Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome II, №№ 1 et 2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ II.

№№ 1 и 2.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.
1889.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome II.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ II.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.
1891.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества *К. Андреевъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

II-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Марта 1891 года.

A. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель, К. А. Андреевъ.
2. Товарищи предсѣдателя: В. Л. Кирпичевъ и М. А. Тихомандрицкій.
3. Секретарь, А. П. Грузинцевъ.

B. Почетные члены.

1. Имшенецкій Василій Григорьевичъ } академики.
2. Чебышевъ Пафнутій Львовичъ }

C. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, препод. Харьк. Реальн. уч.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. унив.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьк. унив.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, препод. Старобѣльск. гимн.
6. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
7. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
8. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Изюмск. Реальн. уч.
9. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доц. Харьк. унив.
10. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьк. унив.
11. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.
12. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Харьк. Техн. Инст.
13. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
14. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.
15. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьк. унив.
16. Косенко Михаилъ Семеновичъ, препод. Харьк. прогимн.
17. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
18. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
19. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Харьк. унив.

20. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. Харьк. Инст. благ. дѣвицъ.
21. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьк. унив.
22. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
23. Михаловскій Болеславъ Григорьевичъ, препод. Харьк. Реальн. уч.
24. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьк. унив.
25. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
26. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Харьк. унив.
27. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
28. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
29. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. Реальн. уч.
30. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьк. Учебн. окр.
31. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
32. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
33. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Харьк. Реальн. уч.
34. Синяковъ Германъ Афанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
35. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, приватъ-доц. Харьк. унив.
36. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
37. Фловицкій Николай Михайловичъ, лабор. Харьк. унив.
38. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Тамбовск. Реальн. уч.
39. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
40. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьк. унив.
41. Шиховъ Василій Васильевичъ, директ. Харьк. Реальн. уч.
42. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
43. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.

D. Члены-корреспонденты.

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. С.П.Б. унив.
2. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. Кіевск. унив.
3. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Моск. унив.
4. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. С.П.Б. унив.
5. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. С.П.Б. унив., академикъ.
6. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. С.П.Б. унив.
7. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. С.П.Б. унив.
8. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варш. унив.
9. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермск. гимн.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome II, №№ 1 et 2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ II.

№№ 1 и 2.

ХАРЬКОВЪ.

Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.

1889.

ОПЕЧАТКИ

въ статьѣ А. М. Ляпунова.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
25	10 сверху	$Y = Q(\vartheta) q^{\frac{\theta}{\Omega}}$,	$Y = Q(\vartheta) q^{\frac{\vartheta}{\Omega}}$,
65	5 —	$s = \sqrt{\alpha} g^{\frac{1}{3-N}} \zeta$.	$s = (\alpha g)^{\frac{1}{3-N}} \zeta$,
—	11 —	въ числѣ Лапласовыхъ	въ числѣ непостоянныхъ Лапласовыхъ
67	14 —	$= \underset{0}{3} \lambda$	$= 3 \lambda$

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества *К. Андреевъ*.

Объ устойчивости движенія въ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ.

А. М. Ляпунова.

Примѣры рѣшенія тѣхъ вопросовъ объ устойчивости движенія, въ которыхъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія въ первомъ приближеніи суть линейныя съ *перемѣнными* коэффиціентами, до настоящаго времени еще на столько немногочисленны, что всякій примѣръ этого рода, по моему мнѣнію, представляетъ нѣкоторый интересъ.

Предлагаемое изслѣдованіе представляетъ попытку рѣшенія такого вопроса для одного извѣстнаго частнаго случая задачи о трехъ тѣлахъ.

Еще Лапласомъ было замѣчено, что задача о трехъ тѣлахъ, при произвольномъ законѣ притяженія, допускаетъ частное рѣшеніе, въ которомъ притягивающіяся матерьяльныя точки всегда остаются въ вершинахъ равносторонняго треугольника, плоскость котораго сохраняетъ перпендикулярность къ неизмѣнному направленію въ пространствѣ.

Въ числѣ движеній этого рода находятся между прочимъ такія, въ которыхъ упомянутый треугольникъ остается неизмѣняемымъ. Эти движенія я называю *постоянными*.

Вопросъ объ устойчивости постоянныхъ движеній приводится (въ первомъ приближеніи) къ интегрированію системы линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами, и для притяженія, пропорціональнаго какой-либо степени разстоянія, былъ рѣшенъ Routh'омъ *). Предполагая возмущенія такими, вслѣдствіе которыхъ движеніе плоскости треугольника не нарушается, Routh пришелъ къ слѣдующему результату: Если притяженіе пропорціонально произведенію изъ массъ и обратно пропорціонально N-ой степени разстоянія, то при $N > 3$ движеніе

*) Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. VI. 1875. Менѣе подробное рѣшеніе той-же задачи можно найти въ сочиненіи Routh'a: „Dynamik of a system of rigid bodies". Part II. 1884.

всегда неустойчиво. Если-же $N < 3$, и M, m, m' суть массы трехъ матерьяльныхъ точекъ, то оно устойчиво, когда выполнено условіе

$$\frac{(M+m+m')^2}{Mm+Mm'+mm'} > 3\left(\frac{1+N}{3-N}\right)^2.$$

Изъ послѣдняго слѣдуетъ, что при $N < 1$ движеніе всегда устойчиво.

Здѣсь признакомъ устойчивости считается то обстоятельство, чтобы послѣ безконечно-малыхъ возмущеній стороны треугольника въ каждый моментъ послѣдующаго движенія безконечно-мало отличались отъ той неизмѣнной длины, которую онѣ сохраняли въ невозмущенномъ движеніи.

Если-же удержать, какъ признакъ устойчивости, только то требованіе, чтобы послѣ безконечно-малыхъ возмущеній треугольникъ во все время движенія безконечно-мало отличался отъ равносторонняго (т. е. чтобы углы его безконечно-мало отличались отъ $\frac{\pi}{3}$), то можетъ быть поставленъ вопросъ и объ устойчивости непостоянныхъ движеній разсматриваемаго рода.

Въ особенности интересно было-бы рѣшить этотъ вопросъ для *движеній періодическихъ*, т. е. тѣхъ, въ которыхъ стороны треугольника съ теченіемъ времени періодически измѣняются между извѣстными предѣлами.

Въ предлагаемомъ изслѣдованіи показывается, къ чему приводится рѣшеніе этого вопроса, если при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія ограничиться однимъ первымъ приближеніемъ. Такое ограниченіе, конечно, равносильно замѣнѣ разсматриваемой задачи нѣкоторою другою, простѣйшею.

Это изслѣдованіе состоитъ изъ трехъ главъ. Первая содержитъ выводъ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія и нѣкоторыя замѣчанія о ихъ интегрированіи. Во второй рѣшеніе вопроса объ устойчивости приводится къ опредѣленію двухъ постоянныхъ. Въ третьей излагаются два способа для приближеннаго вычисленія этихъ постоянныхъ; и здѣсь-же рѣшаются нѣкоторые вопросы объ устойчивости. Перечисленіе полученныхъ при этомъ результатовъ читатель найдетъ въ концѣ всего изслѣдованія.

Законъ притяженія я предполагаю произвольнымъ, подчиняя функцію разстоянія, которою выражается притяженіе, только нѣкоторымъ условіямъ общаго характера.

Также и возмущенія я оставляю совершенно произвольными. Изъ полученныхъ мною уравненій видно, что ограниченіе, которое дѣлаетъ въ этомъ отношеніи Routh, по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи, не имѣетъ существеннаго значенія.

I.

1. Точкою отправленія намъ будутъ служить дифференціальныя уравненія движенія задачи о трехъ тѣлахъ въ особой формѣ, подобной той, которою пользуется Routh.

Пусть M, m и m' суть наши матерьяльныя точки. Массы ихъ будемъ означать тѣми-же буквами.

Пусть r, r' и R суть разстоянія Mm, Mm' и mm', и ψ, φ, φ' — углы треугольника соотвѣтственно при точкахъ: M, m и m'.

Разсматриваемъ неизмѣняемую систему, опредѣляемую точкою M, направленіемъ Mm и плоскостью треугольника Mmm'. Угловую скорость этой системы опредѣляемъ ея проэкціями: ω_1 — на направленіе Mm, ω_2 — на направленіе перпендикуляра къ Mm въ плоскости Mmm', составляющее острый уголъ съ направленіемъ Mm', и ω_3 — на направленіе перпендикуляра къ плоскости Mmm'.

Величины r, r', ψ, ω_1, ω_2, ω_3 будутъ неизвѣстными функціями времени t въ разсматриваемой задачѣ, для которыхъ составлены ниже дифференціальныя уравненія. Первыя три изъ этихъ уравненій получаются изъ разсмотрѣнія относительнаго движенія точки m по отношенію къ только-что упомянутой неизмѣняемой системѣ, а послѣднія три — изъ разсмотрѣнія относительнаго движенія точки m' по отношенію къ неизмѣняемой системѣ, опредѣляемой точкою M, направленіемъ Mm' и плоскостью Mmm'.

Если взаимное притяженіе всякихъ двухъ массъ μ и μ', находящихся одна отъ другой въ разстояніи r, выражается формулой $\mu\mu' f(r)$, то уравненія эти будутъ слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2} - r(\omega_2^2 + \omega_3^2) + (M+m) f(r) + \\
&\qquad + m' f(r') \cos\psi + m' f(R) \cos\varphi = 0\,, \\
&\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega_3) + r\omega_1\omega_2 + m' f(r') \sin\psi - m' f(R) \sin\varphi = 0\,, \\
&\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega_2) - r\omega_1\omega_3 = 0\,, \\
&\frac{d^2r'}{dt^2} - r'(\omega_2'^2 + \omega_3'^2) + (M+m') f(r') + \\
&\qquad + m f(r) \cos\psi + m f(R) \cos\varphi' = 0\,, \\
&\frac{1}{r'}\frac{d}{dt}(r'^2\omega'_3) + r'\omega'_1\omega'_2 + m f(R) \sin\varphi' - m f(r) \sin\psi = 0\,, \\
&\frac{1}{r'}\frac{d}{dt}(r'^2\omega'_2) - r'\omega'_1\omega'_3 = 0\,,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

гдѣ

$$\omega'_1 = \omega_1 \cos\psi + \omega_2 \sin\psi\,,$$

$$\omega'_2 = -\,\omega_1 \sin\psi + \omega_2 \cos\psi\,,$$

$$\omega'_3 = \omega_3 + \frac{d\psi}{dt}\,,$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}\,,$$

$$\sin\varphi = \frac{r'}{R}\sin\psi\,, \qquad \sin\varphi' = \frac{r}{R}\sin\psi\,.$$

Этимъ уравненіямъ мы можемъ удовлетворить, полагая

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,\quad \psi = \frac{\pi}{3}\,,\quad r = r' = \varrho,\quad \omega_3 = \omega\,,$$

и подчиняя ϱ и ω уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dt^2} - \varrho\omega^2 + (M + m + m')\,f(\varrho) = 0\,,\\ \varrho^2\omega = C\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ C постоянная произвольная.

Получаемое такимъ образомъ движеніе будемъ называть *Лапласовымъ*.

