣ я имѣю лишь въ виду изложить извѣстные мнѣ факты изъ жизни и ученой дѣятельности П. Л. Чебышева *), указать важнѣйшія изъ его изслѣдованій и передать нѣкоторыя мои личныя воспоминанія о немъ, какъ о профессорѣ.

П. Л. Чебышевъ, принадлежавшій къ старинной дворянской семьѣ, родился 14 мая 1821 г. въ сельцѣ Окатовѣ Боровского уѣзда Калужской губерніи, въ имѣніи своей матери. До поступленія въ университетъ онъ учился дома, затѣмъ въ Московскомъ университетѣ, гдѣ въ 1841 г. получилъ степень кандидата математическихъ наукъ. Продолжая дальнѣйшія научныя занятія подъ руководствомъ проф. Брашмана, П. Л. Чебышевъ вскорѣ же обратилъ на себя вниманіе талантливыми оригинальными изслѣдованіями.

Въ печати имя П. Л. Чебышева въ первый разъ, если не ошибаюсь, появляется въ 1843 г. въ журналѣ Ліувилля, гдѣ имъ публикована небольшая замѣтка, касающаяся кратныхъ интеграловъ. Два года спустя, П. Л. Чебышевъ издаетъ сочиненіе *Опытъ элементарнаго анализа теоріи вѣроятностей*, которое въ 1846 г. защищаетъ въ Московскомъ университетѣ въ качествѣ диссертаціи на степень магистра. Такимъ образомъ въ этотъ ранній періодъ вниманіе П. Л. Чебышева привлекаетъ теорія вѣроятностей, которая, не переставая интересовать его и впослѣдствіи, обязана ему весьма важными пріобрѣтеніями.

Вскорѣ по защитѣ магистерской диссертаціи, П. Л. Чебышевъ переселяется въ Петербургъ, будучи приглашенъ въ 1847 г. въ Петербургскій университетъ на каѳедру математики; и вслѣдъ за этимъ начинаютъ появляться важнѣйшія его изслѣдованія, и имя его быстро становится извѣстнымъ всему математическому міру.

Въ 1848 году онъ представляетъ С.-Петербургской Академіи весьма важный мемуаръ о числѣ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго предѣла, который четыре года спустя появляется въ журналѣ Ліувилля. Въ 1849 г. онъ издаетъ свою *Теорію сравненій*, которую защищаетъ въ С.-Петербургскомъ университетѣ въ качествѣ докторской диссертаціи. Это прекрасное сочиненіе, служившее потомъ руководствомъ для длиннаго ряда поколѣній учащейся молодежи, и до настоящаго времени остается лучшимъ по излагаемому въ немъ отдѣлу теоріи чиселъ. Въ 1850 г. П. Л. Чебышевъ представляетъ Академіи свой знаменитый *Mémoire sur les nombres premiers*. Въ этомъ мемуарѣ онъ разрѣшаетъ

*) Свѣдѣнія объ этихъ фактахъ взяты мною отчасти изъ указаній самого П. Л. Чебышева, предназначавшихся для 2-го изданія лексикона Погендорфа, отчасти изъ сочиненія проф. Григорьева *Импер. С.-Петерб. Университетъ въ теченіи первыхъ пятидесяти лѣтъ его существованія*. С.-Петерб. 1870.

рядъ важныхъ и весьма трудныхъ вопросовъ теоріи чиселъ. Онъ даетъ здѣсь способъ находить высшій и низшій предѣлы для суммы логариѳмовъ простыхъ чиселъ, лежащихъ между данными предѣлами, и дѣйствительно указываетъ подобные предѣлы, которыми пользуется, между прочимъ, для полученія нѣкоторыхъ выводовъ относительно числа простыхъ чиселъ, лежащихъ между данными предѣлами. Здѣсь же рѣшаетъ онъ вопросы о сходимости и приближенномъ вычисленіи рядовъ, члены которыхъ опредѣляются, какъ значенія данныхъ функцій, соотвѣтствующія значеніямъ независимаго перемѣннаго, взятымъ изъ ряда простыхъ чиселъ.

Уже и раньше обратившій на себя вниманіе П. Л. Чебышевъ своими изслѣдованіями по теоріи чиселъ создаетъ себѣ славу первокласснаго геометра, которая окончательно за нимъ упрочивается послѣ опубликованія ряда важныхъ мемуаровъ объ алгебраической и логариѳмической интегрируемости дифференціаловъ, содержащихъ ирраціональныя функціи.

Первый изъ мемуаровъ, относящихся къ этого рода вопросамъ, появился въ журналѣ Ліувилля въ 1853 г. и посвященъ вопросу объ опредѣленіи логариѳмической части интеграла:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$$

[гдѣ $f(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$ суть какія-либо цѣлыя раціональныя функціи и $m$ какое угодно цѣлое положительное число] въ томъ случаѣ, когда интегралъ этотъ выражается въ конечномъ видѣ. Но особенно важныя работы той-же категоріи относятся къ интегрированію дифференціаловъ эллиптическихъ и появляются нѣсколько позднѣе сначала въ изданіяхъ Академіи, затѣмъ въ журналѣ Ліувилля. Въ этихъ работахъ П. Л. Чебышевымъ сдѣланы весьма существенныя дополненія къ работамъ Абеля. Имъ здѣсь показано, что интегрированіе всякаго эллиптическаго дифференціала въ томъ случаѣ, когда оно возможно въ конечномъ видѣ, приводится къ интегрированію дифференціаловъ вида

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}},$$

для которыхъ возможность такого интегрированія (при надлежащемъ выборѣ постояннаго $A$) еще Абелемъ была поставлена въ зависимость отъ періодичности непрерывной дроби, въ которую разлагается радикалъ

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}.$$

Но этимъ П. Л. Чебышевъ не ограничился. Замѣчая, что въ случаѣ отрицательнаго отвѣта на вопросъ метода, основанная на одномъ только признакѣ періодичности названной сейчасъ дроби, не можетъ привести ни къ какому выводу, и желая пополнить этотъ пробѣлъ въ работахъ Абеля, онъ далъ новую методу, которая въ случаѣ, когда $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ суть вещественныя раціональныя числа, позволяетъ всегда рѣшить вопросъ въ томъ или другомъ смыслѣ при помощи конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій. Метода эта изложена въ мемуарѣ 1860 года, опубликованномъ въ третьемъ томѣ Bulletin de l'Académie de St.-Pétersbourg и перепечатанномъ впослѣдствіи въ журналѣ Ліувилля (1864).

Изъ дифференціаловъ неэллиптическихъ П. Л. Чебышевъ подробнѣе разсматриваетъ содержащіе кубическій корень. Вопросу объ интегрированіи такихъ дифференціаловъ посвящены нѣкоторые изъ позднѣйшихъ его мемуаровъ.

Одновременно съ только-что указанными начинаютъ появляться мемуары П. Л. Чебышева изъ другой области, въ которыхъ ставятся и рѣшаются совершенно особаго рода задачи, находящіяся въ связи съ вопросомъ о приближенномъ представленіи функцій. Здѣсь Чебышевъ является вполнѣ оригинальнымъ, ибо на этомъ пути почти не имѣлъ предшественниковъ.

Первый изъ этой серіи мемуаровъ былъ напечатанъ въ 1853 г. въ Mémoires des savants étrangers (tome VII) подъ заглавіемъ *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*. Мнѣ извѣстна только первая часть этого мемуара, и я не знаю, было ли когда нибудь публиковано его окончаніе. Эта первая часть только вступительная и содержитъ рѣшеніе одного аналитическаго вопроса, весьма важнаго для теоріи, которую П. Л. Чебышевъ предполагалъ развить далѣе. Вопросъ этотъ касается приближеннаго представленія данной функціи между двумя данными предѣлами подъ видомъ полинома данной степени при условіи, чтобы наибольшая въ этихъ предѣлахъ погрѣшность была возможно меньшею. Весьма замѣчательны результаты, къ которымъ приходитъ здѣсь П. Л. Чебышевъ; но еще болѣе замѣчательна метода, которою результаты эти достигаются. Метода эта, за исключеніемъ развѣ одного лежащаго въ ея основѣ предложенія, всецѣло принадлежитъ П. Л. Чебышеву, ибо до него для рѣшенія подобныхъ вопросовъ не существовало сколько нибудь общихъ способовъ, и кромѣ нѣкоторыхъ простѣйшихъ частныхъ случаевъ, разобранныхъ Понселе, онъ не могъ найти въ работахъ своихъ предшественниковъ примѣровъ рѣшенія такого рода вопросовъ.

Рѣшеніемъ только-что указанной аналитической задачи П. Л. Чебышевъ не ограничился. Вопросы о приближенномъ представленіи данной функціи въ томъ или иномъ видѣ при условіи, чтобы наибольшая погрѣшность между данными предѣлами независимаго перемѣннаго была

возможно меньшею, могутъ имѣть, очевидно, весьма разнообразныя и важныя приложенія. При томъ вопросы эти, требующіе особенныхъ пріемовъ рѣшенія, представляются съ аналитической стороны въ высшей степени интересными. Все это заставило П. Л. Чебышева предпринять въ томъ же направленіи болѣе общія изысканія, и вотъ въ 1857 году въ изданіяхъ Академіи появляется его замѣчательный мемуаръ *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions,* въ которомъ излагаются общія соображенія для рѣшенія вопросовъ разсматриваемаго рода. Такимъ-то образомъ положилъ П. Л. Чебышевъ основанія своей теоріи функцій „наименѣе уклоняющихся отъ нуля“.

Къ этой же категоріи мемуаровъ принадлежитъ и появившійся въ 1855 г. мемуаръ *О непрерывныхъ дробяхъ*, въ которомъ указываются важныя свойства этихъ дробей въ приложеніи къ вопросу о разложеніи функцій въ ряды и дается общая формула для интерполированія по способу наименьшихъ квадратовъ. Сюда же относятся и мемуары объ интерполированіи, изъ которыхъ первые два были публикованы въ 1859 г. и содержатъ: одинъ—особыя формулы для интерполированія въ случаѣ весьма большого числа данныхъ, доставляемыхъ набюденіями, другой—подробное изложеніе методы интерполированія, вытекающей изъ соображеній, указанныхъ въ мемуарѣ *О непрерывныхъ дробяхъ*.

Всѣ эти мемуары послужили точками отправленія для многочисленныхъ дальнѣйшихъ изслѣдованій П. Л. Чебышева, въ которыхъ изобрѣтенные имъ методы получили болѣе полное развитіе и нашли разнообразныя приложенія какъ къ вопросамъ о приближенномъ представленіи функцій, такъ и къ находящимся съ ними въ связи нѣкоторымъ вопросамъ кинематики механизмовъ, особенно привлекавшимъ вниманіе знаменитаго ученаго.

Я не буду перечислять здѣсь длиннаго ряда послѣдующихъ мемуаровъ П. Л. Чебышева. Но не могу не указать на нѣкоторые изъ нихъ, особенно важные по трактуемымъ въ нихъ вопросамъ или по ихъ методамъ.

Въ 1867 г. въ Запискахъ Академіи опубликованъ мемуаръ *О наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ суммъ, составленныхъ изъ значенія цѣлой функціи и ея производныхъ*, гдѣ излагаются основанія для рѣшенія того же рода вопросовъ о суммахъ, какіе по отношенію къ интегралмъ рѣшаются варіаціоннымъ исчисленіемъ.

Въ томъ-же году въ Математическомъ Сборникѣ, а затѣмъ и въ журналѣ Ліувилля появляется мемуаръ *О среднихъ величинахъ*, который содержитъ строгое элементарное доказательство одного важнаго предложенія теоріи вѣроятностей, заключающаго въ себѣ, какъ частный случай, такъ-называемый законъ весьма большихъ чиселъ. Небольшой этотъ мемуаръ замѣчателенъ въ особенности по той идеѣ, которая ле-

житъ въ основаніи доказательства, и которая привела потомъ П. Л. Чебышева къ постановкѣ важнаго аналитическаго вопроса.

Въ 1874 г. въ журналѣ Ліувилля публикуется мемуаръ *Sur les valeurs limites des intégrales*, въ которомъ ставится совершенно особаго рода вопросъ о maxima и minima, весьма замѣчательный во многихъ отношеніяхъ. Вопросъ этотъ, на который П. Л. Чебышевъ могъ быть наведенъ однимъ изслѣдованіемъ Bienaymé, но къ которому естественно приводили и многія изъ его собственныхъ изслѣдованій, состоитъ въ слѣдующемъ:

Найти предѣльныя величины, которыхъ можетъ достигать интегралъ

$$\int_a^b f(x)dx,$$

взятый въ данныхъ предѣлахъ $a<b$, когда даны величины интеграловъ

$$\int_A^B f(x)dx, \quad \int_A^B xf(x)dx, \quad \int_A^B x^2f(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_A^B x^mf(x)dx,$$

взятыхъ въ данныхъ-же, но болѣе широкихъ предѣлахъ

$$A<a, \quad B>b,$$

и функція $f(x)$ между $x=A$ и $x=B$ не дѣлается отрицательною.

Въ названномъ сейчасъ мемуарѣ П. Л. Чебышевъ указываетъ одно важное предложеніе, обнаруживающее связь этого вопроса съ вопросомъ о разложеніи въ непрерывную дробь интеграла

$$\int_A^B \frac{f(x)dx}{z-x},$$

и формулируетъ окончательный выводъ для одного интереснаго частнаго случая.

Этому вопросу относительно интеграловъ и подобнымъ же вопросамъ относительно суммъ посвящены и многіе изъ послѣдующихъ мемуаровъ П. Л. Чебышева, изъ которыхъ одинъ содержитъ приложеніе полученныхъ имъ выводовъ къ доказательству одной важной теоремы теоріи вѣроятностей. Того-же рода вопросу посвященъ и послѣдній мемуаръ П. Л. Чебышева *О суммахъ, зависящихъ отъ положительныхъ значеній какой-либо функціи*, представленный Академіи Наукъ 16 февраля прошлаго года и напечатанный только недавно, уже послѣ смерти автора.

Важность работъ П. Л. Чебышева по теоріи чиселъ и интегральному исчисленію опредѣляется какъ важностью трактуемыхъ въ нихъ

трудныхъ вопросовъ, такъ и методами, изобрѣтенными для ихъ рѣшенія. Въ этихъ работахъ П. Л. Чебышевъ былъ продолжателемъ великихъ своихъ предшественниковъ Эйлера, Лежандра, Абеля, которыми вопросы эти были поставлены. Но въ работахъ, относящихся къ приближенному представленію функцій и къ различнаго рода оригинальнымъ вопросамъ о maxima и minima, П. Л. Чебышевъ является изобрѣтателемъ методовъ для рѣшенія имъ самимъ выдвинутыхъ весьма важныхъ и трудныхъ вопросовъ. Въ этихъ работахъ онъ открываетъ рядъ совершенно новыхъ задачъ и указываетъ новые пути и новое направленіе въ наукѣ, и если вообще глубокія идеи его далеко еще не исчерпаны, то это въ особенности относится къ тѣмъ, которыя содержатся въ его трудахъ послѣдней категоріи.

Вопросы, которымъ посвящены указанныя выше важнѣйшія изслѣдованія П. Л. Чебышева, не были единственными, которые привлекали вниманіе великаго ученаго. Онъ интересовался весьма многими вопросами чистой и прикладной математики. Такъ, онъ занимался вопросами о построеніи географическихъ картъ, особаго рода вопросами о деформаціи поверхностей, многими вопросами практической механики. Теоретическая механика также привлекала его вниманіе, и мнѣ напр. извѣстно, что онъ занимался нѣкоторыми вопросами гидростатики. При одномъ изъ послѣднихъ моихъ свиданій съ нимъ, въ 1884 году онъ говорилъ, что, между прочимъ, занимался вопросомъ о кольцеобразной формѣ равновѣсія жидкой вращающейся массы, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. При этомъ, сколько мнѣ помнится, онъ высказывалъ намѣреніе опубликовать относящіяся къ этому вопросу изысканія. Но, вѣроятно, другія работы не позволили ему выполнить этого намѣренія, и остается надѣяться, что что-нибудь относящееся къ этимъ интереснымъ изысканіямъ найдется въ оставленныхъ имъ бумагахъ.

Ученыя заслуги П. Л. Чебышева давно уже признаны и высоко оцѣнены различными учеными учрежденіями и обществами, какъ русскими, такъ и иностранными. Не говоря уже о многочисленныхъ ученыхъ обществахъ, считавшихъ П. Л. Чебышева своимъ членомъ, упомяну лишь объ Академіяхъ Наукъ С.-Петербургской и Парижской. Избранный С.-Петербургской Академіей въ 1853 г. адъюнктомъ по каѳедрѣ прикладной математики, онъ съ 1859 года состоитъ въ ней ординарнымъ академикомъ. Въ 1860 г. онъ избирается членомъ корреспондентомъ Парижской Академіей, а въ 1874 г. вступаетъ въ нее въ качествѣ membre associé étranger. Послѣднее обстоятельство ясно показываетъ, какъ высоко оцѣнены были заслуги П. Л. Чебышева этимъ ученымъ учрежденіемъ, ибо избранія въ число membres associés étrangers удостоиваются лишь весьма немногіе изъ признанныхъ самыми выдающимися иностранныхъ ученыхъ.

Я говорилъ до сихъ поръ о П. Л. Чебышевѣ только какъ о математикѣ. Но имя его пользуется весьма почетною извѣстностью еще въ другой области—въ области изобрѣтеній по части механизмовъ. Съ юныхъ лѣтъ проявлялъ онъ особенную склонность къ такого рода изобрѣтеніямъ, и изобрѣтенія эти не переставали занимать его и въ теченіе всей жизни. Преимущественно они относились къ шарнирно-рычажнымъ механизмамъ, доставляющимъ преобразованіе круговаго движенія въ прямолинейное, и изобрѣтенные имъ механизмы этого рода уже нашли разнообразныя примѣненія на практикѣ. Параллелограммы П. Л. Чебышева не даютъ точнаго прямолинейнаго движенія; но вслѣдствіе незначительности уклоненій отъ послѣдняго, практически вполнѣ могутъ замѣнять „точные“ механизмы того же рода, передъ которыми имѣютъ преимущество бо́льшей простоты устройства.

Теорію своихъ механизмовъ П. Л. Чебышевъ изложилъ въ рядѣ мемуаровъ, особенно интересныхъ по той связи, которая раскрывается въ нихъ между его изобрѣтеніями этого рода и аналитическими изслѣдованіями, касающимися приближеннаго представленія функцій.

П. Л. Чебышеву принадлежитъ и много другихъ изобрѣтеній, изъ которыхъ въ особенности должно упомянуть о счетной машинѣ, изобрѣтенной около 1878 г., которая можетъ считаться наиболѣе совершенной изъ существующихъ машинъ этого рода. Модель этой машины хранится во Франціи въ Conservatoire des arts et métiers.

О своихъ изобрѣтеніяхъ П. Л. Чебышевъ много разъ дѣлалъ доклады, какъ въ Россіи, на съѣздахъ, такъ и заграницей, въ Парижѣ и въ Лондонѣ, и многія изъ его изобрѣтеній описаны имъ самимъ.

Геніальный ученый и изобрѣтатель, П. Л. Чебышевъ былъ въ то же время образцовымъ профессоромъ.

Его профессорская дѣятельность началась, какъ я уже упомянулъ выше, съ 1847 года и затѣмъ продолжалась непрерывно до 1882 года, когда П. Л. Чебышевъ оставилъ университетъ и исключительно предался своимъ ученымъ изысканіямъ, не прекращавшимся до послѣднихъ дней его жизни.

Въ различные періоды своей профессорской дѣятельности П. Л. Чебышевъ читалъ различные курсы. Въ то время, когда я былъ студентомъ, въ концѣ 70-хъ годовъ онъ читалъ теорію чиселъ, теорію опредѣленныхъ интеграловъ и исчисленіе конечныхъ разностей студентамъ III курса и теорію вѣроятностей студентамъ IV курса.

Курсы его не были обширными, и при изложеніи ихъ онъ заботился не столько о количествѣ сообщаемаго матерьяла, сколько о выясненіи принципіальныхъ сторонъ трактуемыхъ вопросовъ. Отличаясь живымъ и увлекательнымъ изложеніемъ, лекціи его сопровождались множествомъ интересныхъ замѣчаній относительно значенія и важности тѣхъ или

другихъ вопросовъ или научныхъ методовъ. Замѣчанія эти высказывались иногда мимоходомъ по поводу какого-нибудь конкретнаго случая, но всегда глубоко западали въ умахъ его слушателей. Вслѣдствіе этого лекціи его имѣли высокое развивающее значеніе, и слушатели его послѣ каждой лекціи выносили нѣчто существенно новое въ смыслѣ бо́льшей широты взглядовъ и новизны точекъ зрѣнія.

П. Л. Чебышевъ почти не пропускалъ лекцій. По крайней мѣрѣ за два года, въ теченіи которыхъ я былъ его слушателемъ, я не помню, чтобы хотя одинъ разъ его лекція не состоялась. Въ аудиторіи онъ появлялся всегда точно въ назначенное время и тотчасъ же, не теряя ни секунды, приступалъ къ продолженію выводовъ, начатыхъ въ предшествовавшую лекцію. Вычисленія онъ производилъ чрезвычайно быстро, вслѣдствіе чего, не смотря на то, что былъ прекраснымъ калькуляторомъ, часто дѣлалъ ошибки въ выкладкахъ, и за ходомъ вычисленій нужно было слѣдить очень внимательно, чтобы во́-время предупредить его о сдѣланной ошибкѣ, о чемъ онъ всегда просилъ своихъ слушателей. Когда наконецъ получался желаемый выводъ, П. Л. Чебышевъ садился, но не на каѳедру, а на кресло, ставившееся для него всегда у первой парты, и вотъ тутъ-то и начинались тѣ разнообразныя замѣчанія, которыя придавали особенный интересъ его лекціямъ, и которыхъ съ нетерпѣніемъ ждала вся аудиторія. Весьма часто по поводу только-что рѣшеннаго вопроса П. Л. Чебышевъ высказывалъ свои мнѣнія о тѣхъ или другихъ работахъ, относящихся къ тому-же вопросу. Иногда онъ вспоминалъ при этомъ нѣкоторые эпизоды изъ своихъ заграничныхъ поѣздокъ и разсказывалъ о бесѣдахъ по поводу того-же вопроса съ кѣмъ-либо изъ иностранныхъ ученыхъ. Послѣ болѣе или менѣе продолжительной бесѣды этого рода, служившей для него отдыхомъ, П. Л. Чебышевъ, быстрый какъ въ рѣчи, такъ и во всѣхъ своихъ дѣйствіяхъ, быстро вставалъ, бралъ за мѣлъ и приступалъ къ дальнѣйшимъ выводамъ. Къ характеристикѣ внѣшней стороны его лекцій должно прибавить, что онъ никогда не оставался въ аудиторіи по окончаніи времени, назначеннаго для лекціи, и бросалъ мѣлъ въ тотъ-же моментъ, какъ раздавался звонокъ, на какомъ-бы мѣстѣ при этомъ ни пришлось оборвать начатыя вычисленія.