Вмѣсто времени t примемъ за независимую перемѣнную полярный уголъ ϑ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\omega dt = C\frac{dt}{\varrho^2} = d\vartheta\,,$$

и положимъ

$$\frac{M + m + m'}{C^2} = g\,.$$

Тогда первое изъ уравненій (2) обратится въ слѣдующее

$$\frac{d^2\frac{1}{\varrho}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\varrho} - gf(\varrho)\varrho^2 = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

откуда найдемъ:

$$d\vartheta = \pm\frac{d\frac{1}{\varrho}}{\sqrt{h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g\int f(\varrho)\,d\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Здѣсь h постоянная произвольная.

Постоянныя g и h характеризуютъ Лапласово движеніе.

Предположимъ функцію $f(\varrho)$ и эти постоянныя такими, чтобы уравненіе

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g\int f(\varrho)\,d\varrho = 0\ ,$$

имѣло въ числѣ другихъ два *простыхъ* положительныхъ корня ϱ_0 и $\varrho_1 > \varrho_0$, и чтобы для $\varrho_0 < \varrho < \varrho_1$ постоянно было

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g\int f(\varrho)\,d\varrho > 0\ .$$

При этомъ, если начальное значеніе ϱ заключается между предѣлами ϱ_0 и ϱ_1, то получается періодическое движеніе разсматриваемаго рода, въ которомъ ϱ будетъ періодической функціей ϑ съ періодомъ:

$$\Omega = 2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{h\varrho^2 - 1 - 2g\varrho^2\int f(\varrho)\,d\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Въ постоянныхъ Лапласовыхъ движеніяхъ постоянныя величины ϱ и ω связаны уравненіемъ:

$$(M + m + m')\,f(\varrho) = \varrho\omega^2\ .$$

При томъ

$$g\varrho^3 f(\varrho) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Разсматривая одно изъ Лапласовыхъ движеній, какъ невозмущенное, выведемъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія, ограничиваясь первымъ приближеніемъ.

2. Полагаемъ:

$$r = \varrho(1 + \xi)\ , \qquad r' = \varrho(1 + \xi + x)\ ,$$

$$\psi = \frac{\pi}{3} + y\ , \qquad \omega_3 = \omega(1 + \eta),$$

и разсматриваемъ величины x, y, ξ, η, ω_1, ω_2 и ихъ производныя по t, какъ безконечно-малыя одного и того-же порядка.

При этомъ, удерживая въ разложеніяхъ только члены не выше перваго порядка, найдемъ:

$$R = \varrho\left(1 + \xi + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right),$$

$$\cos\psi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y,$$

$$\cos\varphi' = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y, \quad \sin\varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y,$$

$$\omega'_3 = \omega(1 + \eta) + \frac{dy}{dt},$$

$$\omega'_1 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2, \quad \omega'_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2.$$

Предполагая функцію $f(r)$ такою, чтобы функція $f(\varrho + \zeta)$ для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній ϱ и для достаточно малыхъ ζ была разложима въ абсолютно сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ζ, вносимъ эти величины въ уравненія (1) и удерживаемъ въ послѣднихъ только члены не выше перваго порядка. Тогда уравненія эти, послѣ сокращенія членовъ нулеваго порядка вслѣдствіе (2), примутъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2\varrho\xi}{dt^2} - \varrho\omega^2\xi - 2\varrho\omega^2\eta + (M + m + m')\varrho f'(\varrho)\xi -$$

$$- m'\left(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\right)\left(\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y\right) = 0, \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2\omega(2\xi + \eta) + m'\left(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y\right) = 0, \quad \ldots (8)$$

$$\frac{d^2\varrho(\xi + x)}{dt^2} - \varrho\omega^2(\xi + x + 2\eta) - 2\varrho\omega\frac{dy}{dt} +$$

$$+ (M + m + m')\varrho f'(\varrho)(\xi + x) + m\left(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y\right) = 0, \quad . (9)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2\left(2\omega(\xi + x) + \omega\eta + \frac{dy}{dt}\right) -$$

$$- m\left(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y\right) = 0, \quad \ldots\ldots (10)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}(\varrho^2\omega_2)-\varrho\omega\omega_1=0\,, \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \ (11)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2(\omega_2-\sqrt{3}\,\omega_1)-\varrho\omega(\sqrt{3}\,\omega_2+\omega_1)=0 \quad .\ .\ .\ . \ (12)$$

Въ этой системѣ уравненія (9), (10) и (12) вслѣдствіе (7), (8) и (11) приводятся къ болѣе простому виду:

$$\frac{d^2\varrho x}{dt^2}-\varrho\omega^2 x-2\varrho\omega\frac{dy}{dt}+(M+m+m')\varrho f'(\varrho)x+$$

$$+\Big(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\Big)\Big(\frac{3}{4}(m+m')x-\frac{\sqrt{3}}{4}(m-m')y\Big)=0\,, \quad .\ . \ (13)$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\varrho^2\Big(2\omega x+\frac{dy}{dt}\Big)-\Big(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\Big)\Big(\frac{\sqrt{3}}{4}(m-m')x+\frac{3}{4}(m+m')y\Big)=0\,,$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}(\varrho^2\omega_1)+\varrho\omega\omega_2=0\,.$$

Наконецъ, при помощи (2) можемъ привести уравненія (7) и (13) къ виду:

$$\frac{d^2\varrho\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\varrho}{dt^2}-2\varrho\omega^2\eta-(M+m+m')\Big(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\Big)\xi-$$

$$-m'\Big(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\Big)\Big(\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y\Big)=0\,,$$

$$\frac{d^2\varrho x}{dt^2}-x\frac{d^2\varrho}{dt^2}-2\varrho\omega\frac{dy}{dt}-(M+m+m')\Big(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\Big)x+$$

$$+\Big(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\Big)\Big(\frac{3}{4}(m+m')x-\frac{\sqrt{3}}{4}(m-m')y\Big)=0\,.$$

Принимаемъ за независимую перемѣнную во всѣхъ этихъ уравненіяхъ опредѣленный выше уголъ ϑ. Тогда замѣчая, что вообще

$$\frac{d^2\varrho\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\varrho}{dt^2}=\frac{C^2}{\varrho^3}\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}\,,$$

и полагая для сокращенія

$$\frac{M+m+m'}{C^2}=g\,,\quad g\varrho^3\Big(f(\varrho)-\varrho f'(\varrho)\Big)=u\,, \quad .\ .\ .\ . \ (14)$$

$$\frac{3}{4}\,\frac{m+m'}{M+m+m'}=\mu\,,\quad \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{m-m'}{M+m+m'}=\mu'\,,\quad \ldots (15)$$

получимъ окончательно слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{d\vartheta^2}-2\,\frac{dy}{d\vartheta}=u\Big((1-\mu)x+\mu' y\Big)\,,\\&\frac{d^2y}{d\vartheta^2}+2\,\frac{dx}{d\vartheta}=u\,(\mu' x+\mu y)\,,\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (16)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2}-2\eta-u\xi=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2}\,u\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,y+x\right),\\&\frac{d\eta}{d\vartheta}+2\,\frac{d\xi}{d\vartheta}=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2}\,u\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,x-y\right),\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (17)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varrho^2\omega_1}{d\vartheta}+\varrho^2\omega_2=0\,,\\&\frac{d\varrho^2\omega_2}{d\vartheta}-\varrho^2\omega_1=0\,.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

3. Изъ полученныхъ нами уравненій уравненія (18) тотчасъ-же интегрируются и даютъ:

$$\varrho^2\omega_1=A\sin\vartheta+B\cos\vartheta\,,$$

$$\varrho^2\omega_2=-A\cos\vartheta+B\sin\vartheta\,,$$

гдѣ A и B постоянныя произвольныя.

Отсюда видно, что ω_1 и ω_2 остаются всегда безконечно-малыми одного порядка съ своими начальными значеніями, если ϱ никогда не обращается въ нуль. Это послѣднее условіе мы будемъ всегда предполагать удовлетвореннымъ.

Затѣмъ легко показать, что если функціи x и y, удовлетворяющія уравненіямъ (16), найдены, то функціи ξ и η, удовлетворяющія уравненіямъ (17), найдутся при помощи квадратуръ и дифференцированій.

Для этого прежде всего замѣтимъ слѣдующее свойство уравненій (16):

Если за неизвѣстныя функціи вмѣсто x и y принять x_1 и y_1, связанныя съ первыми уравненіями

$$x+ay=x_1\,,\quad y-ax=y_1\,,$$

гдѣ a какая-либо постоянная, то для опредѣленія ихъ получатся уравненія прежняго типа:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{d\vartheta^2}-2\frac{dy_1}{d\vartheta}&=u\Big((1-\mu_1)x_1+\mu'_1y_1\Big),\\ \frac{d^2y_1}{d\vartheta^2}+2\frac{dx_1}{d\vartheta}&=u\Big(\mu'_1x_1+\mu_1y_1\Big),\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(19)$$

гдѣ

$$\mu_1=\frac{\mu-2\mu'a+(1-\mu)a^2}{1+a^2},$$

$$\mu'_1=\frac{\mu'+(2\mu-1)a-\mu'a^2}{1+a^2},$$

Опредѣлимъ a и новую постоянную b изъ условія

$$\mu'_1x_1+\mu_1y_1=b\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-y\right)\quad\ldots\ldots\ldots(20)$$

Послѣднее дастъ для нихъ уравненія

$$\mu_1+\mu'_1a=-b,\qquad \mu'_1-\mu_1a=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad\ldots\ldots\ldots(21)$$

вслѣдствіе которыхъ удовлетворится также условіе

$$-\mu_1x_1+\mu'_1y_1=b\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y+x\right)\quad\ldots\ldots\ldots(22)$$

При томъ величины a и b, слѣдующія изъ уравненій (21), будутъ:

$$a=\frac{\mu+\mu'\sqrt{3}}{\mu'+(1-\mu)\sqrt{3}},\qquad b=-\frac{\mu-\mu^2-\mu'^2}{\mu'+(1-\mu)\sqrt{3}}\sqrt{3}.$$

Но вслѣдствіе (19), (20) и (22) уравненія (17) могутъ быть представлены подъ видомъ:

$$\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2}-2\eta-u\xi=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2b}\left(\frac{d^2x_1}{d\vartheta^2}-2\frac{dy_1}{d\vartheta}-ux_1\right),$$

$$\frac{d\eta}{d\vartheta}+2\,\frac{d\xi}{d\vartheta}=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2b}\left(\frac{d^2y_1}{d\vartheta^2}+2\,\frac{dx_1}{d\vartheta}\right),$$

а отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2b}\,x_1+\Xi\,,\\ \eta&=\frac{\mu-\sqrt{3}\,\mu'}{2b}\,\frac{dy_1}{d\vartheta}+\Upsilon\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(23)$$

гдѣ Ξ и Υ общія величины, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\Xi}{d\vartheta^2}-2\Upsilon-u\Xi=0\,,\\ &\frac{d\Upsilon}{d\vartheta}+2\,\frac{d\Xi}{d\vartheta}=0\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(24)$$

Наконецъ, замѣчая, что этими послѣдними уравненіями опредѣляется переходъ отъ одного Лапласова движенія къ другому такому-же, въ которомъ постоянныя g и h безконечно-мало отличаются отъ своихъ значеній въ первомъ движеніи, находимъ общій интегралъ этихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\Xi&=\frac{1}{\varrho^3}\frac{d\varrho}{d\vartheta}\int\frac{C_2\varrho^6-C_1\varrho^4}{\left(\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta+\frac{C_3}{\varrho^3}\frac{d\varrho}{d\vartheta}\,,\\ \Upsilon&=-2\Xi+C_1\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(25)$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 постоянныя произвольныя *).