Продолжительная профессорская дѣятельность П. Л. Чебышева, въ теченіи 35 лѣтъ принадлежавшая С.-Петербургскому университету, не могла не отразиться самымъ благотворнымъ образомъ на всемъ составѣ математическаго факультета, каѳедры котораго замѣщались наиболѣе талантливыми изъ его учениковъ. Отсюда понятно то высокое положеніе, котораго давно уже достигъ этотъ факультетъ въ С.-Петербургскомъ университетѣ.

Но какъ-бы ни было велико вліяніе П. Л. Чебышева на университетъ, главная заслуга его, какъ профессора, заключается въ созданіи

той школы математиковъ, которая извѣстна подъ его именемъ и характеризуется особымъ направленіемъ изслѣдованій.

Ученики П. Л. Чебышева продолжали и продолжаютъ разработку изобрѣтенныхъ имъ методовъ и при рѣшеніи поставленныхъ имъ задачъ выдвигаютъ новыя задачи того-же рода. Такимъ образомъ мало-по-малу создаются новые отдѣлы въ наукѣ, съ которыми навсегда будетъ связано имя П. Л. Чебышева. Вмѣстѣ съ тѣмъ работами его послѣдователей все болѣе и болѣе распространяются тѣ взгляды, которымъ великій ученый оставался вѣренъ во всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ.

Въ то время, какъ почитатели весьма отвлеченныхъ идей Римана все болѣе и болѣе углубляются въ функціонально-теоретическія изслѣдованія и въ псевдо-геометрическія изысканія въ пространствахъ четырехъ и бо̀льшаго числа измѣреній *), и въ этихъ изысканіяхъ заходятъ иногда такъ далеко, что теряется всякая возможность видѣть ихъ значеніе по отношенію къ какимъ-либо приложеніямъ не только въ настоящемъ, но и въ будущемъ,—П. Л. Чебышевъ и его послѣдователи остаются постоянно на реальной почвѣ, руководясь взглядомъ, что только тѣ изысканія имѣютъ цѣну, которыя вызываются приложеніями (научными или практическими), и только тѣ теоріи дѣйствительно полезны, которыя вытекаютъ изъ разсмотрѣнія частныхъ случаевъ.

Детальная разработка вопросовъ, особенно важныхъ съ точки зрѣнія приложеній и въ то же время представляющихъ особенныя теоретическія трудности, требующія изобрѣтенія новыхъ методовъ и восхожденія къ принципамъ науки, затѣмъ обобщеніе полученныхъ выводовъ и созданіе этимъ путемъ болѣе или менѣе общей теоріи—таково направленіе большинства работъ П. Л. Чебышева и ученыхъ, усвоившихъ его взгляды.

Насколько подобное направленіе можетъ быть плодотворно въ чисто научномъ отношеніи, это наглядно показываетъ вся ученая дѣятельность П. Л. Чебышева, который пришелъ къ постановкѣ и рѣшенію совершенно новыхъ и важныхъ вопросовъ анализа, исходя изъ задачъ прикладного характера, иногда при томъ чисто практическихъ.

Таковъ, впрочемъ, путь многихъ важныхъ открытій въ области математики.

Я закончу эту замѣтку пожеланіемъ, чтобы возможно скорѣе приступлено было къ изданію полнаго собранія сочиненій П. Л. Чебышева **),

---

*) Эти изысканія въ послѣднее время нерѣдко ставились въ связь съ глубокими геометрическими изслѣдованіями Н. И. Лобачевскаго, съ которыми, однако, они ничего не имѣютъ общаго. Великій геометръ, подобно П. Л. Чебышеву, оставался всегда на реальной почвѣ, и въ этихъ изысканіяхъ трансцендентальнаго характера едва-ли могъ увидѣть развитіе своихъ идей.

**) Весьма желательно, чтобы сочиненія эти были изданы на французскомъ языкѣ, какъ наиболѣе распространенномъ среди математиковъ.

изученіе которыхъ въ настоящее время весьма затрудняется тѣмъ, что они разсѣяны по различнымъ періодическимъ изданіямъ, иногда довольно рѣдкимъ. Между тѣмъ знакомство съ трудами П. Л. Чебышева можетъ быть необходимо въ различныхъ случаяхъ, а изученіе его трудовъ можетъ указать путь для многихъ новыхъ открытій, ибо идеи великаго ученаго могутъ оказаться въ высокой степени важными для рѣшенія многихъ трудныхъ вопросовъ, стоящихъ теперь на очереди.

# Списокъ сочиненій акад. П. Л. Чебышева *).

1. 1843.—Note sur une classe d'intégrales définies multiples.
   Journal de M. Liouville, t. VIII.

2. 1844.—Note sur la convergence de la série de Taylor.
   Crelle's Journal, B. 28.

3. 1844.—Опытъ элементарнаго анализа теоріи вѣроятностей.
   Отдѣльное изданіе. Москва, 1845.

   —La démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités (извлеченіе).
   Crelle's Journal, B. 33, 1846.

4. 1848.—Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.
   Mém. des savants étrangers, t. VI.
   Journal de M. Liouville, t. XVII, 1852.
   Прилож. III къ *Теоріи сравненій.*

5. 1849.—Теорія сравненій.
   Отдѣльное изданіе. С.-Петербургъ, 1849.
   2-е изданіе. С.-Петербургъ, 1879.

6. 1850.—Mémoire sur les nombres premiers.
   Mém. des savants étrangers, t. VII.
   Journal de M. Liouville, t. XVII, 1852.

7. 1851.—Sur les formes quadratiques.
   Journal de M. Liouville, t. XVI.

8. 1851.—Note sur différentes séries.
   Journal de M. Liouville, t. XVI.

*) Списокъ этотъ составленъ на основаніи академическаго, помѣщеннаго въ Извѣстіяхъ Академіи Наукъ за 1895 г. (томъ II, № 3), отъ котораго онъ отличается (не считая нѣкоторыхъ незначительныхъ измѣненій и дополненій) прибавленіемъ нѣсколькихъ извлеченій, сдѣланныхъ П. Л. Чебышевымъ изъ нѣкоторыхъ мемуаровъ, и включеніемъ №№: 41, 46 и 56.

**9.** 1853.—Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes (première partie).
Mém. des savants étrangers, t. VII.

**10.** 1853.—Sur l'intégration des différentielles irrationnelles.
Journal de M. Liouville, t. XVIII.

**11.** 1854.—Sur l'intégration des différentielles, qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré.
Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., VI série, t. VI, 1857.
Journal de M. Liouville, II série, t. II, 1857.

**12.** 1855.—О непрерывныхъ дробяхъ.
Ученыя записки Спб. Академіи, томъ III.
Journal de M. Liouville, II série, t. III, 1858.

—Sur une formule d'Analyse (предв. сообщеніе, 1854 г.).
Bulletin phys.-math. de l'Acad. de St.-Pétersb., t. XIII, № 14.
Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 2 et 3.

**13.** 1856.—Sur la construction des cartes géographiques.
Bulletin phys.-math. de l'Acad. de St.-Pétersb., t. XIV, № 17.
Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 5, 1857.

**14.** 1856.—Черченіе географическихъ картъ.
Сочиненіе, написанное для акта С.-Петербургскаго Университета 8-го февраля 1856 г.

**15.** 1857.—Sur la série de Lagrange.
Bulletin phys.-math. de l'Acad. de St.-Pétersb., t. XV, №№ 19 et 20.
Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 5.
Journal de M. Liouville, II série, t. II (безъ послѣдняго параграфа).

**16.** 1857.—Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.
Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., VI série, t. VII, 1858.

—Sur les questions de minima etc. (извлеченіе).
Bulletin phys.-math. de l'Acad. de St.-Pétersb., t. XVI, № 10.
Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 6.

**17.** 1858.—Sur une nouvelle série.
Bulletin phys.-math. de l'Acad. de St.-Pétersb., t. XVII, № 17.
Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 6, 1859.

*

**18.** 1858.—Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données, fournies par les observations.

Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., VII série, t. I, 1859.

—Sur l'interpolation des valeurs fournies par les observations (извлеченіе).

Bulletin phys.-math. de l'Acad. de St.-Pétersb., t. XVI, № 23.
Mélanges math. et astr., t. II, livrais. 6.

**19.** 1859.—Sur le développement des fonctions à une seule variable.

Bulletin de l'Acad. de St.-Pétersb., t. I.
Mélanges math. et astr., t. III, livrais. 2.

**20.** 1859.—Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés.

Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., VII série, t. I.

**21.** 1860.—Sur l'intégration de la différentielle

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}.$$

Bulletin de l'Acad. de St.-Pétersb., t. III.
Mélanges math. et astr., t. III, livrais. 3.
Journal de M. Liouville, II série, t. IX, 1864.

—Sur l'intégration des différentielles irrationnelles (извлеченіе).

Comptes rendus, t. LI.
Journal de M. Liouville, II série, t. IX.

**22.** 1861.—Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt.

Bulletin de l'Acad. de St.-Pétersb., t. IV.
Mélanges math. et astr., t. III, livrais. 4.

**23.** 1864.—Объ интерполированіи.

Прилож. къ IV т. Запис. Акад., № 5.

**24.** 1865.—Объ интегрированіи дифференціаловъ, содержащихъ кубическій корень.

Прилож. къ VII т. Запис. Акад., № 5.

**25.** 1865.—Sur les fractions continues algébriques (lettre adressée à M. Brachman).

Journal de M. Liouville, II série, t. X.

—Разложеніе функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей (письмо къ Брашману).

Математическій Сборникъ, т. I, 1866.

**26.** 1866.—О разложеніи функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.
Прилож. къ IX т. Запис. Акад., № 1.

**27.** 1866.—Объ одномъ ариѳметическомъ вопросѣ.
Прилож. къ X т. Запис. Акад., № 4.

**28.** 1866.—О среднихъ величинахъ.
Математическій Сборникъ, т. II, 1867.
Correspondance math., redigée par M. Catalan.
Journal de M. Liouville, II série, t. XII, 1867.

**29.** 1867.—О наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ суммъ, составленныхъ изъ значенія цѣлой функціи и ея производныхъ.
Прилож. къ XII т. Запис. Акад., № 3.
Journal de M. Liouville, II série, t. XIV, 1869.