Такимъ образомъ, если x и y извѣстны, то ξ и η найдутся по формуламъ (25) и (23). Послѣднія, если въ нихъ подставить вмѣсто x_1, y_1, a, b ихъ значенія и затѣмъ μ и μ' замѣнить ихъ выраженіями (15), примутъ видъ:

---

*) Формулы эти легко провѣрить, замѣчая, что вслѣдствіе (3) выраженіе (14) приводится къ виду

$$u=4+\frac{\dfrac{d^3v}{d\vartheta^3}}{\dfrac{dv}{d\vartheta}}\,,$$

гдѣ $v=\dfrac{1}{\rho^2}$.

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{\left(M+\frac{m}{2}\right)m'x+\frac{\sqrt{3}}{2}mm'y}{Mm+Mm'+mm'}+\Xi\,,\\ \eta &= -\frac{\left(M+\frac{m}{2}\right)m'\frac{dy}{d\vartheta}-\frac{\sqrt{3}}{2}mm'\frac{dx}{d\vartheta}}{Mm+Mm'+mm'}+\Upsilon\,.\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (26)$$

При томъ, если мы положимъ здѣсь $\Xi=\Upsilon=0$, то это будетъ только равносильно предположенію, что вмѣсто прежняго Лапласова движенія берется для сравненія съ возмущеннымъ нѣкоторое новое такое-же, въ которомъ постоянныя g и h безконечно-мало отличаются отъ своихъ прежнихъ значеній.

Возвращаемся теперь къ уравненіямъ (16).

При помощи вышеприведенной подстановки преобразовываемъ ихъ къ виду (19). Затѣмъ можемъ воспользоваться неопредѣленностью параметра a для приведенія послѣднихъ уравненій къ возможно болѣе простому виду. Мы остановимся на такомъ выборѣ a, для котораго $\mu'_1=0$.

Такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$\mu' a^2-(2\mu-1)a-\mu'=0\,.$$

Называя соотвѣтствующую величину μ_1 черезъ λ, найдемъ для нея въ силу этого уравненія слѣдующее выраженіе:

$$\lambda=\mu-\mu' a\,.$$

Поэтому для опредѣленія λ получимъ уравненіе:

$$\lambda^2-\lambda+\mu-\mu^2-\mu'^2=0\,,$$

которое вслѣдствіе формулъ (15) приводится къ виду:

$$\lambda^2-\lambda+\frac{3}{4}\,\frac{Mm+Mm'+mm'}{(M+m+m')^2}=0\quad \ldots\ldots (27)$$

Если теперь назовемъ величины x_1 и y_1, соотвѣтствующія разсматриваемому опредѣленію a, черезъ X и Y, то будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \frac{\mu-\lambda}{\mu'} y\,, \\ Y &= y - \frac{\mu-\lambda}{\mu'} x\,, \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (28)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{d\vartheta^2} - 2\frac{dY}{d\vartheta} &= (1-\lambda)\,u\,X\,, \\ \frac{d^2Y}{d\vartheta^2} + 2\frac{dX}{d\vartheta} &= \lambda\,u\,Y\,. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (29)$$

Вопросъ приводится такимъ образомъ къ интегрированію уравненій (29).

Въ этихъ уравненіяхъ λ есть какой-либо изъ корней уравненія (27). Послѣдніе-же, какъ нетрудно убѣдиться, всегда вещественны и заключаются: одинъ — между 0 и $\frac{1}{2}$, другой — между $\frac{1}{2}$ и 1. При томъ, этихъ предѣловъ они могутъ достигать только въ двухъ случаяхъ: когда масса одной изъ точекъ безконечно-велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ, или когда массы всѣхъ трехъ точекъ равны между собою. Въ первомъ случаѣ корни уравненія (27) суть 0 и 1; во второмъ оба корня равны $\frac{1}{2}$.

4. Проинтегрировать уравненія (29), не дѣлая никакихъ частныхъ предположеній относительно функціи u и постоянной λ, едва-ли возможно.

Мы обратимъ вниманіе только на слѣдующую теорему: **если найдены двѣ системы частныхъ рѣшеній уравненій (29), удовлетворяющія нѣкоторому условію, то окончательное интегрированіе ихъ приводится къ квадратурамъ.**

Пусть X_i, Y_i и X_j, Y_j суть двѣ какія-либо системы частныхъ рѣшеній. Будемъ имѣть:

$$X_i\frac{d^2X_j}{d\vartheta^2} - X_j\frac{d^2X_i}{d\vartheta^2} - 2X_i\frac{dY_j}{d\vartheta} + 2X_j\frac{dY_i}{d\vartheta} = 0\,,$$

$$Y_i\frac{d^2Y_j}{d\vartheta^2} - Y_j\frac{d^2Y_i}{d\vartheta^2} + 2Y_i\frac{dX_j}{d\vartheta} - 2Y_j\frac{dX_i}{d\vartheta} = 0\,.$$

Складывая почленно эти уравненія и затѣмъ интегрируя, находимъ:

$$X_i\frac{dX_j}{d\vartheta} - X_j\frac{dX_i}{d\vartheta} + Y_i\frac{dY_j}{d\vartheta} - Y_j\frac{dY_i}{d\vartheta} + 2(Y_iX_j - Y_jX_i) = \text{const}\,.$$

Такимъ условіемъ связаны всякія двѣ системы рѣшеній уравненій (29).

Означая первую часть этого условія черезъ (X_i, X_j), покажемъ, что всегда можно найти такія двѣ различныя системы частныхъ рѣшеній X_i, Y_i и X_j, Y_j, для которыхъ $(X_i, X_j) = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, если (X_i, X_j) не равно нулю, пусть X_l, Y_l новая система частныхъ рѣшеній, отличная отъ двухъ предыдущихъ, такъ-что между X_i, X_j и X_l не существуетъ зависимости вида

$$C_i X_i + C_j X_j + C_l X_l = 0 \,,$$

гдѣ C_i, C_j и C_l постоянныя. Система частныхъ рѣшеній

$$X = aX_j + X_l \,,$$

$$Y = aY_j + Y_l \,,$$

гдѣ a какая-либо постоянная, также будетъ отличною отъ системъ X_i, Y_i и X_j, Y_j. При томъ найдемъ

$$(X_i, X) = a(X_i, X_j) + (X_i, X_l) \,,$$

и если припишемъ a значеніе

$$a = -\frac{(X_i, X_l)}{(X_i, X_j)} \,,$$

то будемъ имѣть

$$(X_i, X) = 0 \,.$$

Пусть найдены двѣ различныя системы частныхъ рѣшеній X_1, Y_1 и X_2, Y_2, удовлетворяющія условію

$$(X_1, X_2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Покажемъ, что окончательное интегрированіе уравненій (29) приводится къ квадратурамъ.

Пусть X и Y какія-либо функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (29). Будемъ имѣть:

$$(X_1, X) = C_1 \,, \quad (X_2, X) = C_2 \,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

гдѣ C_1 и C_2 постоянныя. Легко также убѣдиться, что всякія функціи X и Y, удовлетворяющія уравненіямъ (31) при *произвольныхъ* постоянныхъ C_1 и C_2, удовлетворятъ также уравненіямъ (29).

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцированіемъ уравненій (31) находимъ:

$$X_1\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}\right)-X\left(\frac{d^2X_1}{d\vartheta^2}-2\frac{dY_1}{d\vartheta}\right)+$$

$$+Y_1\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}\right)-Y\left(\frac{d^2Y_1}{d\vartheta^2}+2\frac{dX_1}{d\vartheta}\right)=0\,,$$

$$X_2\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}\right)-X\left(\frac{d^2X_2}{d\vartheta^2}-2\frac{dY_2}{d\vartheta}\right)+$$

$$+Y_2\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}\right)-Y\left(\frac{d^2Y_2}{d\vartheta^2}+2\frac{dX_2}{d\vartheta}\right)=0\,,$$

или

$$X_1\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}-(1-\lambda)uX\right)+Y_1\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}-\lambda uY\right)=0\,,$$

$$X_2\left(\frac{d^2X}{d\vartheta^2}-2\frac{dY}{d\vartheta}-(1-\lambda)uX\right)+Y_2\left(\frac{d^2Y}{d\vartheta^2}+2\frac{dX}{d\vartheta}-\lambda uY\right)=0\,,$$

откуда вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія о различности системъ X_1, Y_1 и X_2, Y_2, которое равносильно предположенію, что $X_1Y_2-X_2Y_1$ не равно нулю, получаемъ уравненія (29).

Такимъ образомъ общій интегралъ уравненій (31) при произвольности постоянныхъ C_1 и C_2 дастъ общій интегралъ уравненій (29).

Положимъ

$$X=P_1X_1+P_2X_2\,,\qquad Y=P_1Y_1+P_2Y_2\,.$$

Тогда вслѣдствіе (30) уравненія (31) примутъ видъ:

$$(X_1{}^2+Y_1{}^2)\frac{dP_1}{d\vartheta}+(X_1X_2+Y_1Y_2)\frac{dP_2}{d\vartheta}=C_1\,,$$

$$(X_1X_2+Y_1Y_2)\frac{dP_1}{d\vartheta}+(X_2{}^2+Y_2{}^2)\frac{dP_2}{d\vartheta}=C_2\,,$$

а отсюда, полагая для сокращенія

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = Z,$$

найдемъ:

$$P_1 = C_1 \int \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta - C_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta + \text{const.},$$

$$P_2 = -C_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta + C_2 \int \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta + \text{const}.$$

Такимъ образомъ, если

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= X_1 \int \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta - X_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ Y_3 &= Y_1 \int \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2} d\vartheta - Y_2 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ X_4 &= X_2 \int \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta - X_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \\ Y_4 &= Y_2 \int \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2} d\vartheta - Y_1 \int \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2} d\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32)$$

мы получаемъ двѣ новыя системы частныхъ рѣшеній X_3, Y_3 и X_4, Y_4, которыя вмѣстѣ съ прежними X_1, Y_1 и X_2, Y_2 даютъ возможность составить общій интегралъ уравненій (29).

Замѣтимъ еще, что въ томъ случаѣ, когда массы всѣхъ трехъ точекъ равны между собою, интегрированіе уравненій (29) приводится къ интегрированію нѣкотораго линейнаго уравненія второго порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $\lambda = \frac{1}{2}$, а при этомъ уравненіямъ (29) удовлетворимъ, полагая

$$\left.\begin{aligned} X &= S_1 \cos\vartheta + S_2 \sin\vartheta, \\ Y &= -S_1 \sin\vartheta + S_2 \cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

гдѣ S_1 и S_2 суть какія-либо рѣшенія уравненія:

$$\frac{d^2 S}{d\vartheta^2} = \left(\frac{u}{2} - 1\right) S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

При томъ, найдя общій интегралъ этого послѣдняго уравненія, получимъ общій интегралъ уравненій (29) по формуламъ (33), если для S_1 и S_2 возьмемъ двѣ различныя линейныя комбинаціи частныхъ рѣшеній уравненія (34) съ произвольными постоянными коэффиціентами.