**30.** 1867.—Объ интегрированіи простѣйшихъ дифференціаловъ, содержащихъ кубическій корень.
Математическій Сборникъ, т. II.

**31.** 1868.—Объ одномъ механизмѣ.
Записки Акад. Наукъ, т. XIV.

**32.** 1869.—О функціяхъ подобныхъ функціямъ Лежандра.
Записки Акад. Наукъ, т. XIV.

**33.** 1869.—Объ опредѣленіи функцій по значеніямъ, которыя онѣ имѣютъ при нѣкоторыхъ величинахъ перемѣнной.
Математическій Сборникъ, т. IV.

**34.** 1870.—О параллелограммахъ.
Труды 2-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей.

**35.** 1871.—О центробѣжномъ уравнителѣ.
Отчетъ Моск. Техн. Училища за 1871 г.

**36.** 1872.—О зубчатыхъ колесахъ.
Отчетъ Моск. Техн. Училища за 1872 г.

**37.** 1873.—Sur les quadratures.
Journal de M. Liouville, II série, t. XIX, 1874.
Les Mondes, par M. Moigno, t. XXX.

**38.** 1873.—Sur les valeurs limites des intégrales.
Journal de M. Liouville, II série, t. XIX.

**39.** 1873.—Sur la généralisation d'une formule de M. Catalan.
Corresp. math., red. p. M. Catalan, t. II.

**40.** 1873.—О функціяхъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля.
Прилож. къ XXII т. Запис. Акад., № 1.
Journal de M. Liouville, II série, t. XIX.

**41.** 1873.—Régulateur centrifuge *).
Les Mondes, par M. Moigno, t. XXXI.

**42.** 1875.—Объ интерполированіи величинъ равноотстоящихъ.
Прилож. къ XXV т. Запис. Акад., № 5.

**43.** 1875.—Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions.
Bulletin de la Société math. de la France, t. III.

**44.** 1877.—О приближенныхъ выраженіяхъ, линейныхъ относительно двухъ полиномовъ.
Прилож. къ XXX т. Запис. Акад., № 4.
Bulletin des sciences math. et astr., t. I.

**45.** 1878.—Sur les parallélogrammes les plus simples symetriques autour d'un axe.
Association française pour l'avancement des sciences.—Congrès de Paris.

**46.** 1878.—Sur la coupe des vêtements.
Ass. franç. p. l'avanc. des sciences.—Congrès de Paris.

**47.** 1878.—Sur une transformation des séries numériques.
Nouvelle corresp. math., redigée p. M. Catalan, t. IV.

**48.** 1878.—Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point.
Bulletin de la Société math. de la France, t. VI.

**49.** 1878.—О простѣйшихъ сочлененіяхъ.
Математическій Сборникъ, т. IX, 1879.

**50.** 1878.—О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ элементовъ и симметрическихъ около одной оси.
Прилож. къ XXXIV т. Запис. Акад., № 3, 1879.

---

*) Возможно, что этотъ мемуаръ есть только переводъ помѣщеннаго выше подъ № 35. Однако провѣрить этого я не могъ.—А. Л.

**51.** 1879.—О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ какихъ-либо элементовъ.
Прилож. къ XXXVI т. Запис. Акад., № 3, 1880.

**52.** 1880.—О функціяхъ, мало удаляющихся отъ нуля при нѣкоторыхъ величинахъ перемѣнной.
Прилож. къ XL т. Запис. Акад., № 3, 1881.

**53.** 1882.—О простѣйшихъ параллелограммахъ, доставляющихъ прямолинейное движеніе съ точностью до четвертой степени.
Записки Акад. Наукъ, т. XL.

**54.** 1882.—Une machine arithmétique à mouvement continu.
Revue scientifique, 2-e semèstre, № 13.

**55.** 1882.—Объ отношеніи двухъ интеграловъ, распространенныхъ на однѣ и тѣ-же величины перемѣнной.
Прилож. къ XLIV т. Запис. Акад., № 2, 1883.

**56.** 1883.—О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе, взятые въ тѣхъ-же предѣлахъ.
Сообщенія и протоколы засѣданій Матем. Общества при Харьковскомъ Университетѣ, 1882, II.—Харьковъ, 1883.

**57.** 1883.—Объ одномъ рядѣ, доставляющемъ предѣльныя величины интеграловъ при разложеніи подъинтегральной функціи на множители.
Прилож. къ XLVII т. Запис. Акад., № 4.

**58.** 1884.—Sur les fractions algébriques qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable comprise entre les limites données.
Bulletin de la Société math. de la France, t. XII.

**59.** 1884.—Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes, à l'aide de systèmes articulés.
Bulletin de la Société math. de la France, t. XII.

**60.** 1885.—О представленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ.
Прилож. къ LI т. Запис. Акад., № 4.
Acta mathematica, t. IX, 1886.

**61.** 1886.—Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs (lettre adressée à M^me^ Sophie Kowalevsky).
Acta mathematica, t. IX.

**62.** 1886.—Объ интегральныхъ вычетахъ, доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ.
Прилож. къ LV т. Запис. Акад., № 2, 1887.
Acta mathematica, t. XII, 1889.

**63.** 1887.—О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей.
Прилож. къ LV т. Запис. Акад., № 6.
Acta mathematica, t. XIV.

**64.** 1888.—О простѣйшей суставчатой системѣ, доставляющей движенія симметрическія около оси.
Прилож. къ LX т. Запис. Акад., № 1, 1889.

**65.** 1889.—О приближенныхъ выраженіяхъ квадратнаго корня перемѣнной черезъ простыя дроби.
Прилож. къ LXI т. Запис. Акад., № 1.
Acta mathematica, t. XVIII, 1894.

**66.** 1890.—О суммахъ, составленныхъ изъ значеній простѣйшихъ одночленовъ, умноженныхъ на функцію, которая остается положительною.
Прилож. къ LXIV т. Запис. Акад., № 7, 1891.

**67.** 1892.—О разложеніи въ непрерывную дробь рядовъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ перемѣнной.
Прилож. къ LXXI т. Запис. Акад., № 3.

**68.** 1892.—О полиномахъ, наилучше представляющихъ значенія простѣйшихъ дробныхъ функцій при величинахъ перемѣнной, заключающихся между двумя данными предѣлами.
Прилож. къ LXXII т. Запис. Акад., № 7, 1893.

**69.** 1894.—О суммахъ, зависящихъ отъ положительныхъ значеній какой-либо функціи.
Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., VIII série, t. I, 1895.

# ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

## ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

*9-го Октября 1892 года.*

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1891—92 академическій годъ.

2. Предсѣдатель доложилъ присланное на его имя письмо Маріи Іосифовны Имшенецкой, содержащее изъявленіе благодарности за выраженное ей Обществомъ соболѣзнованіе по поводу кончины ея супруга почетнаго члена Общества В. Г. Имшенецкаго.

3. Доложено присланное Обществу приглашеніе къ пожертвованію на сооруженіе памятника Гауссу и Веберу въ Геттингенѣ.

4. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета на предстоящій 1892—93 годъ. Избраны:

Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, профессоръ университета.

Товарищами предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ, проф. университета и В. Л. Кирпичевъ, директоръ технол. института.

Секретаремъ В. А. Стекловъ, приватъ-доцентъ университета.

5. К. А. Андреевъ изложилъ замѣтку акад. В. Г. Имшенецкаго о рѣшеніи уравненій четвертой степени, доставленную послѣ смерти автора.

6. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ елѣдующія сочиненія: Селивановъ, Д. Ѳ.—„Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій“.—Некрасовъ, П. А.—„Къ задачѣ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки“.—Марковъ, В.—„О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ“.—Lemoine, E.—1) „Sur une tronsformation relative à la géométrie du triangle“.—2) „Sur les triangles orthologiques et sur divers sujets de la géométrie du triangle“.—3) „Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle“.—4) „Ttois théorèmes sur la géométrie du triangle“.—5) „Etude snr une nouvelle transformation dite transformation continue“,—Marchand, J.—„Sur la rectification des arcs des courbes dites limaçons de Pascal“.

## *Засѣданіе 23-го Октября.*

1. Предсѣдатель прочиталъ приглашеніе къ чествованію Шарля Эрмита, присланное при письмѣ проф. Н. В. Бугаева отъ имени комитета Эрмита, учрежденнаго для организаціи юбилея по случаю предстоящаго 70-лѣтія знаменитаго геометра, и предложилъ принять участіе въ подпискѣ на изготовляющіяся въ его честь медали.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О новомъ видѣ твердаго тѣла, для котораго уравненіе движенія въ жидкости допускаетъ четвертый цѣлый однородный интегралъ второй степени".

3. М. А. Тихомандрицкій сообщилъ введеніе въ свое изложеніе теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

4. Въ этомъ засѣданіи получена въ даръ отъ автора книга Селиванова, Д. Ѳ.—„Изслѣдованіе уравненій 5-й степени".

## *Засѣданіе 6-го Ноября.*

1. Предсѣдатель доложилъ о полученномъ проектѣ устава русской ассоціаціи для обезпеченія и устройства естественно-научныхъ съѣздовъ, выработаннаго комитетомъ имѣющаго быть IX-го съѣзда.

2. Н. Н. Евдокимовъ сообщилъ о результатахъ опредѣленія географическихъ координатъ харьковской астрономической обсерваторіи.

3. М. А. Тихомандрицкій продолжалъ начатое въ предыдущемъ засѣданіи сообщеніе введенія въ теорію Абелевыхъ интеграловъ.

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: Щербаковъ, С. В.—1) „Очеркъ физической теоріи фильтраціи и практическія указанія для устройства простѣйшихъ водоочистителей".—2) „Нѣсколько замѣчаній по поводу предстоящаго 29—30 апрѣля частнаго затмѣнія луны".—3) „Предстоящее противостояніе Марса и Юпитера".—Piltschikoff, N.—„Sur la polarisation du ciel".

## *Засѣданіе 4-го Декабря.*

1. Избраны въ члены Общества: Николай Николаевичъ Евдокимовъ и Сергѣй Ѳедоровичъ Влезковъ.

2. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Изслѣдованіе одного изъ особенныхъ случаевъ задачи объ устойчивости движенія".

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ слѣдующія книги: отъ Русскаго Астрономическаго Общества 1-й выпускъ его „Извѣстій"; отъ авторовъ: Бобылевъ, Д. К.—1) „Руководство къ курсу введенія въ Теоретическую Механику; II, Кинетика".—2) „Краткій историческій очеркъ открытія основныхъ принциповъ и общихъ законовъ Теоретической Механики".—Альбицкій. В. И.—1) „Цилиндрическія зубчатыя колеса, ихъ теорія, разсчетъ и вычерчиваніе" (изд. 2-е).—2) „Болтово скрѣпле-

ніе, разсчетъ его и вычерчиваніе“ (изд. 2-е).—3) „Опредѣленіе чиселъ зубьевъ въ круглыхъ цилиндрическихъ зубчатыхъ колесахъ“.—Macfarlane, A.—1) „Principles of the Algebra of Physics“.—2) „On exact Analysis as the basis of language“.

### *Засѣданіе 18-го Декабря.*

1. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Теорія Абелевыхъ интеграловъ“.