Изъ случаевъ, когда уравненіе (34) при непостоянномъ u интегрируется въ квадратурахъ, укажемъ на одинъ: $f(r)=\frac{\alpha}{r}$, гдѣ α нѣкоторая постоянная. Въ этомъ случаѣ по формулѣ (14) находимъ:

$$u=2g\alpha\varrho^2,$$

а потому уравненіе (3), которому удовлетворяетъ ϱ, приводится къ

$$\frac{d^2\frac{1}{\sqrt{u}}}{d\vartheta^2}+\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{\sqrt{u}}{2}=0,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $\frac{1}{\sqrt{u}}$ есть одно изъ частныхъ рѣшеній уравненія (34). Поэтому общій интегралъ его имѣетъ видъ:

$$S=\frac{C_1}{\sqrt{u}}+\frac{C_2}{\sqrt{u}}\int u\,d\vartheta\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

гдѣ C_1 и C_2 постоянныя произвольныя.

Наконецъ замѣтимъ, что когда $\lambda=0$ или $\lambda=1$, уравненія (29) приводятся къ (24) и, слѣдовательно, интегрируются въ квадратурахъ. Но въ этомъ случаѣ масса одной изъ точекъ безконечно-велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ, и потому задача о трехъ тѣлахъ распадается на двѣ задачи о двухъ тѣлахъ.

II.

5. Переходя теперь къ изслѣдованію устойчивости, разсмотримъ сначала случай, когда u есть постоянная величина.

Въ этомъ случаѣ интегрированіе уравненій (29) вообще даетъ:

$$X=A_1\cos(k_1\vartheta+\alpha_1)+A_2\cos(k_2\vartheta+\alpha_2)\,,$$

$$Y=-\frac{k_1{}^2+(1-\lambda)u}{2k_1}A_1\sin(k_1\vartheta+\alpha_1)-\frac{k_2{}^2+(1-\lambda)u}{2k_2}A_2\sin(k_2\vartheta+\alpha_2)\,,$$

гдѣ A_1, A_2, α_1, α_2 суть произвольныя постоянныя, а $k_1{}^2$ и $k_2{}^2$ корни квадратнаго относительно k^2 уравненія:

$$k^4-(4-u)k^2+\lambda(1-\lambda)u^2=0\quad\ldots\ldots\ldots(36)$$

Кромѣ того, непосредственное интегрированіе уравненій (24) даетъ:

$$\Xi = C_1 + C_2 \cos\left(\sqrt{4-u}\,\vartheta + \gamma\right),$$

$$\Upsilon = -2\Xi + \frac{4-u}{2} C_1,$$

гдѣ C_1, C_2 и γ произвольныя постоянныя.

Изъ этихъ послѣднихъ выраженій видно, что для устойчивости необходимо условіе

$$4 - u > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Изъ выраженій-же для X и Y видно, что для этого еще необходимо, чтобы обѣ величины k^2, удовлетворяющія уравненію (36), были вещественными, положительными и различными. Выражая это обстоятельство, получаемъ, кромѣ условія (37), еще слѣдующее:

$$\left(\frac{4-u}{u}\right)^2 - 4\lambda(1-\lambda) > 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

при добавочномъ условіи, что $\lambda(1-\lambda)u^2$ не есть нуль.

Величина u можетъ быть постоянною въ двухъ случаяхъ: во первыхъ—для всякой функціи $f(r)$, если разсматриваемое Лапласово движеніе есть постоянное; во вторыхъ—для всякаго Лапласова движенія, но при нѣкоторомъ опредѣленномъ типѣ функціи $f(r)$.

Въ первомъ случаѣ ϱ есть постоянная величина, и формулы (14) и (6) даютъ:

$$u = 1 - \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)},$$

а потому условія (37) и (38), если еще примемъ въ разсчетъ уравненіе (27), приводятся къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned} & 3 + \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)} > 0, \\ & \frac{(M+m+m')^2}{Mm + Mm' + mm'} > 3 \left\{\frac{\left[1 - \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}\right]^2}{\left[3 + \frac{\varrho f'(\varrho)}{f(\varrho)}\right]}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

При $f(\varrho) = \frac{1}{\varrho^N}$ условія эти обращаются въ данныя Routh'омъ.

Замѣтимъ, что первое изъ нихъ есть условіе возможности періодическихъ Лапласовыхъ движеній, безконечно-близкихъ къ разсматриваемому постоянному.

Во второмъ случаѣ изъ условія, что

$$u = g\varrho^3\left(f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)\right) = \text{const.}$$

для всякаго ϱ, находимъ:

$$f(\varrho) = \frac{\alpha}{\varrho^3} + \beta\varrho\,,$$

гдѣ α и β постоянныя.

Нетрудно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ Лапласовы движенія будутъ періодическими, только когда $1 - g\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Неравенство (38), приводящееся къ виду:

$$\frac{(M+m+m')^2}{Mm+Mm'+mm'} > 3\left(\frac{g\alpha}{1-g\alpha}\right)^2,$$

представляетъ условіе устойчивости этихъ періодическихъ движеній.

6. Обращаемся теперь къ общему случаю.

Мы будемъ предполагать, что ϱ всегда заключается между предѣлами ϱ_0 и $\varrho_1 > \varrho_0$, изъ которыхъ первый не нуль, второй не безконеченъ, и что разсматриваемое Лапласово движеніе есть періодическое, такъ-что ϱ есть періодическая функція ϑ съ періодомъ Ω, опредѣляемымъ формулою (5).

Для этого необходимо, чтобы ϱ_0 и ϱ_1 были простыми корнями уравненія

$$h - \frac{1}{\varrho^2} - 2g\int f(\varrho)d\varrho = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

и чтобы между предѣлами ϱ_0 и ϱ_1 первая часть послѣдняго не обращалась въ нуль, и при томъ была положительною.

Будемъ искать условія, при которыхъ функціи ξ, η, x, y остаются конечными для всякихъ вещественныхъ значеній ϑ. Эти условія и будутъ условіями устойчивости разсматриваемаго движенія.

Прежде всего разсмотримъ выраженія (25) для Ξ и Υ.

Нетрудно убѣдиться, что функціи Ξ и Υ, опредѣляемыя этими формулами, вообще суть слѣдующаго типа

$$P(\vartheta)+\vartheta Q(\vartheta),$$

гдѣ $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω.

Но изъ уравненія (пар. 1)

$$C\frac{dt}{\varrho^2}=d\vartheta,$$

въ которомъ, чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, будемъ считать C положительнымъ, слѣдуетъ, что ϑ есть непрерывная возрастающая функція t, получающая приращеніе Ω каждый разъ, какъ t получаетъ приращеніе

$$T=\frac{1}{C}\int\limits_0^\Omega \varrho^2 d\vartheta.$$

Поэтому всякая функція типа

$$P(\vartheta)+\vartheta Q(\vartheta)$$

приводится къ виду

$$p(t)+tq(t),$$

гдѣ $p(t)$ и $q(t)$ суть періодическія функціи t съ періодомъ T.

Такого вида будутъ, слѣдовательно, вообще Ξ и Υ, какъ функціи t.

Отсюда слѣдуетъ, что если признакомъ устойчивости считать то обстоятельство, чтобы въ возмущенномъ движеніи стороны треугольника всегда безконечно мало отличались отъ тѣхъ длинъ, которыя имъ соотвѣтствовали-бы въ невозмущенномъ движеніи *въ тотъ-же моментъ времени*, то непостоянныя Лапласовы движенія вообще неустойчивы.

Это обстоятельство впрочемъ очевидно изъ слѣдующихъ соображеній:

Когда мы переходимъ отъ одного періодическаго Лапласова движенія къ другому, то при этомъ вообще измѣняется и періодъ T, а коль скоро это происходитъ, то хотя-бы постоянныя g и h, характеризующія новое движеніе, и отличались безконечно-мало отъ своихъ прежнихъ значеній, очевидно, что разности между одновременными длинами сторонъ треугольника въ обоихъ движеніяхъ, не могутъ оставаться всегда безконечно-малыми. Послѣднее возможно только при условіи, что періодъ T не измѣнился.

Интересно найти законъ притяженія, для котораго періодическія Лапласовы движенія могутъ быть устойчивыми въ только-что опредѣленномъ смыслѣ. Вопросъ этотъ, по только-что замѣченному, приводится къ разысканію такого закона притяженія, для котораго періодъ T въ этихъ движеніяхъ не зависитъ отъ постоянныхъ g и h.

Мы рѣшимъ этотъ вопросъ при сдѣланномъ уже предположеніи относительно функціи $f(\varrho)$, что $f(\varrho+\zeta)$ для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній ϱ и для достаточно малыхъ ζ разложима въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ζ. То-же предположеніе дѣлаетъ Бертранъ, разыскивая всевозможные законы притяженія, для которыхъ траекторія точки, притягиваемой неподвижнымъ центромъ, есть всегда замкнутая кривая *). Пріемъ нашъ будетъ вполнѣ аналогиченъ Бертранову.

Полагая

$$\frac{1}{\varrho}=s\,, \qquad \int f(\varrho)\,d\varrho=\varphi(s)\,,$$

приводимъ уравненіе (4) къ виду:

$$d\vartheta=\pm\frac{ds}{\sqrt{h-s^2-2g\,\varphi(s)}}\,.$$

При томъ имѣемъ:

$$dt=\frac{\varrho^2}{C}\,d\vartheta=\sqrt{\frac{g}{M+m+m'}}\,\frac{d\vartheta}{s^2}\,.$$

Поэтому, если положимъ

$$\frac{1}{\varrho_0}=s_0\,, \qquad \frac{1}{\varrho_1}=s_1\,,$$

то найдемъ:

$$T=2\sqrt{\frac{g}{M+m+m'}}\int_{s_1}^{s_0}\frac{ds}{s^2\sqrt{h-s^2-2g\,\varphi(s)}}\,.$$

Но изъ уравненій

$$h-{s_0}^2-2g\,\varphi(s_0)=0\,,$$

$$h-{s_1}^2-2g\,\varphi(s_1)=0$$

находимъ:

$$h=\frac{{s_0}^2\varphi(s_1)-{s_1}^2\varphi(s_0)}{\varphi(s_1)-\varphi(s_0)}\,, \quad 2g=\frac{{s_0}^2-{s_1}^2}{\varphi(s_1)-\varphi(s_0)}\,,$$

---

*) Comptes rendus, t. LXXVII, 1873, p. 849.

вслѣдствіе чего формула наша принимаетъ видъ:

$$T=\sqrt{\frac{2(s_0{}^2-s_1{}^2)}{M+m+m'}}\int\limits_{s_1}^{s_0}\frac{ds}{s^2\sqrt{s_0{}^2\varphi(s_1)-s_1{}^2\varphi(s_0)-[\varphi(s_1)-\varphi(s_0)]s^2-(s_0{}^2-s_1{}^2)\varphi(s)}}.$$

Вопросъ приводится къ разысканію функціи $\varphi(s)$ изъ условія, чтобы это выраженіе не зависѣло отъ s_1 и s_0.

Сдѣлаемъ подстановку

$$s=s_1+(s_0-s_1)u,$$

и предположимъ разность s_0-s_1 на столько малою, чтобы функція $\varphi(s)$ была разложима въ рядъ по восходящимъ степенямъ $(s_0-s_1)u$ для всякаго u, лежащаго между предѣлами 0 и 1.