2. В. А. Стекловъ сообщилъ одну задачу объ особаго рода наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

### *Засѣданіе 25-го Февраля 1893 г.*

1. Въ виду имѣющаго исполниться 22-го октября 1893 г. столѣтія со дня рожденія знаменитаго русскаго геометра проф. Н. И. Лобачевскаго и предстоящаго, по иниціативѣ Казанскаго Физико-Математическаго Общества, чествованія его памяти постановлено:

a) Ходатайствовать предъ г-мъ попечителемъ харьковскаго учебнаго округа о разрѣшеніи циркулярнаго извѣщенія отъ имени Общества учебныхъ заведеній округа о предстоящемъ научномъ юбилеѣ.

b) Устроить 22-го Октября публичное засѣданіе Общества и посвятить его воспоминанію заслугъ Н. И. Лобачевскаго.

2. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Способъ Гаусса для опредѣленія фокусныхъ разстояній объективовъ“.

3. М. А. Тихомандрицкій изложилъ часть своего труда: „Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ“.

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: Некрасовъ, П. А. и Жуковскій, Н. Е.—„О движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки“.—Голицынъ, кн. Б.—1) „Изслѣдованія по Математической Физикѣ“ ч. I и II.—2) „Объ абсолютныхъ размѣрахъ молекулъ“.—3) „Note relative à la température critique“.—4) „Ueber strahlende Energie“.—5) „Eine Methode zur Bestimmung der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe etc“.

### *Засѣданіе 5-го Марта.*

1. М. А. Тихомандрицкій продолжалъ начатое въ предыдущемъ засѣданіи изложеніе своего труда: „Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ“.

2. В. А. Стекловъ сообщилъ замѣтку: „О движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки“.

3. Получены въ даръ отъ проф. Г. В. Левицкаго „Записки Военно-Топографическаго отдѣла Главнаго Штаба“ т. XLIX и L.

## *Засѣданіе 19-го Марта.*

1. А. И. Богуславскій сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ: „Алгебра плоскости и пространства".

2. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ свойствахъ разностныхъ интегралoвъ и ихъ приложеніи".

3. Разсматривался и обсуждался вопросъ о возможности существованія четвертаго цѣлаго алгебраическаго интеграла четвертой степени уравненій движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки, отличнаго отъ интеграла С. В. Ковалевской.

4. Получено въ даръ отъ проф. Д. К. Бобылева его сочиненіе: „О шарѣ съ гироскопомъ внутри, катящемся по горизонтальной плоскости безъ скольженія".

## *Засѣданіе 10-го Мая.*

1. Предсѣдатель доложилъ письмо проф. А. Н. Коркина, содержащее его отзывъ о статьѣ В. А. Маркова: „О числѣ классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя", присланную для напечатанія въ „Сообщеніяхъ" Общества.—Постановлено вслѣдствіе отзыва проф. А. Н. Коркина статью напечатать.

2. Предсѣдатель доложилъ о поступившей отъ Императорской Публичной Библіотеки просьбѣ выслать недостающіе въ Библіотекѣ выпуски „Сообщеній Х. М. О.".—Постановлено выслать тѣ изъ требуемыхъ выпусковъ, которые окажутся имѣющимися въ библіотекѣ Общества.

3. Н. В. Бугаевъ сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ: „Опредѣленные числовые интегралы по дѣлителямъ".

4. А. М. Ляпуновъ сообщилъ Обществу, что имъ получено письмо академика А. А. Маркова, въ которомъ послѣдній проситъ его, Ляпунова, высказаться относительно одного пріема, употребляемаго Г. Г. Аппельротомъ въ статьѣ: *По поводу параграфа перваго мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe"*, и въ то же время заявляетъ, что выводы Г. Г. Аппельрота въ этой статьѣ онъ считаетъ недоказанными, ибо пріемомъ, которымъ они получены, по мнѣнію его, А. А. Маркова, нельзя пользоваться безъ надлежащей осмотрительности, а между тѣмъ въ статьѣ Г. Г. Аппельрота нѣтъ никакихъ попытокъ установить законность употребленія этого пріема въ приложеніи къ разсматриваемому имъ случаю.

Доложивши содержаніе этого письма, А. М. Ляпуновъ замѣтилъ, что, хотя раньше онъ и не имѣлъ въ виду высказываться такъ или иначе по поводу статьи Г. Г. Аппельрота, однако не видитъ сколько-нибудь серьезнаго основанія отказывать А. А. Маркову въ исполненіи его просьбы и, напротивъ, думаетъ, что безпристрастное обсужденіе въ засѣданіи ученаго общества вопроса, послужившаго предметомъ разногласія между

членами Московскаго Математическаго Общества и академикомъ А. А. Марковымъ, и оставшагося невыясненнымъ,—можетъ лишь принести пользу наукѣ. Вслѣдствіе этого, объяснивши, въ чемъ состоитъ вопросъ, которому посвящена статья Г. Г. Аппельрота, А. М. Ляпуновъ изложилъ сущность его пріема и вмѣстѣ съ тѣмъ указалъ одно обстоятельство, оставленное Г. Г. Аппельротомъ безъ вниманія. Настаивая на важности этого обстоятельства, А. М. Ляпуновъ показалъ затѣмъ на примѣрѣ, что пріемъ Г, Г. Аппельрота, если пренебречь этимъ обстоятельствомъ, можетъ приводить къ совершенно невѣрнымъ выводамъ. Въ заключеніе А. М. Ляпуновъ замѣтилъ, что хотя въ приложеніи къ вопросу, которымъ занимается Г. Г. Аппельротъ, законность его пріема и можетъ быть доказана, однако, вслѣдствіе отсутствія въ статьѣ Г. Г. Аппельрота не только этого доказательства, но и всякаго упоминанія объ указанномъ выше обстоятельствѣ, анализъ Г. Г. Аппельрота нельзя назвать удовлетворительнымъ, вслѣдствіе чего замѣчанія А. А. Маркова должно признать вполнѣ справедливыми. (См. приложеніе къ настоящему протоколу на стр. 292).

Затѣмъ А. М. Ляпуновъ прочиталъ присланныя А. А. Марковымъ для напечатанія въ „Сообщеніяхъ“ извлеченія изъ его писемъ къ проф. П. А. Некрасову, въ которыхъ А. А. Марковъ формулируетъ свои возраженія, касающіяся § 1 мемуара С. В. Ковалевской „*Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*“. При этомъ А. М. Ляпуновъ заявилъ, что, признавая эти возраженія вполнѣ основательными, онъ думаетъ, однако, что недоказанныя С. В. Ковалевской положенія, на которыхъ основывается ея анализъ, могутъ быть доказаны; но вмѣсто того, чтобы доказывать эти положенія, онъ счелъ болѣе цѣлесообразнымъ изслѣдовать вопросъ при помощи иной методы и въ результатѣ пришелъ къ полному доказательству теоремы С. В. Ковалевской. Изложивши сущность своего доказательства, А. М. Ляпуновъ заявилъ, что имѣетъ въ виду опубликовать его въ „Сообщеніяхъ“. (См. стр. 123—140 настоящ. тома Сообщ. Х. М. О.).

5. Возбужденъ вопросъ о печатаніи присланныхъ акад. А. А. Марковымъ извлеченій изъ его писемъ къ проф. П. А. Некрасову. Рѣшеніе этого вопроса постановлено предоставить распорядительному комитету Общества.

6. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ: 1) отъ проф. А. В. Васильева переводъ статей „Счетъ и измѣреніе“ Г. фонъ-Гельмюльца и „Понятіе о числѣ“ Л. Кенекера и 2) слѣдующія сочиненія отъ ихъ авторовъ: Сохоцкій, Ю. В.—„Начало общаго наибольшаго дѣлителя въ примѣненіи къ теоріи дѣлимости алгебраическихъ чиселъ“.—Богуславскій, А. И.—1) „Метрическія свойства инволюцій перваго класса высшихъ порядковъ и условіе существованія въ нихъ двойныхъ элементовъ“.—2) „Алгебра плоскости и пространства или исчисленіе по-

ложенія".—Lemoine, E.—1) „La géométrographie ou l'art des constructions géométriques".—2) „Résultats et théorèmes divers concernant la géométrie du triangle".—3) „Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius".

---

## ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

### *19-го Сентября 1893 г.*

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1892—93 академическій годъ.

2. Доложено состоявшееся 11-го Мая постановленіе распорядительнаго комитета о не печатаніи въ „Сообщеніяхъ" Общества присланныхъ акад. А. А. Марковымъ извлеченій изъ его писемъ къ проф. П. А. Некрасову. (См. приложеніе къ настоящему протоколу на стр. 298).

3. Избраны: 1) Николай Васильевичъ Бугаевъ въ почетные члены Общества, 2) Анатолій Ивановичъ Богуславскій въ члены корреспонденты.

4. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета на предстоящій 1893—94 годъ. Избраны:

Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, профессоръ университета.

Товарищами предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ, проф. универс. и В. Л. Кирпичевъ, директоръ технологическаго института.

Секретаремъ В. А. Стекловъ, праватъ-доцентъ университета.

### *Засѣданіе 10-го Октября.*

1. Доложено письмо проф. Шутте съ просьбою о доставленіи ему послѣднихъ выпусковъ „Сообщеній Х. М. О." для помѣщенія въ издаваемомъ имъ библіографическомъ журналѣ „Revue Séméstrielle" отчета о ихъ содержаніи. Постановлено просьбу проф. Шутте удовлетворить.

2. М. А. Тихомандрицкій доложилъ замѣтку П. Н. Рахманова „О высшихъ предѣлахъ корней алгебраическихъ уравненій".

3. І. І. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ результатахъ солнечныхъ наблюденій на харьковской астрономической обсерваторіи".

3. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О новомъ случаѣ интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла въ жидкости".

5. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: Сомовъ, П. О.—„О перемѣщеніяхъ неизмѣняемой поверхности, прикасающейся къ одной или къ нѣсколькимъ неподвижнымъ поверхностямъ".—Некрасовъ, П. А.—„Способъ В. Г. Имшенецкаго для

нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій".—Ляпуновъ, А. М.—„Изслѣдованіе одного изъ особенныхъ случаевъ задачи объ устойчивости движенія".—Sonin, N.—„Sur l'intégrale $\int_a^b F(x)\frac{dx}{z-x}$".—Tikhomandritzky, M.—„Esquisse l'une méthode pour déterminer le genre et les courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée au moyen des opérations rationnelles".

## *Публичное засѣданіе 22-го Октября*

**въ честь Н. И. Лобачевскаго.**

1. Открывая засѣданіе, предсѣдатель объяснилъ какъ поводы, по которымъ оно назначено, такъ и цѣль его, состоящую въ ознакомленіи присутствующихъ съ значеніемъ заслугъ знаменитаго русскаго геометра Н. И. Лобачевскаго.

2. Деканъ Физико-Математическаго Факультета А. С. Бріо въ краткой рѣчи привѣтствовалъ Математическое Общество и, выразивъ ему признательность за иниціативу чествованія въ Харьковѣ дорогого для русской науки ученаго имени, заявилъ отъ имени Факультета сочувствіе цѣлямъ Общества.