Тогда предполагая, что $s_1\varphi''(s_1)-\varphi'(s_1)$ не нуль, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$T=\frac{1}{\sqrt{M+m+m'}}\sqrt{\frac{2(s_0+s_1)}{s_1\varphi''(s_1)-\varphi'(s_1)}}\int\limits_0^1\frac{du}{[s_1+(s_0-s_1)u]^2\sqrt{u(1-u)}\sqrt{1+(s_0-s_1)\psi(u)}},$$

гдѣ $\psi(u)$ есть непрерывная функція отъ u, остающаяся конечною при $s_0-s_1=0$.

Для того, чтобы выраженіе это не зависѣло отъ s_1 и s_0, необходимо, чтобы выраженіе

$$\frac{2}{\sqrt{M+m+m'}}\,\frac{1}{\sqrt{s_1{}^4\varphi''(s_1)-s_1{}^3\varphi'(s_1)}}\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}},$$

въ которое оно обращается при $s_0=s_1$, не зависѣло отъ s_1, а для этого функція $\varphi(s)$ должна удовлетворять уравненію:

$$s^4\varphi''(s)-s^3\varphi'(s)=\text{const}.$$

Послѣднее приводится къ виду

$$f'(\varrho)+\frac{3}{\varrho}f(\varrho)=\text{const}.$$

и слѣдовательно даетъ:

$$f(\varrho)=\frac{\alpha}{\varrho^3}+\beta\varrho,$$

гдѣ α и β постоянныя.

Что при этомъ законѣ притяженія періодъ T дѣйствительно не зависитъ отъ s_1 и s_0, убѣждаемся непосредственнымъ вычисленіемъ, которое даетъ:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta(M+m+m')}}.$$

Такимъ образомъ мы получили тотъ самый законъ притяженія, для котораго устойчивость Лапласовыхъ движеній была изслѣдована въ предыдущемъ параграфѣ. Мы видѣли, что при этомъ законѣ притяженія функціи Ξ и Υ дѣйствительно содержатъ только періодическіе члены.

Далѣе мы будемъ говорить объ устойчивости иного рода. А именно, мы будемъ періодическое Лапласово движеніе считать устойчивымъ, когда послѣ всякихъ безконечно-малыхъ возмущеній, треугольникъ, въ вершинахъ котораго находятся матерьяльныя точки, всегда безконечно-мало отличается отъ равносторонняго, при чемъ стороны его измѣняются между предѣлами, безконечно-мало отличающимися отъ прежнихъ.

Для рѣшенія вопроса объ устойчивости въ этомъ смыслѣ, мы можемъ сравнивать возмущенное движеніе не съ разсматриваемымъ, а съ какимъ-либо другимъ періодическимъ Лапласовымъ движеніемъ, въ которомъ постоянныя g и h имѣютъ значенія, безконечно-мало отличающіяся отъ соотвѣтствующихъ разсматриваемому. Вслѣдствіе этого можемъ предполагать $\Xi = \Upsilon = 0$, откуда слѣдуетъ, что рѣшеніе нашего вопроса исключительно зависитъ отъ интегрированія уравненій, которымъ удовлетворяютъ x и y, или — что все равно — отъ интегрированія уравненій (29).

Теперь и обращаемся къ этимъ уравненіямъ.

7. Мы уже сдѣлали предположеніе, что функція $f(\varrho+\zeta)$ при $\varrho_0 \leqq \varrho \leqq \varrho_1$ разложима въ абсолютно сходящійся рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ζ для всякихъ достаточно малыхъ значеній послѣдняго. Мы примемъ теперь этотъ рядъ за опредѣленіе функціи $f(\varrho+\zeta)$ для комплексныхъ значеній ζ, модули которыхъ достаточно малы.

Такимъ образомъ функція $f(\varrho)$ будетъ опредѣлена для комплексныхъ значеній ϱ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, лежащимъ между предѣлами ϱ_0 и ϱ_1, и для этой области будетъ синектичною.

Уравненіе (4) опредѣлитъ затѣмъ ϱ, какъ періодическую функцію ϑ съ періодомъ Ω, и при томъ синектичную для всякихъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, если предположимъ вещественнымъ одно изъ значеній ϑ, для которыхъ $\varrho = \varrho_0$. Функція u, входящая въ уравненія (29), будетъ такого-же характера.

Включивши въ разсмотрѣніе комплексныя значенія ϑ, мы можемъ приложить къ нашимъ уравненіямъ общія теоремы теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи безконечныхъ рядовъ.

Во первыхъ, изъ свойства синектичности функціи u заключаемъ, что X и Y можно разсматривать, какъ синектичныя функціи ϑ, вблизи всякихъ вещественныхъ конечныхъ значеній ϑ.

Во вторыхъ, изъ періодичности функціи u выводимъ, что если

$$X_i(\vartheta),\ Y_i(\vartheta),\ (i=1,2,3,4) \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

суть четыре независимыя системы частныхъ рѣшеній уравненій (29), то

$$\left.\begin{aligned} X_i(\vartheta+\Omega) &= a_{i1}X_1(\vartheta)+a_{i2}X_2(\vartheta)+a_{i3}X_3(\vartheta)+a_{i4}X_4(\vartheta)\,, \\ Y_i(\vartheta+\Omega) &= a_{i1}Y_1(\vartheta)+a_{i2}Y_2(\vartheta)+a_{i3}Y_3(\vartheta)+a_{i4}Y_4(\vartheta)\,, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (42)$$

$$(i=1,2,3,4)\,,$$

гдѣ a_{ij} суть нѣкоторыя постоянныя.

При томъ, если уравненіе

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11}-q\,, & a_{12}\,, & a_{13}\,, & a_{14} \\ a_{21}\,, & a_{22}-q\,, & a_{23}\,, & a_{24} \\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33}-q\,, & a_{34} \\ a_{41}\,, & a_{42}\,, & a_{43}\,, & a_{44}-q \end{vmatrix} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (43)$$

приведемъ къ виду

$$q^4+b_1q^3+b_2q^2+b_3q+b_4=0\,,$$

то коэффиціенты b будутъ оставаться неизмѣнными при замѣнѣ выбранной нами группы (41) какою-либо другою группою четырехъ независимыхъ системъ частныхъ рѣшеній уравненій (29).

Наконецъ, предполагая инваріанты b извѣстными, и называя корни уравненія (43) черезъ q_1, q_2, q_3, q_4, найдемъ общій интегралъ уравненій (29), когда эти корни различны, подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{4} C_i P_i(\vartheta) q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}\,, \\ Y &= \sum_{i=1}^{4} C_i Q_i(\vartheta) q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

гдѣ $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω, при томъ—однозначныя и непрерывныя для всѣхъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, а C—постоянныя произвольныя.

Въ случаѣ равенства между нѣкоторыми изъ корней уравненія (43) выраженія для X и Y будутъ вообще нѣсколько иного вида. А именно, нѣкоторыя изъ постоянныхъ C замѣнятся вообще цѣлыми функціями ϑ степени не выше числа, на единицу меньшаго кратности соотвѣтствующаго корня. Такъ если $q_2 = q_1$, и если *всѣ* миноры опредѣлителя $\triangle$ не обращаются въ нуль при $q = q_1$, то члены выраженія X, соотвѣтствующіе разсматриваемому корню, будутъ вида:

$$(C_1 + C_2\vartheta)P_1(\vartheta)q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}} + C_2P_2(\vartheta)q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}.$$

Типъ (44) общаго интеграла для двукратнаго корня q_1 сохранится только въ томъ случаѣ, когда при $q = q_1$ всѣ миноры опредѣлителя $\triangle$ обращаются въ нуль. Вообще въ случаѣ μ-кратнаго корня этого уравненія, типъ (44) общаго интеграла сохранится только при условіи, что для этого корня обращаются въ нуль всѣ младшіе опредѣлители опредѣлителя $\triangle$ до порядка μ невключительно *).

Наша задача приводится такимъ образомъ къ составленію и изслѣдованію уравненія (43). Въ случаѣ, когда корни послѣдняго различны, условія устойчивости будутъ состоять въ томъ, чтобы модули этихъ корней были равны или меньше 1. Въ случаѣ кратныхъ корней получатся еще добавочныя условія, если только они возможны,—чтобы кратный корень обращалъ въ нуль всѣ младшіе опредѣлители опредѣлителя $\triangle$ до извѣстнаго порядка.

Къ сожалѣнію, задача о составленіи опредѣлителя $\triangle$ на столько трудна, что можно дать только способы для приближеннаго вычисленія его элементовъ, которые и будутъ изложены далѣе.

Теперь-же покажемъ, что здѣсь задача приводится главнымъ образомъ къ вычисленію только двухъ величинъ, ибо характеристичное уравненіе (43) въ разсматриваемомъ вопросѣ всегда будетъ слѣдующаго типа:

$$\triangle = q^4 - 2Aq^3 + 2Bq^2 - 2Aq + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Чтобы доказать это, прежде всего замѣчаемъ, что если $\vartheta = 0$ есть одно изъ значеній ϑ, для которыхъ $\varrho = \varrho_0$, что всегда можно предположить, то ϱ, а слѣд. и u есть четная функція ϑ. Это представляетъ непосредственное слѣдствіе уравненія (4).

*) См. наприм. *Floquet*. „Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques".—Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. Tome 12, 1883.

Но если u есть четная функцiя ϑ, то уравненiя (29) не мѣняются при одновременной замѣнѣ ϑ черезъ $-\vartheta$ и Y черезъ $-Y$. Поэтому если

$$X=\varphi(\vartheta)\,, \quad Y=\psi(\vartheta)$$

есть какая-либо система рѣшенiй этихъ уравненiй, то

$$X=\varphi(-\vartheta)\,, \quad Y=-\psi(-\vartheta)$$

представитъ также нѣкоторую систему рѣшенiй этихъ уравненiй.

Пусть q есть одинъ изъ корней уравненiя (43). Мы будемъ имѣть систему частныхъ рѣшенiй уравненiй (29) слѣдующаго вида

$$X=P(\vartheta)q^{\frac{\vartheta}{\Omega}}\,, \quad Y=Q(\vartheta)q^{\frac{\vartheta}{\Omega}}\,,$$

гдѣ $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ суть перiодическiя функцiи ϑ съ перiодомъ Ω. Но по только-что замѣченному, существованiе этой системы рѣшенiй влечетъ за собою заключенiе о существованiи слѣдующей

$$X=P(-\vartheta)q^{-\frac{\vartheta}{\Omega}}\,, \quad Y=-Q(-\vartheta)q^{-\frac{\vartheta}{\Omega}}\,,$$

въ которой $P(-\vartheta)$ и $Q(-\vartheta)$ суть перiодическiя функцiи ϑ съ тѣмъ-же перiодомъ Ω. Эта-же послѣдняя система рѣшенiй возможна только при условiи, что $\frac{1}{q}$ есть корень уравненiя (43).

И такъ, каждому корню q этого уравненiя соотвѣтствуетъ корень $\frac{1}{q}$. Другими словами, уравненiе это должно приводиться къ виду (45).

Наше доказательство основывалось на томъ свойствѣ функцiи u, что ее можно разсматривать, какъ четную функцiю ϑ. Но разсматриваемая теорема можетъ быть доказана и независимо отъ этого свойства функцiи u.

Приводимъ другое доказательство ея.

Прежде всего замѣчаемъ, что корни уравненiя (43) вообще различны. Это слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что уже въ частномъ случаѣ, когда u есть постоянная величина, корни его вообще различны.