3. Отвѣчая на это привѣтствіе, предсѣдатель выставилъ на видъ стремленіе Харьковскаго Математическаго Общества къ посильному содѣйствію просвѣтительнымъ цѣлямъ Университета и выразилъ благодарность какъ Факультету, такъ и всему Университету въ лицѣ присутствующаго его ректора, за теплое сочувствіе и содѣйствіе начинаніямъ и дѣятельности Общества, неоднократно выражавшееся въ формѣ нравственной и матеріальной поддержки.

4. А. П. Грузинцевъ изложилъ біографію Н. И. Лобачевскаго, обративъ главнымъ образомъ вниманіе присутствующихъ на его дѣятельность какъ ректора и устроителя Казанскаго Университета.

5. К. А. Андреевъ представилъ характеристику научныхъ заслугъ Н. И. Лобачевскаго и, объяснивъ въ кратцѣ сущность геометрическихъ идей, впервые проведенныхъ этимъ ученымъ, указалъ на дальнѣйшее ихъ развитіе въ трудахъ знаменитыхъ ученыхъ западной Европы.

Въ заключеніе своей рѣчи К. А. Андреевъ сообщилъ, что по мысли Казанскаго Физико-Математическаго Общества предполагается собрать повсемѣстною подпискою капиталъ имени Н. И. Лобачевскаго для выдачи изъ процентовъ съ него преміи за ученыя сочиненія преимущественно по отдѣлу геометріи, и предложилъ присутствующимъ принять участіе въ подпискѣ, начатой гг. членами Мат. Общества.

## *Засѣданіе 26-го Ноября.*

1. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О двухъ замѣткахъ, найденныхъ въ бумагахъ покойнаго академика В. Г. Имшенецкаго и относящихся къ вопросу о разысканіи раціональныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій нелинейныхъ.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ возможныхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости".

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: Млодзѣевскій, Б. К. и Некрасовъ, П. А.—„Объ условіяхъ существованія ассимптотическихъ періодическихъ движеній въ задачѣ Гесса".—Износковъ, И. А.—„В. Г. Имшенецкій" (воспоминанія).—Марковъ, А. А.—„Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей".

## *Засѣданіе 17-го Декабря.*

1. Предсѣдатель доложилъ извлеченіе изъ письма акад. А. А. Маркова по поводу двухъ посмертныхъ замѣтокъ акад. В. Г. Имшенецкаго, напечатанныхъ въ „Сообщеніяхъ" Общества и относящихся къ вопросу о разысканіи раціональныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій.

2. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій".

3. Избраны въ члены Общества: Иванъ Алексѣевичъ Виноградовъ и Іосифъ Іосифовичъ Сикора.

4. По предложенію предсѣдателя постановлено принять участіе въ празднованіи 25-лѣтія существованія Московскаго Математическаго Общества чрезъ депутацію, составленную изъ трехъ членовъ распорядительнаго комитета, К. А. Андреева, А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова, поручивъ ей принести привѣтствіе Моск. Мат. Обществу въ день его торжественнаго собранія.

5. Получены въ даръ отъ авторовъ: 1) Голицынъ, кн. Б.—„Обзоръ Физики въ современномъ ея состояніи" (вступительная лекція) и 2) Galitzine, B.—„Ueber den Zustand der Materie in der Nähe des kritischen Punktes".

## *Засѣданіе 18-го Февраля 1894 г.*

1. Предсѣдатель доложилъ, что 9-го Января состоялось празднованіе 25-лѣтія существованія Московскаго Математическаго Общества, на которомъ отъ имени Харьковскаго Мат. Общества избранною имъ депутаціею было принесено привѣтствіе въ формѣ поздравительнаго адреса.

2. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О результатахъ наблюденій маятниками Реберъ-Пашвица".

3. І. І. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „О распредѣленіи солнечныхъ пятенъ и протуберанцевъ по широтѣ за послѣдній триместръ 1893 г.“.

4. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ свойствѣ алгебраическихъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій“.

5. Получено отъ автора: Peano, G.—„Notations de Logique Mathématique“.

### *Засѣданіе 6-го Апрѣля.*

1. Предсѣдатель доложилъ письмо президента Московскаго Математическаго Общества, содержащее выраженіе благодарности за участіе чрезъ посредство депутаціи отъ Харьк. Мат. Общества въ празднованіи его 25-лѣтія и за привѣтствіе, принесенное по этому случаю.

2. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи осмотическаго давленія“.

3. В. А. Стекловъ сообщилъ дополнительную замѣтку къ своему сочиненію: „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости“.

4. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Комментарій съ статьѣ акад. В. Г. Имшенецкаго, публикованной послѣ его смерти“.

5. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: Марковъ, А. А.—„О функціяхъ, получаемыхъ при обращеніи рядовъ въ непрерывныя дроби“.—Некрасовъ, П. А.—„Термодинамика и электричество, по поводу изслѣдованій кн. Б. Голицына по Математической Физикѣ“.—Macfarlane, A.—„On the definitions of the trigonometric functions“.

---

## ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

### *18-го Сентября 1894 г.*

1. Предсѣдатель напомнилъ собранію о тяжелой утратѣ, понесенной наукою въ лицѣ величайшаго изъ современныхъ естествоиспытателей Германа фонъ-Гельмгольца. Присутствующіе почтили память знаменитаго ученаго, вставши съ своихъ мѣстъ.

2. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества въ истекшемъ 1893—94 академическомъ году.

3. Предсѣдатель доложилъ, что получено предложеніе г. ректора университета выслать изданія Общества въ гор. Хабаровскъ для устраиваемой тамъ публичной библіотеки. Постановлено выслать въ г. Хабаровскъ по возможности всѣ изданія Общества и продолжать высылать ихъ впредь.

4. Предсѣдатель доложилъ о полученіи Обществомъ въ даръ отъ Казанскаго университета роскошно изданнаго этимъ университетомъ описанія празднествъ, происходившихъ въ Казани 22, 23 и 24-го Октября 1893 года въ честь Н. И. Лобачевскаго, и собраніе произнесенныхъ на

этихъ празднествахъ рѣчей. Постановлено выразить Казанскому университету чрезъ его ректора благодарность отъ имени Общества.

5. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета на предстоящій 1894—95 годъ. Избраны:

Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, проф. универс.

Товарищами предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ, проф. универс. и В. Л. Кирпичевъ, директоръ технол. института.

Секретаремъ В. А. Стекловъ, приватъ-доцентъ университета.

## *Засѣданіе 23-го Сентября.*

1. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣкоторые результаты наблюденій съ маятниками Реберъ-Пашвица".

2. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Гипотетическая среда Больцмана и теорія Герца".

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ: Жуковскій, Н. Е.—„О скольженіи ремня на шкивахъ".—Некрасовъ, П. А.—По поводу сообщенія К. А. Поссе относительно способа В. Г. Имшенецкаго".—Шиллеръ, Н. Н.—1) „О варіаціи выраженія электростатической энергіи и силахъ электрострикціи".—2) „Нѣсколько замѣчаній по поводу Изслѣдованій по Математической Физикѣ кн. Б. Голицына".—3) „О нѣкоторыхъ новѣйшихъ взглядахъ на методы рѣшенія вопросовъ Физики".—Arnoux, G.—Arithmétique graphique".—Lemoine, E.—1) „Notes de Géométrie".—2) „Compléments de Géométrographie".—3) „Application au tetraédre de la transformation continue".

## *Засѣданіе 4-го Ноября.*

1. К. А. Андреевъ доложилъ статью профессора П. А. Некрасова: „Нахожденіе алгебраическихъ раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій".

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О движеніи жидкости при эллипсоидальной формѣ ея свободной поверхности".

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ дополнительное замѣчаніе къ его статьѣ: „Къ теоріи осмотическаго давленія", указавъ главнымъ образомъ на то, что подъ $s$ слѣдуетъ понимать въ этой статьѣ удѣльный объемъ раствора, измѣненный сжатіемъ, т. е. ввести $s - \delta$ вмѣсто $s$, если $\delta$ означаетъ сжатіе, отнесенное къ единицѣ массы раствора.

4. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О разысканіи простѣйшихъ ирраціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій".

5. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: Гольдгаммеръ, Д. А.—1) „Памяти учителя (A. Kundt)".—2) „Къ теоріи размѣрности электрическихъ количествъ".—Piltschikoff, N.—„Nouvelle méthode pour étudier la convection électrique dans les gaz".

## *Засѣданіе 16-го Декабря.*

1. Предсѣдатель доложилъ о кончинѣ почетнаго члена Общества, знаменитаго русскаго ученаго, академика Пафнутія Львовича Чебышева, скончавшагося въ Петербургѣ 26-го Ноября, и предложилъ присутствующимъ почтить дорогую память усопшаго, вставши съ своихъ мѣстъ.

2. Прочитана нижеслѣдующая телеграмма, отправленная по полученіи извѣстія о смерти П. Л. Чебышева Императорской Академіи Наукъ отъ имени Общества за подписью предсѣдателя и нѣсколькихъ членовъ:

„Тяжелая утрата, понесенная русской наукой въ лицѣ незабвеннаго академика П. Л. Чебышева, повергла Харьковское Матем. Общество въ глубокую скорбь, выраженіе которой почтительнѣйше просимъ Императорскую Академію Наукъ принять отъ скромнаго Общества, имѣвшаго честь считать покойнаго ученаго своимъ почетнымъ членомъ. Андреевъ, Ляпуновъ, Тихомандрицкій, Кирпичевъ".

3. К. А. Андреевъ сдѣлалъ краткій очеркъ главныхъ моментовъ жизни и дѣятельности П. Л. Чебышева и представилъ вниманію присутствующихъ списокъ наиболѣе извѣстныхъ трудовъ его.

4. Постановлено просить М. А. Тихомандрицкаго пріобрѣсти для Общества въ предстоящую поѣздку въ Петербургъ возможно лучшій портретъ П. Л. Чебышева для помѣщенія въ ближайшемъ выпускѣ „Сообщеній".

5. І. І. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „О дѣятельности солнца въ 1894 г.".

6. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О сходимости періодическихъ рядовъ Hill'я въ теоріи луны".

7. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ дифференціальномъ уравненіи Математической Физики".

8. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ В. Л. Кирпичева два мемуара покойнаго акад. П. Л. Чебышева: 1) „Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes" (1853) и 2) „Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions" (1858) и отъ авторовъ: Сомовъ П. О.—„Объ одной кинематической цѣпи съ двумя степенями свободы".—Пильчиковъ, Н. Д.—„Основные принципы энергетики" (вступит. лекція).—Шиллеръ, Н. Н.—1) „Къ вопросу о термодинамическомъ потенціалѣ".—2) „О вліяніи внѣшняго давленія, приложеннаго къ поверхности раздѣла жидкости и ея пара, на упругость этого послѣдняго".

# ПРИЛОЖЕНІЕ

къ протоколу засѣданія Харьк. Мат. Общ. 10 Мая 1893 года.

---

## Нѣсколько словъ относительно статьи Г. Г. Аппельрота

### По поводу параграфа перваго мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe".

---

**А. М. Ляпунова.**

---

Въ означенной статьѣ Г. Г. Аппельротъ занимается, между прочимъ, вопросомъ о возможности удовлетворить дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma',\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + z_0\gamma - x_0\gamma'',\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + x_0\gamma' - y_0\gamma,\\ \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'',\\ \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma,\\ \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

при какихъ-либо предположеніяхъ относительно вещественныхъ постоянныхъ $A$, $B$, $C$, $x_0$, $y_0$, $z_0$, рядами вида

$$\left.\begin{aligned} p &= t^{-\mu}\sum_0^\infty p_n t^n, & \gamma &= t^{-2\mu}\sum_0^\infty f_n t^n,\\ q &= t^{-\mu}\sum_0^\infty q_n t^n, & \gamma' &= t^{-2\mu}\sum_0^\infty g_n t^n,\\ r &= t^{-\mu}\sum_0^\infty r_n t^n, & \gamma'' &= t^{-2\mu}\sum_0^\infty h_n t^n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ $\mu$ цѣлое положительное число, бо́льшее 1, а $p_n$, $q_n$, $r_n$, $f_n$, $g_n$, $h_n$ постоянныя, изъ которыхъ для $n=0$ по крайней мѣрѣ одно не нуль.

Для рѣшенія этого вопроса Г. Г. Аппельротъ пользуется особеннымъ пріемомъ, который можетъ быть полезенъ во многихъ подобныхъ случаяхъ, если имъ пользоваться съ надлежащей осторожностью. Но такъ какъ примѣненіе этого пріема требуетъ нѣкоторыхъ дополнительныхъ изслѣдованій, не находящихся въ статьѣ Г. Г. Аппельрота, то благодаря ему анализъ Г. Г. Аппельрота дѣлается мало доказательнымъ.

Чтобы объяснить, въ чемъ состоитъ этотъ пріемъ, допустимъ, что въ уравненія (1) (всѣ члены которыхъ предполагаются перенесенными въ первыя части равенства), равно какъ въ ихъ интегральныя уравненія

$$\left.\begin{aligned} Ap^2+Bq^2+Cr^2-2(x_0\gamma+y_0\gamma'+z_0\gamma'')+\text{const.}=0,\\ Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''+\text{const.}=0,\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2+\text{const.}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(разсмотрѣніе которыхъ одновременно съ уравненіями (1) въ извѣстномъ отношеніи представляетъ нѣкоторую выгоду) вмѣсто $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ подставлены ихъ выраженія (2) и результаты расположены по восходящимъ степенямъ $t$. Тогда каждое изъ этихъ уравненій приведетъ къ равенству вида

$$A_0t^{-m}+A_1t^{-m+1}+A_2t^{-m+2}+\ldots=0, \qquad (4)$$

гдѣ $m$ одно изъ чиселъ $2\mu$, $3\mu$ или $4\mu$, а $A_0$, $A_1$, $A_2$ и т. д. извѣстные полиномы, составленные изъ коэффиціентовъ $p_n$, $q_n$, $r_n$, $f_n$, $g_n$, $h_n$ такъ, что вообще для всякаго $s$ полиномъ $A_s$ зависитъ только отъ тѣхъ изъ этихъ коэффиціентовъ, для которыхъ

$$n\leqq s.$$

Каждое изъ равенствъ вида (4) дастъ для опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ группу слѣдующихъ уравненій:

$$A_0=0,\quad A_1=0,\quad \ldots,\quad A_{\mu-2}=0,\quad \ldots, \qquad (5)$$

изъ которыхъ первыя $\mu-1$ будутъ содержать только слѣдующіе коэффиціенты:

$$\left.\begin{aligned} &p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{\mu-2},\\ &q_0,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{\mu-2},\\ &r_0,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{\mu-2},\\ &f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{\mu-2},\\ &g_0,\ g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_{\mu-2},\\ &h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{\mu-2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Допустимъ теперь, что вмѣсто уравненій (1) и (3) разсматриваются слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{ll} (B-C)qr+y_0\gamma''-z_0\gamma'=0, & r\gamma'-q\gamma''=0, \\ (C-A)rp+z_0\gamma-x_0\gamma''=0, & p\gamma''-r\gamma=0, \\ (A-B)pq+x_0\gamma'-y_0\gamma=0, & q\gamma-p\gamma'=0, \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{c} Ap^2+Bq^2+Cr^2-2(x_0\gamma+y_0\gamma'+z_0\gamma'')=0, \\ Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=0, \\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=0, \end{array}\right\} \quad (8)$$

изъ которыхъ каждое можетъ быть поставлено въ соотвѣтствіе съ однимъ изъ уравненій (1) или (3), изъ котораго оно выводится выкидываніемъ члена съ производною или съ const.

Желая этимъ новымъ уравненіямъ удовлетворить рядами вида (2), и допуская, подобно предыдущему, что

$$B_0t^{-m}+B_1t^{-m+1}+B_2t^{-m+2}+\ldots=0$$

есть результатъ подстановки этихъ рядовъ въ какое-либо изъ новыхъ уравненій, изъ каждаго равенства такого вида получимъ группу уравненій

$$B_0=0, \quad B_1=0, \quad \ldots, \quad B_{\mu-2}=0, \quad \ldots, \quad (9)$$

и нетрудно видѣть, что первыя $\mu-1$ уравненій каждой такой группы будутъ тожественны съ первыми $\mu-1$ уравненіями соотвѣтственной изъ группъ (5).

Обращая вниманіе на это обстоятельство, Г. Г. Аппельротъ выражаетъ его нѣсколько неточно, говоря, что требованіе, чтобы ряды (2) удовлетворяли уравненіямъ (1) и (3), опредѣляетъ коэффиціенты (6) совершенно такъ же, какъ требованіе, чтобы ряды эти удовлетворяли уравненіямъ (7) и (8).

Но дѣло не въ этой неточности, а въ томъ, что одного этого замѣчанія Г. Г. Аппельротъ считаетъ достаточнымъ для возможности, при опредѣленіи коэффиціентовъ (6), уравненія (1) и (3) замѣнять уравненіями (7) и (8). Разсматривая затѣмъ эти послѣднія уравненія и опредѣляя удовлетворяющія имъ функціи $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ (при извѣстномъ предположеніи относительно $A$, $B$, $C$, $x_0$, $y_0$, $z_0$, необходимомъ для ихъ совмѣстности) подъ видомъ возможно болѣе общихъ рядовъ типа (2), онъ считаетъ себя въ правѣ первые $\mu-1$ членовъ каждаго изъ этихъ рядовъ принимать за общія выраженія первыхъ $\mu-1$ членовъ искомыхъ рядовъ, насколько члены эти опредѣляются системами первыхъ $\mu-1$ уравненій каждой изъ группъ вида (5).

Такимъ же пріемомъ замѣны однихъ уравненій другими не разъ пользуется Г. Г. Аппельротъ въ подобныхъ случаяхъ и въ другихъ мѣстахъ своей статьи, но въ пользу этого пріема нигдѣ не считаетъ нужнымъ приводить какія-либо соображенія.

Очевидно, такимъ пріемомъ можно пользоваться лишь въ томъ случаѣ, когда замѣна старыхъ уравненій новыми не вводитъ въ рѣшаемую задачу никакихъ новыхъ, чуждыхъ ей условій, и обстоятельство это настолько важно, что на него то именно и нужно было обратить все вниманіе.

Что пріемъ Г. Г. Аппельрота, если имъ пользоваться безъ надлежащихъ предварительныхъ изслѣдованій, какъ это дѣлаетъ въ своей статьѣ Г. Г. Аппельротъ, можетъ приводить къ совершенно невѣрнымъ выводамъ, въ этомъ нетрудно убѣдиться на примѣрахъ.

Допустимъ напр., что требуется рѣшить вопросъ о возможности рѣшеній съ полюсами третьяго порядка для слѣдующей системы дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(y+z) - x^2 - yz - \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+y+z), \\ \frac{dy}{dt} &= 2xy - x^2 - z^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y), \\ \frac{dz}{dt} &= 2xz - x^2 - y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+z). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для этого, перенося всѣ члены въ каждомъ изъ этихъ уравненій въ первую часть равенства, дѣлаемъ въ нихъ

$$\left.\begin{aligned} x &= t^{-3}(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots), \\ y &= t^{-3}(y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \dots), \\ z &= t^{-3}(z_0 + z_1 t + z_2 t^2 + \dots), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

разумѣя подъ $x_0, x_1, \dots, y_0, y_1, \dots, z_0, z_1, \dots$ постоянныя и предполагая, что по крайней мѣрѣ одно изъ постоянныхъ $x_0, y_0, z_0$ не нуль. Результатъ этой подстановки для каждаго изъ нашихъ уравненій представится подъ видомъ

$$A_0 t^{-6} + A_1 t^{-5} + \dots = 0,$$

и для опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ $x_n, y_n, z_n$ мы получимъ три группы уравненій вида

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad \dots, \tag{12}$$

гдѣ $A_0$, $A_1$ и т. д. будутъ извѣстными полиномами, составленными изъ этихъ коэффиціентовъ, при чемъ $A_s$ будетъ зависѣть только отъ тѣхъ изъ нихъ, для которыхъ $n \leqq s$. Первыя два уравненія каждой изъ группъ (12) будутъ поэтому содержать только шесть слѣдующихъ коэффиціентовъ:

$$x_0, \quad x_1, \quad y_0, \quad y_1, \quad z_0, \quad z_1. \tag{13}$$

Но нетрудно видѣть, что, если бы выраженія (11) мы подставили въ уравненія

$$\left.\begin{aligned} x^2 + yz - x(y+z) &= 0, \\ x^2 + z^2 - 2xy &= 0, \\ x^2 + y^2 - 2xz &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

то поступая подобно предыдущему, получили бы для опредѣленія неизвѣстныхъ $x_n$, $y_n$, $z_n$ три группы уравненій вида

$$B_0 = 0, \qquad B_1 = 0, \qquad \ldots,$$

изъ которыхъ въ каждой первыя два уравненія совпадали бы съ двумя первыми уравненіями въ одной изъ трехъ группъ (12).

Однако, если бы на этомъ основаніи, для опредѣленія неизвѣстныхъ (13), мы замѣнили уравненія (10) уравненіями (14), то пришли бы къ невѣрному выводу.

Дѣйствительно, уравненія (14) даютъ

$$x = y = z.$$

Поэтому, если мы допускаемъ, что они способны дать общія выраженія коэффиціентовъ (13) для рядовъ (11), удовлетворяющихъ уравненіямъ (10), то для этихъ рядовъ должны допустить равенства

$$x_0 = y_0 = z_0, \qquad x_1 = y_1 = z_1.$$

Но въ такомъ случаѣ, полагая

$$y = x + u, \qquad z = x + v,$$

мы должны допустить, что $u$ и $v$ суть функціи, для которыхъ $t = 0$ или точка обыкновенная, или полюсъ перваго порядка, что однако невозможно, ибо первое изъ уравненій (10), приводящееся къ виду

$$\frac{dx}{dt} = -uv - \frac{\sqrt{3}}{4}(4x + u + v),$$

заключало бы тогда въ первой части равенства функцію, для которой $t=0$ есть полюсъ 4-аго порядка, а во второй функцію, для которой та же точка есть полюсъ 3-яго порядка.