Пусть q_1 и q_2 два различныхъ корня уравненiя (43) и при томъ такихъ, что $q_1 q_2$ не равно 1. Мы будемъ имѣть двѣ различныхъ системы частныхъ рѣшенiй уравненiй (29) слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= P_1(\vartheta)\, q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y_1 = Q_1(\vartheta)\, q_1^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \\ X_2 &= P_2(\vartheta)\, q_2^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y_2 = Q_2(\vartheta)\, q_2^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

гдѣ P и Q по прежнему означаютъ періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω.

Составляемъ изъ этихъ частныхъ рѣшеній выраженіе (X_1, X_2) (см. пар. 4). Вслѣдствіе періодичности функцій P и Q, а слѣдовательно — и ихъ производныхъ, выраженіе это, при увеличеніи ϑ на Ω, возвращается къ прежнему значенію, умноженному на величину $q_1 q_2$, отличную отъ 1. Но мы знаемъ, что выраженіе это представляетъ постоянную величину. Поэтому приходимъ къ заключенію, что

$$(X_1, X_2) = 0 \,.$$

Но въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли въ параграфѣ 4, двѣ другія системы частныхъ рѣшеній X_3, Y_3 и X_4, Y_4, изъ которыхъ вмѣстѣ съ (46) можетъ быть составленъ общій интегралъ уравненій (29), будутъ опредѣляться формулами (32).

Опредѣлимъ болѣе точнымъ образомъ эти частныя рѣшенія.

Будемъ изображать комплексныя значенія ϑ точками на нѣкоторой плоскости, и предположимъ, что во всѣхъ интегралахъ, входящихъ въ формулы (32), интегрированіе начинается отъ какой-либо точки $\vartheta = \vartheta$ на вещественной оси, для которой функція

$$Z = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

не обращается въ нуль, и затѣмъ ведется до точки, изображающей разсматриваемое значеніе ϑ, по какой-либо кривой, всѣ точки которой достаточно близки къ вещественной оси, и на которой не лежатъ точки, изображающія корни уравненія $Z = 0$. Мы знаемъ, что функціи X и Y для всѣхъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, однозначны. Поэтому кривыя эти въ извѣстныхъ предѣлахъ можно выбирать произвольно, не измѣняя значеній интеграловъ. Мы удержимъ для обозначенія послѣднихъ обычныя означенія, принятыя для опредѣленныхъ интеграловъ.

Разсматриваемъ выраженія:

$$X_3 = X_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2}\, d\vartheta - X_2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$X_4 = X_2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2}\, d\vartheta - X_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta\,.$$

Дѣлаемъ въ нихъ замѣну ϑ черезъ $\vartheta + \Omega$; затѣмъ интегралы, взятые въ предѣлахъ отъ ϑ_0 до $\vartheta + \Omega$, преобразовываемъ по слѣдующей схемѣ

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta+\Omega} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} + \int_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega}\,,$$

и наконецъ замѣчаемъ, что при указанной замѣнѣ X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z обращаются соотвѣтственно въ $q_1 X_1, q_1 Y_1, q_2 X_2, q_2 Y_2, q_1 q_2 Z$, вслѣдствіе чего

$$\int_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega} \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2}\, d\vartheta = \frac{1}{q_1^2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_2^2 + Y_2^2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$\int_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta = \frac{1}{q_1 q_2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta\,,$$

$$\int_{\vartheta_0+\Omega}^{\vartheta+\Omega} \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2}\, d\vartheta = \frac{1}{q_2^2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z^2}\, d\vartheta\,.$$

Послѣ этихъ преобразованій находимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_3(\vartheta + \Omega) &= q_1 c_{22} X_1(\vartheta) - q_2 c_{12} X_2(\vartheta) + \frac{1}{q_1} X_3(\vartheta)\,, \\ X_4(\vartheta + \Omega) &= q_2 c_{11} X_2(\vartheta) - q_1 c_{12} X_1(\vartheta) + \frac{1}{q_2} X_4(\vartheta)\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (47)$$

гдѣ c_{ij} постоянныя, опредѣляемыя формулами

$$c_{11} = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} \frac{X_1{}^2 + Y_1{}^2}{Z^2}\, d\vartheta ,$$

$$c_{12} = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{Z^2}\, d\vartheta ,$$

$$c_{22} = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Omega} \frac{X_2{}^2 + Y_2{}^2}{Z^2}\, d\vartheta .$$

Присоединивши къ формуламъ (47) слѣдующія

$$X_1(\vartheta + \Omega) = q_1 X_1(\vartheta) , \qquad X_2(\vartheta + \Omega) = q_2 X_2(\vartheta) ,$$

можемъ составить уравненіе (43), которое будетъ слѣдующаго вида:

$$\begin{vmatrix} q_1 - q , & 0 , & 0 , & 0 \\ 0 , & q_2 - q , & 0 , & 0 \\ q_1 c_{22} , & - q_2 c_{12} , & \dfrac{1}{q_1} - q , & 0 \\ - q_1 c_{12} , & q_2 c_{11} , & 0 , & \dfrac{1}{q_2} - q \end{vmatrix} = 0 .$$

Корни этого уравненія суть $q_1 , q_2 , \frac{1}{q_1}$ и $\frac{1}{q_2}$.

И такъ, вопросъ приводится вообще къ опредѣленію двухъ постоянныхъ A и B, входящихъ въ уравненіе (45).

Въ частномъ случаѣ $\lambda = \frac{1}{2}$ интегрированіе уравненій (29) зависитъ, какъ мы видѣли, отъ интегрированія линейнаго уравненія второго порядка (34). Характеристичное уравненіе $\triangle = 0$, соотвѣтствующее послѣднему, будетъ типа

$$q^2 - 2A_1 q + 1 = 0 ,$$

и потому въ этомъ случаѣ вопросъ приводится къ опредѣленію одной только постоянной A_1 .

8. Такъ-какъ каждому корню q уравненія (45) соотвѣтствуетъ корень $\frac{1}{q}$, то условіе устойчивости приводится главнымъ образомъ къ тому, чтобы модули всѣхъ корней этого уравненія были равны 1.

Найдемъ условія, которымъ должны удовлетворять для этого коэффиціенты A и B.

Пусть $e^{\varphi_1 i}, e^{-\varphi_1 i}, e^{\varphi_2 i}, e^{-\varphi_2 i}$, гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а φ_1 и φ_2 вещественныя величины, суть всѣ корни уравненія (45).

Будемъ имѣть:

$$A = \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\,, \quad B = 1 + 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2\,,$$

откуда слѣдуетъ, что $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$x^2 - Ax + \frac{B-1}{2} = 0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

Условіе, что корни этого уравненія вещественны и различны, выразится неравенствомъ:

$$A^2 - 2(B-1) > 0\,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

а что они по числовымъ значеніямъ меньше 1 — неравенствами:

$$\sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 - A\,,$$

$$\sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 + A\,.$$

Изъ послѣднихъ во первыхъ слѣдуетъ, что

$$2 - A > 0 \quad \text{и} \quad 2 + A > 0$$

или

$$A^2 < 4\,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

и во вторыхъ — что

$$B + 1 > 2A > -B - 1\,,$$

откуда

$$B + 1 > 0 \quad \text{и} \quad A^2 < \left(\frac{B+1}{2}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

Условія (49), (50) и (51) равносильны слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} -1 < B < 3\,, \\ 2(B-1) < A^2 < \left(\frac{B+1}{2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

При этихъ условіяхъ корни уравненія (48) вещественны, различны и по числовымъ значеніямъ меньше 1, а потому корни уравненія (45) различны и имѣютъ модули, равные 1.

Въ предѣльныхъ случаяхъ неравенствъ (52) получается слѣдующее:

При $B = 3$ оба корня уравненія (48) равны ± 1, и слѣдовательно всѣ четыре корня уравненія (45) равны ± 1.

При $B = -1$ одинъ корень уравненія (48) равенъ, 1, другой -1, и слѣдовательно — два корня уравненія (45) равны 1, а два остальныхъ равны -1.

При $A^2 = \left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ одинъ корень уравненія (48) равенъ ± 1, другой представляетъ вообще правильную дробь, и слѣдовательно два корня уравненія (45) равны ± 1, а остальные два вообще отличны отъ ± 1.

При $A^2 = 2(B-1)$ корни уравненія (48) равны, будучи вообще отличными отъ ± 1, и слѣдовательно уравненіе (45) имѣетъ двѣ пары равныхъ корней, вообще отличныхъ отъ ± 1.

Въ непредѣльныхъ случаяхъ условій (52) устойчивость, по крайней мѣрѣ для перваго приближенія, несомнѣнна. Предѣльные случаи требуютъ еще дополнительныхъ изслѣдованій.

III.

9. Обращаемся къ вопросу о приближенномъ вычисленіи инваріантовъ A и B.

Прилагая къ уравненіямъ (29) общую теорію интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, основанную на изслѣдованіи интеграловъ вблизи ихъ критическихъ точекъ, мы можемъ для каждаго даннаго частнаго вида функціи u найти способы какъ для приближеннаго вычисленія неизвѣстныхъ функцій для каждаго значенія независимой перемѣнной, такъ и для приближеннаго вычисленія постоянныхъ A и B. Способы эти могутъ быть весьма разнообразны какъ въ зависимости отъ вида функціи u, такъ и въ зависимости отъ различныхъ преобразованій, которымъ могутъ быть подвергаемы наши уравненія путемъ перемѣны независимой перемѣнной.

Приложенiе способовъ этого рода въ особенности къ случаю притяженiя, обратно пропорцiональнаго квадрату разстоянiя, конечно было-бы не лишено интереса. Но мы отложимъ это до другаго изслѣдованiя. Здѣсь-же изложимъ два общихъ для нашей задачи способа, основанныхъ на иныхъ началахъ. Однимъ изъ нихъ можно пользоваться всегда, хотя практически полезенъ онъ можетъ быть только въ случаѣ, когда масса одной изъ точекъ весьма велика сравнительно съ массами двухъ остальныхъ; другимъ — когда разсматриваемое перiодическое Лапласово движенiе достаточно близко къ постоянному.

Только-что упомянутые способы основываются на слѣдующей теоремѣ:

Дана система n линейныхъ однородныхъ дифференцiальныхъ уравненiй съ n неизвѣстными функцiями $X_1, X_2, \ldots X_n$ и независимой перемѣнной t:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX_1}{dt} &= P_{11}X_1 + P_{12}X_2 + \ldots. + P_{1n}X_n, \\
\frac{dX_2}{dt} &= P_{21}X_1 + P_{22}X_2 + \ldots. + P_{2n}X_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dX_n}{dt} &= P_{n1}X_1 + P_{n2}X_2 + \ldots. + P_{nn}X_n,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (53)$$

въ которой P_{ij} суть перiодическiя функцiи t съ однимъ и тѣмъ-же вещественнымъ перiодомъ ω, содержащiя нѣкоторый параметръ α. Называя черезъ Т и А нѣкоторыя положительныя постоянныя и черезъ τ — произвольную конечную вещественную величину, допустимъ, что P_{ij} суть синектичныя функцiи двухъ перемѣнныхъ t и α для всѣхъ значенiй послѣднихъ, удовлетворяющихъ условiямъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{mod}(t - \tau) < \mathrm{T}, \\
&\mathrm{mod}\,\alpha < \mathrm{A},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

при всякомъ τ. Тогда, разумѣя подъ $C_1, C_2, \ldots C_n$ произвольно заданныя значенiя функцiй $X_1, X_2, \ldots X_n$ для какого-либо частнаго вещественнаго значенiя t, положимъ, $t = t_0$, и представляя общiй интегралъ уравненiй (53) подъ видомъ

$$X_j = C_1 Q_j^{(1)} + C_2 Q_j^{(2)} + \ldots. + C_n Q_j^{(n)}$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots.\ n),$$

найдемъ, что функціи $Q_j^{(i)}$ разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся для всѣхъ значеній α и t, удовлетворяющихъ условіямъ (54). Кромѣ того, если

$$q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} q + a_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

есть характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее періоду ω, то и инваріанты a_1, a_2 и т. д. разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся, пока $\mathrm{mod}\,\alpha < \mathrm{A}$.

Теорема эта докажется слѣдующимъ образомъ.

Пусть T_1 и A_1 суть какія-либо положительныя величины, соотвѣтственно меньшія T и A, и пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ суть значенія функцій X_1, $X_2, \ldots X_n$ для $t = \tau$.

Функціи P_{ij} могутъ быть представлены подъ видомъ двойныхъ рядовъ

$$P_{ij} = \sum_{k,\ l=0}^{\infty} A_{ij}^{(kl)} (t-\tau)^k \alpha^l \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

абсолютно сходящихся для всѣхъ значеній t и α, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\mathrm{mod}(t-\tau) \leqq \mathrm{T}_1 \,, \qquad \mathrm{mod}\,\alpha \leqq \mathrm{A}_1 \,.$$

При томъ, если P есть наибольшій изъ модулей всѣхъ значеній функцій P_{ij} для $\mathrm{mod}\,(t-\tau) = \mathrm{T}_1$ и $\mathrm{mod}\,\alpha = \mathrm{A}_1$, то

$$\mathrm{mod}\, A_{ij}^{(kl)} \leqq \frac{P}{\mathrm{T}_1{}^k \mathrm{A}_1{}^l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Вносимъ въ уравненія (53) вмѣсто каждой изъ функцій P_{ij} ряды (56), а вмѣсто каждой изъ функцій X_j ряды слѣдующаго вида

$$X_j = \Gamma_j + (t-\tau) \sum_{k,\ l=0}^{\infty} B_j^{(kl)} (t-\tau)^k \alpha^l \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

и затѣмъ приравниваемъ коэффиціенты при одинаковыхъ произведеніяхъ $(t-\tau)^k \alpha^l$ въ обѣихъ частяхъ равенствъ.

Такимъ путемъ получимъ уравненія, изъ которыхъ каждый изъ коэффиціентовъ $B_j^{(kl)}$ найдется подъ видомъ выраженія, линейнаго и однороднаго относительно всѣхъ $\varGamma_i$, въ которомъ послѣднія будутъ множителями при цѣлыхъ раціональныхъ функціяхъ съ *положительными* коэффиціентами отъ тѣхъ изъ величинъ $A_{i_1 j_1}^{(k_1 l_1)}$, для которыхъ k_1 не больше k и l_1 не больше l.

Ряды (58) будутъ абсолютно сходящимися для всѣхъ значеній t и α, для которыхъ суть абсолютно сходящіеся ряды, получаемые изъ (58) замѣною коэффиціентовъ $B_j^{(kl)}$ высшими предѣлами ихъ модулей. Но такіе предѣлы получимъ, замѣняя въ упомянутыхъ выраженіяхъ этихъ коэффиціентовъ величины $A_{ij}^{(kl)}$ вторыми частями неравенствъ (57), а величины $\varGamma_j$ — наибольшимъ изъ ихъ модулей, который назовемъ черезъ $\varGamma$. Замѣчая-же, что вслѣдствіе этой замѣны каждая изъ функцій P_{ij} обращается въ

$$\frac{P}{\left(1-\frac{t-\tau}{\mathrm{T}_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\mathrm{A}_1}\right)},$$

найдемъ, что при этомъ каждый изъ рядовъ (58) обратится въ рядъ, удовлетворяющій уравненію

$$\frac{dX}{dt}=\frac{nPX}{\left(1-\frac{t-\tau}{\mathrm{T}_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\mathrm{A}_1}\right)}$$

и обращающійся въ $\varGamma$ для $t=\tau$. Этотъ рядъ представитъ, слѣдовательно, разложеніе по восходящимъ степенямъ $t-\tau$ и α функціи

$$X=\varGamma\left(1-\frac{t-\tau}{\mathrm{T}_1}\right)^{-\frac{nP\mathrm{T}_1}{1-\frac{\alpha}{\mathrm{A}_1}}},$$

которая остается синектичною, пока $\operatorname{mod}(t-\tau)<\mathrm{T}_1$ и $\operatorname{mod}\alpha<\mathrm{A}_1$. Поэтому для такихъ значеній t и α рядъ этотъ есть абсолютно сходящійся.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что если $\varGamma_1, \varGamma_2, \ldots \varGamma_n$ суть значенія функцій $X_1, X_2, \ldots X_n$ для какого либо вещественнаго $t=\tau$, то для всякаго t, удовлетворяющаго условію $\operatorname{mod}(t-\tau)<\mathrm{T}$, функціи эти опредѣлятся уравненіями вида

$$X_j=\varGamma_1 R_j^{(1)}+\varGamma_2 R_j^{(2)}+\ldots+\varGamma_n R_j^{(n)}$$
$$(j=1, 2, \ldots n),$$

въ которыхъ $R_j^{(i)}$ суть функціи t и α, разлагающіяся въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся, пока $\mathrm{mod}\,\alpha < \mathrm{A}$.

Отсюда нетрудно заключить, что величины $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ могутъ быть представлены подъ видомъ линейныхъ функцій постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$ съ коэффиціентами, разлагающимися въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся при томъ же условіи.

Изъ сопоставленія этихъ двухъ результатовъ слѣдуетъ справедливость первой части теоремы.

Для доказательства второй части ея замѣчаемъ, что

$$Q_j^{(i)}(t+\omega) = D_1^{(i)} Q_j^{(1)}(t) + D_2^{(i)} Q_j^{(2)}(t) + \ldots + D_n^{(i)} Q_j^{(n)}(t)\,,$$

гдѣ $D_j^{(i)}$ суть величины, независящія отъ t.

Отсюда, принимая въ разсчетъ, что $Q_i^{(i)}(t_0) = 1$ и что $Q_j^{(i)}(t_0) = 0$, если $j \lesseqgtr i$, находимъ:

$$D_j^{(i)} = Q_j^{(i)}(t_0+\omega)\,,$$

откуда слѣдуетъ, что всѣ $D_j^{(i)}$ разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ α, абсолютно сходящіеся, пока $\mathrm{mod}\,\alpha < \mathrm{A}$. То же можно утверждать, слѣдовательно, и относительно коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ q въ уравненіи

$$\begin{vmatrix} D_1^{(1)} - q, & D_2^{(1)}, & \ldots & D_n^{(1)} \\ D_1^{(2)}, & D_2^{(2)} - q, & \ldots & D_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_1^{(n)}, & D_2^{(n)}, & \ldots & D_n^{(n)} - q \end{vmatrix} = 0\,,$$

а послѣднее тожественно съ уравненіемъ (55).

10. Въ уравненіяхъ (29) роль параметра α можетъ играть постоянная λ, для которой $\mathrm{A} = \infty$. Поэтому при сдѣланныхъ предположеніяхъ относительно функціи u и согласно съ только-что доказанною теоремою, можемъ утверждать, что функціи X и Y (для всякихъ значеній ϑ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ) и инваріанты A и B могутъ быть представлены подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ λ и абсолютно сходящихся для всякаго λ.

Положимъ

$$X = \sum_0^\infty \lambda^n P_n\,, \quad Y = \sum_0^\infty \lambda^n Q_n\,,$$

предполагая P_n и Q_n функціями ϑ, не зависящими отъ λ. Въ случаѣ надобности функціи эти будемъ означать также черезъ $P_n(\vartheta)$ и $Q_n(\vartheta)$.

Тогда, означая дифференцированія по ϑ значками, получимъ изъ (29) слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &P_0'' - 2Q_0' - uP_0 = 0\,, \\ &Q_0'' + 2P_0' = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

и для $n > 0$

$$\left.\begin{aligned} &P_n'' - 2Q_n' - uP_n = -uP_{n-1}\,, \\ &Q_n'' + 2P_n' = uQ_{n-1}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

Уравненія (59), какъ мы знаемъ, интегрируются въ квадратурахъ. Поэтому можемъ послѣдовательно найти P_0, Q_0, P_1, Q_1 и т. д. При этомъ, согласно съ предыдущей теоремой, постоянныя, вводимыя интегрированіемъ каждой изъ системъ уравненій (60), должны быть опредѣляемы изъ условія, чтобы функціи P_n, P_n', Q_n, Q_n' обращались въ нуль для нѣкотораго даннаго (одного и того-же для всякаго n) значенія ϑ. Постоянныя-же, введенныя интегрированіемъ уравненій (59), могутъ быть опредѣлены изъ условія, чтобы для этого значенія ϑ функціи P_0, P_0', Q_0, Q_0' обращались въ заданныя значенія функцій X, X', Y, Y'.

Чтобы составить формулы для послѣдовательнаго вычисленія функцій P_n и Q_n, мы должны сначала обратить вниманіе на нѣкоторыя общія свойства функціи

$$\frac{1}{\varrho^2} = v(\vartheta) = v\,.$$

При разсматриваемыхъ предположеніяхъ, v есть синектичная функція ϑ для значеній послѣдняго, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, и при томъ — періодическая съ періодомъ Ω, всѣ значенія которой для вещественнаго ϑ лежатъ между предѣлами, изъ которыхъ низшій не нуль, высшій не безконеченъ. Первый назовемъ черезъ v_0, второй — черезъ v_1.

Мы будемъ предполагать, что $\vartheta = 0$ есть одно изъ значеній ϑ, для которыхъ $v = v_0$. Тогда, разумѣя подъ m произвольное цѣлое число, найдемъ всѣ другія вещественныя значенія ϑ, удовлетворяющія этому уравненію, по формулѣ $\vartheta = m\Omega$, а всѣ вещественныя значенія ϑ, удовлетворяющія уравненію $v = v_1$, — по формулѣ $\vartheta = (2m+1)\dfrac{\Omega}{2}$.

Вслѣдствіе только-что сдѣланнаго предположенія, изъ уравненія (4) легко выводимъ слѣдующее равенство

$$v\left(m\frac{\Omega}{2} + \vartheta\right) = v\left(m\frac{\Omega}{2} - \vartheta\right),$$

справедливое для всякаго цѣлаго m. Изъ этого равенства слѣдуетъ, что если $v_0^{(n)}$ и $v_1^{(n)}$ суть значенія производной $v^{(n)}$ для $\vartheta = m\Omega$ и для $\vartheta = (2m+1)\dfrac{\Omega}{2}$, то вообще $v_0^{(2n+1)} = v_1^{(2n+1)} = 0$.