Наше допущеніе приводитъ такимъ образомъ къ выводу, что уравненія (10) не имѣютъ рѣшеній съ полюсами третьяго порядка. Между тѣмъ непосредственная подстановка убѣждаетъ, что уравненія эти допускаютъ рѣшеніе

$$x=\frac{1}{t^3}+\frac{\sqrt{3}}{2t^2}, \qquad y=z=\frac{1}{t^3}-\frac{\sqrt{3}}{2t^2}.$$

Возвращаясь къ вопросу, которымъ занимается Г. Г. Аппельротъ, прибавлю, что законность его пріема только тогда была бы вполнѣ оправдана, если бы онъ доказалъ, что изъ уравненій вида

$$B_s=0,$$

для которыхъ $s>\mu-2$, не можетъ быть выведено никакихъ соотношеній между коэффиціентами (6), не вытекающихъ изъ уравненій вида (5), и если бы подобное же было имъ доказано и для всѣхъ остальныхъ случаевъ замѣны однихъ уравненій другими.

# ПРИЛОЖЕНІЕ

къ протоколу засѣданія Харьк. Мат. Общ. 19 Сентября 1893 г.

---

## Протоколъ засѣданія распорядительнаго комитета Харьковскаго Математическаго Общества 11 Мая 1893 г.

---

Членъ корреспондентъ Харьк. Мат. Общества, проф. А. А. Марковъ обратился къ товарищу предсѣдателя Общества проф. А. М. Ляпунову съ письмомъ, въ которомъ обращаетъ вниманіе послѣдняго на содержаніе 1-го § мемуара С. В. Ковалевской „О движеніи твердаго тѣла около неподвижной точки“ и относящейся къ этому мемуару работы Г. Г. Аппельрота, и при этомъ выражаетъ свое желаніе, чтобы приложенныя къ письму извлеченія изъ писемъ его же, А. А. Маркова, къ проф. П. А. Некрасову были напечатаны въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общ.“.

Обсуждая вопросъ о печатаніи только что упомянутыхъ „извлеченій“, комитетъ принялъ въ соображеніе, что извлеченія эти суть тѣ самыя, отъ напечатанія которыхъ въ Сборникѣ Московскаго Мат. Общества А. А. Марковъ уже отказался, какъ видно изъ протоколовъ этого Общества. Имѣя это въ виду, также какъ и другія подробности упомянутыхъ протоколовъ, изъ которыхъ явствуетъ, что письма А. А. Маркова къ членамъ Моск. Мат. Общ. послужили поводомъ пререканій между нѣсколькими русскими учеными и создали нежелательныя непріязненныя отношенія между членами одного и того же Общества, комитетъ Харьк. Мат. Общ. въ видахъ огражденія послѣдняго отъ подобныхъ же послѣдствій не нашелъ удобнымъ напечатать присланныя проф. А. А. Марковымъ извлеченія изъ его писемъ къ проф. П. А. Некрасову, но призналъ возможнымъ дать мѣсто въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общ.“ возраженіямъ проф. А. А. Маркова на мемуаръ С. В. Ковалевской, если эти возраженія будутъ присланы авторомъ въ видѣ особой статьи или въ видѣ письма къ одному изъ Харьковскихъ членовъ Общества, тѣмъ болѣе, что вслѣдствіе доклада объ этихъ возраженіяхъ Обществу, сдѣланнаго проф. А. М. Ляпуновымъ въ засѣданіи 10 мая 1893 г., комитетъ призналъ эти возраженія основательными и заслуживающими совершенно объективнаго и безпристрастнаго сужденія ученыхъ.

---

# ОБЪЯВЛЕНІЯ.

---

## ОБЪ ИЗДАНІИ

### Трудовъ Отдѣленія физическихъ наукъ Императорскаго Общества любителей Естествознанія.

Труды Отдѣленія выходятъ томами по два выпуска въ каждомъ. Издаются подъ редакціей предсѣдателя и секретаря Отдѣленія. Получать можно въ книжномъ магазинѣ А. А. Ланга (Москва, Кузнецкій мостъ). Первый и второй томы (по одному выпуску) по два рубля; третій, четвертый, пятый и шестой томы (по два выпуска) по три рубля за томъ съ пересылкою.

---

Науково-Дослідний Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 565
Математики і механіки ХДУ

# ОБЪ ИЗДАНІИ
# УНИВЕРСИТЕТСКИХЪ ИЗВѢСТІЙ

**(Императорскаго Университета Св. Владиміра въ Кіевѣ)**

**въ 1895 г.**

Цѣль настоящаго изданія остается прежнею: доставлять членамъ университетскаго сословія свѣдѣнія, необходимыя имъ по отношеніямъ ихъ къ Университету, и знакомить публику съ состояніемъ и дѣятельностью Университета и различныхъ его частей.

Согласно съ этою цѣлью, въ **Университетскихъ Извѣстіяхъ** печатаются:

1. Протоколы засѣданій университетскаго Совѣта.
2. Новыя постановленія и распоряженія по Университету.
3. Свѣдѣнія о преподавателяхъ и учащихся, списки студентовъ и постороннихъ слушателей.
4. Обозрѣнія преподаванія по полугодіямъ.
5. Программы, конспекты и библіографическіе указатели для учащихся.
6. Библіографическіе указатели книгъ, поступающихъ въ университетскую библіотеку и въ студенческій ея отдѣлъ.
7. Свѣдѣнія и изслѣдованія, относящіяся къ устройству и состоянію ученой, учебной, административной и хозяйственной части Университета.
8. Свѣдѣнія о состояніи коллекцій, кабинетовъ, музеевъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ заведеній Университета.
9. Годичные отчеты по Университету.
10. Отчеты о путешествіяхъ преподавателей съ учеными цѣлями.
11. Разборы диссертацій, представляемыхъ для полученія ученыхъ степеней, соисканія наградъ, pro venia legendi и т. п., а также и самыя диссертаціи.
12. Рѣчи, произносимыя на годичномъ актѣ и въ другихъ торжественныхъ собраніяхъ.
13. Вступительныя, пробныя, публичныя лекціи и полные курсы преподавателей.
14. Ученые труды преподавателей и учащихся.
15. Матеріалы и переводы научныхъ сочиненій.

Указанныя статьи распредѣляются на двѣ части: 1) - оффиціальную и протоколы, отчеты и т. п. 2)—неоффиціальную (статьи научнаго содержанія) съ отдѣлами—*критико-библіографическимъ*, посвященнымъ критическому обозрѣнію выдающихся явленій ученой литературы (русской и иностранной), и *научной хроники*, заключающими въ себѣ извѣстія о дѣятельности ученыхъ обществъ, состоящихъ при Университетѣ, и т. п. свѣдѣнія. Въ *прибавленіяхъ* печатаются матеріалы, указатели библіотеки, списки, таблицы метеорологическихъ наблюденій и т. п.

---

**Университетскія Извѣстія** въ 1895 году будутъ выходить въ концѣ каждаго мѣсяца, книжками, содержащими въ себѣ до 20 печатныхъ листовъ. Цѣна за 12 книжекъ **Извѣстій** безъ пересылки **шесть рублей пятьдесятъ копѣекъ**, а съ пересылкой **семь рублей.** Въ случаѣ выхода приложеній (большихъ сочиненій), о нихъ будетъ объявлено особо. Подписчики **Извѣстій**, при выпискѣ приложеній, пользуются уступкою 20%.

Подписка и заявленія объ обмѣнѣ изданіями принимаются въ канцеляріи Правленія Университета.

Студенты Университета Св. Владиміра платятъ за годовое изданіе **Университетскихъ Извѣстій** 3 руб. сер., а студенты прочихъ Университетовъ—4 руб.; продажа отдѣльныхъ книжекъ не допускается.

Гг. Иногородніе могутъ обращаться съ требованіями своими къ коммиссіонеру Университета Н. Я. Оглобину въ С-Петербургѣ, на Малую Садовую, № 4-й и въ Кіевѣ, на Крещатикѣ, въ книжный магазинъ его же, или непосредственно въ Правленіе Университета Св. Владиміра.

Редакторъ *В. Иконниковъ.*

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

# „ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ“

и

# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

**Въ теченіе каждаго учебнаго полугодія (семестра) выходитъ 12 номеровъ, формата брошюръ, съ чертежами въ текстѣ.**

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:

Популярныя статьи изъ области физико-математическихъ наукъ. Педагогическія статьи, касающіяся преподаванія тѣхъ же наукъ. Научная хроника. Открытія и изобрѣтенія. Физическіе опыты и приборы. Математическія мелочи. Рецензіи новыхъ книгъ и учебниковъ. Полная русская физико-математическая библіографія. Отчеты о засѣданіяхъ физико-математическихъ обществъ. Разныя извѣстія. Задачи, предлагаемыя читателямъ для рѣшенія, и рѣшенія за подписью лицъ, приславшихъ таковыя. Задачи на премію. Задачи на испытаніяхъ зрѣлости въ гимназіяхъ и на окончательныхъ испытаніяхъ въ реальныхъ училищахъ. Упражненія для учениковъ. Открытые вопросы и отвѣты. Справочныя таблицы. Отвѣты редакціи. Объявленія.

**Журналъ былъ рекомендованъ Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, учительскихъ институтовъ и семинарій и городскихъ училищъ; Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній—для военно-учебныхъ заведеній. Ученымъ Комитетомъ при Святѣйшемъ Синодѣ журналъ былъ одобренъ для духовныхъ семинарій и училищъ.**

**Для поддержки изданія журнала, Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія были выданы 4 раза единовременныя субсидіи (въ 1888, 1890, 1892, 1893 гг.).**

Въ журналѣ сотрудничаютъ многіе профессора, преподаватели и любители физико-математическихъ наукъ.

**ПОДПИСНАЯ ЦѢНА СЪ ПЕРЕСЫЛКОЮ:**

На годъ всего 24 №№—6 руб. ✻ На полугодіе—всего 12 №№ 3 руб.

Книжнымъ магазинамъ 5% уступки.

**Менѣе чѣмъ на одно полугодіе подписка не принимается.**

Комплекты №№ за истекшія полугодія (отъ I до XV вкл.), сброшюрованные въ книги, продаются по **2** руб. **50** коп. каждый.

Всѣ учащіе и учащіеся, затрудняющіеся вносить полную подписную плату, могутъ при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторою редакціи подписываться на журналъ на льготныхъ условіяхъ, а именно:

На годъ . . . 4 руб. ✻ На полугодіе 2 рубля.

Льготная подписка черезъ посредство книжныхъ магазиновъ не принимается.

Редакторъ-издатель *Э. К. Шпачинскій.*

NB. При редакціи имѣется Книжный Складъ собственныхъ изданій и книгъ, сдаваемыхъ для коммисіонной продажи.

**Адресъ: г. Одесса, Редакція „ВѢСТНИКА ОП. ФИЗИКИ“.**

# ОСОБЫЯ ИЗДАНІЯ

## ХАРЬКОВСКАГО

## Математическаго Общества.

---

1. **Ляпуновъ, А.** — Общая задача объ устойчивости движенія, in $4^0$, XI + 250 стр., Харьковъ, 1892, ц. 3 руб.
2. **Тихомандрицкій, М.** — Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ, in $8^0$, XV + 235 стр., Харьковъ, 1895, ц. 4 руб.

Получить можно отъ секретаря Харьк. Мат. Общества и отъ авторовъ; Харьковъ. Университетъ.