Отсюда заключаемъ, что для значеній ϑ, достаточно близкихъ къ значеніямъ типа $m\Omega$ или $(2m+1)\dfrac{\Omega}{2}$, функція v разложится въ рядъ одного изъ двухъ слѣдующихъ видовъ:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + \frac{v_0''}{1\cdot 2}\,\bar\vartheta^2 + \frac{v_0^{IV}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\bar\vartheta^4 + \ldots, \\ v &= v_1 + \frac{v_1''}{1\cdot 2}\,\bar\vartheta^2 + \frac{v_1^{IV}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\bar\vartheta^4 + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (61)$$

гдѣ $\bar\vartheta = \vartheta - m\Omega$ для перваго ряда и $\bar\vartheta = \vartheta - (2m+1)\dfrac{\Omega}{2}$ — для второго.

Наконецъ, замѣтимъ, что v_0'' и v_1'' всегда отличны отъ нуля, какъ это слѣдуетъ изъ того, что ϱ_0 и ϱ_1 суть *простые* корни уравненія (40).

Возвращаемся къ нашей задачѣ.

Принимая въ разсчетъ уравненіе (3) и формулу (14), опредѣляющую u, легко находимъ:

$$u = 4 + \frac{v'''}{v'},$$

вслѣдствіе чего уравненія (59) даютъ:

$$Q_0' = C_1 - 2P_0,$$

$$P_0'v' - v''P_0 = 2C_1 v + C_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

гдѣ C_1 и C_2 произвольныя постоянныя. Для опредѣленія ихъ, называемъ черезъ X_0, X_0', Y_0, Y_0' значенія функцій X, X', Y, Y' для $\vartheta = 0$, которыя предположимъ заданными. Тогда найдемъ:

$$C_1 = Y_0' + 2X_0,$$
$$2C_1 v_0 + C_2 = -v_0'' X_0.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (62) можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$\frac{P_0'v' - v''(P_0 - X_0)}{v'^2} = \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2},$$

откуда замѣчая, что вторая часть равенства остается въ силу (61) конечною для $\vartheta = 0$, и что

$$\lim\left\{\frac{P_0 - X_0}{v'}\right\}_{\vartheta=0} = \frac{X_0'}{v_0''},$$

находимъ:

$$P_0 = X_0 + X_0' \frac{v'}{v_0''} + v' \int_0^{\vartheta} \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2} d\vartheta.$$

Входящій сюда интегралъ теряетъ опредѣленный смыслъ, коль скоро въ числѣ значеній ϑ, черезъ которыя проводится интегрированіе, встрѣчаются значенія типа $\vartheta = (2m + 1)\frac{\Omega}{2}$. Поэтому эти значенія ϑ будемъ разсматривать, только какъ предѣльныя. Интегрированіе-же будемъ вести по какой-либо кривой, начинающейся въ точкѣ $\vartheta = 0$, на которой не находятся точки $\vartheta = (2m + 1)\frac{\Omega}{2}$, и которая достаточно близка къ вещественной оси для того, чтобы функція v оставалась синектичною, и не достигались мнимые корни уравненія $v' = 0$. Такъ-какъ при этомъ условіи разсматриваемый интегралъ остается однозначнымъ (см. (61)), то не теряя опредѣленности результата, можно не означать точнымъ образомъ пути интегрированія. Но въ случаѣ вещественныхъ значеній ϑ его всегда можно привести къ пути, состоящему изъ отрѣзковъ вещественной оси и полукруговъ безконечно-малыхъ радіусовъ, описанныхъ изъ центровъ $\vartheta = (2m + 1)\frac{\Omega}{2}$.

Далѣе мы встрѣтимся съ другими подобными-же интегралами, и для избѣжанія недоразумѣній введемъ для нихъ особыя обозначенія. А именно, интегралъ отъ какой-либо функціи $F(\vartheta)$, взятый по пути, подобному только-что описанному, при помощи котораго обходятся всѣ точки вещественной оси, для которыхъ $F(\vartheta)=\infty$, условимся обозначать такъ:

$$\int_0^\vartheta \Big| F(\vartheta)d\vartheta \,.$$

Такимъ образомъ для опредѣленія P_0 получаемъ слѣдующую формулу:

$$P_0 = X_0 + X_0' \frac{v'}{v_0''} + v' \int_0^\vartheta \Big| \frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2} d\vartheta \quad . \; . \; . \; (63)$$

Найдя P_0, получимъ Q_0 по формулѣ:

$$Q_0 = Y_0 + C_1\vartheta - 2\int_0^\vartheta P_0\, d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (64)$$

Здѣсь

$$C_1 = 2X_0 + Y_0' \,.$$

Предполагая теперь всѣ P_m и Q_m, для которыхъ $m<n$, извѣстными, составимъ формулы для вычисленія функцій P_n и Q_n.

Такъ-какъ при $\vartheta=0$ функціи эти вмѣстѣ со своими первыми производными должны обращаться въ нуль, то уравненія (60) дадутъ:

$$Q_n' + 2P_n = \int_0^\vartheta uQ_{n-1}d\vartheta \,,$$

$$P_n'v' - P_nv'' = \int_0^\vartheta \left\{ 2\int_0^\vartheta uQ_{n-1}d\vartheta - uP_{n-1} \right\} v'd\vartheta \,.$$

Положимъ

$$\int_0^\vartheta u\, Q_{n-1}d\vartheta = R_n(\vartheta) = R_n \,,$$

$$\int_0^\vartheta (2R_n - uP_{n-1})v'd\vartheta = S_n(\vartheta) = S_n \,.$$

Тогда, замѣчая, что S_n и S_n' обращаются въ нуль при $\vartheta=0$, изъ послѣдняго уравненія найдемъ

$$P_n = v' \int_0^{\vartheta} \frac{S_n \, d\vartheta}{v'^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

гдѣ при интегрированіи должно обходить не только всѣ точки типа $\vartheta = (2m+1)\frac{\Omega}{2}$, но также и всѣ точки типа $\vartheta = m\Omega$, для которыхъ m отлично отъ нуля.

Функція Q_n опредѣлится уравненіемъ:

$$Q_n = \int_0^{\vartheta} R_n d\vartheta - 2\int_0^{\vartheta} P_n d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Составимъ формулы для опредѣленія постоянныхъ $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$, $Q_n(\Omega)$ и $Q_n'(\Omega)$, которыя необходимы для вычисленія инваріантовъ A и B.

Постоянныя $P_0(\Omega)$ и $P_0'(\Omega)$ легко находятся изъ уравненія (63), которое даетъ:

$$P_0(\Omega) = X_0\,,$$

$$P_0'(\Omega) = X_0' + v_0'' \int_0^{\Omega} \frac{S d\vartheta}{v'^2},$$

гдѣ

$$S = 2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0\,.$$

Затѣмъ, замѣчая, что интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^{\Omega} P_0 \, d\vartheta = \Omega X_0 - \int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S d\vartheta}{v'^2}\,,$$

изъ (64) находимъ:

$$Q_0(\Omega) = Y_0 + (C_1 - 2X_0)\Omega + 2\int_0^{\Omega} \frac{(v - v_0) S d\vartheta}{v'^2}\,.$$

Изъ того-же уравненія слѣдуетъ:

$$Q_0'(\Omega) = C_1 - 2X_0\,.$$

Замѣняя постоянную C_1 ея значеніемъ, получаемъ такимъ образомъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(\Omega) = X_0 ,\\
&P_0'(\Omega) = v_0'' \int\limits_0^{\Omega} \frac{4(v - v_0) + v'' - v_0''}{v'^2}\, d\vartheta\, X_0 + \\
&\qquad + X_0' + 2v_0'' \int\limits_0^{\Omega} \frac{(v - v_0)d\vartheta}{v'^2}\, Y_0' ,\\
&Q_0(\Omega) = 2 \int\limits_0^{\Omega} \frac{(v - v_0)[4(v - v_0) + v'' - v_0'']d\vartheta}{v'^2}\, X_0 + \\
&\qquad + Y_0 + \left\{ \Omega + 4 \int\limits_0^{\Omega} \frac{(v - v_0)^2 d\vartheta}{v'^2} \right\} Y_0' ,\\
&Q_0'(\Omega) = Y_0' .
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (67)$$

Предположимъ теперь функціи P_{n-1} и Q_{n-1} для какого-либо n извѣстными. Тогда изъ (65), принимая въ разсчетъ разложенія (61), найдемъ:

$$P_n(\Omega) = -\frac{1}{v_0''} S_n(\Omega) ,$$

послѣ чего изъ (66) найдемъ $Q_n'(\Omega)$.

Для опредѣленія $P_n'(\Omega)$ беремъ уравненіе

$$P_n'' v' - P_n v''' = S_n' ,$$

которое даетъ:

$$P_n'(\Omega) = \int\limits_0^{\Omega} \frac{P_n}{v'} v''' d\vartheta + \int\limits_0^{\Omega} \frac{S_n' d\vartheta}{v'} .$$

Отсюда, интегрируя по частямъ, принимая въ разсчетъ формулу (65), и замѣчая, что въ силу (61)

$$\lim \left\{ (v'' - v_0'') \int\limits_0^{\vartheta} \frac{S_n d\vartheta}{v'^2} \right\}_{\vartheta = \Omega} = 0 ,$$

находимъ:

$$P_n'(\Omega) = -\int\limits_0^\Omega \frac{(v'' - v_0'') S_n \, d\vartheta}{v'^2} + \int\limits_0^\Omega \frac{S_n' d\vartheta}{v'} .$$

Точно также замѣчая, что

$$\lim \left\{ (v - v_0) \int\limits_0^\vartheta \frac{S_n d\vartheta}{v'^2} \right\}_{\vartheta=\Omega} = 0 ,$$

изъ (66) находимъ:

$$Q_n(\Omega) = \int\limits_0^\Omega R_n \, d\vartheta + 2 \int\limits_0^\Omega \frac{(v - v_0) S_n \, d\vartheta}{v'^2} .$$

Когда нѣтъ надобности знать функціи P_n и Q_n, а вся задача состоитъ только въ опредѣленіи постоянныхъ $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$ и т. д., то можно избѣжать составленія функціи S_n, что для вычисленій представитъ нѣкоторыя выгоды.

Съ этою цѣлью находимъ два интеграла:

$$\int\limits_0^\vartheta \frac{(v - v_0) d\vartheta}{v'^2} = V$$

и

$$\int\limits_0^\vartheta \frac{(v'' - v_0'') d\vartheta}{v'^2} = V_1 ,$$

знать которые уже необходимо для опредѣленія P_0 по формулѣ (63).

Послѣ этого интегрированіемъ по частямъ найдемъ:

$$\int\limits_0^\Omega \frac{(v - v_0) S_n \, d\vartheta}{v'^2} = V(\Omega) \, S_n(\Omega) - \int\limits_0^\Omega V S_n' d\vartheta ,$$

$$\int\limits_0^\Omega \frac{(v'' - v_0'') S_n d\vartheta}{v'^2} = V_1(\Omega) \, S_n(\Omega) - \int\limits_0^\Omega V_1 S_n' d\vartheta .$$

Вслѣдствіе этого получаемъ слѣдующія формулы:

$$
\left.
\begin{aligned}
P_n(\Omega) &= -\frac{1}{v_0''}\int\limits_0^{\Omega}(2R_n - uP_{n-1})v'd\vartheta\,, \\
P_n'(\Omega) &= \int\limits_0^{\Omega}(2R_n - uP_{n-1})(1+V_1v')d\vartheta - \\
&\quad - V_1(\Omega)\int\limits_0^{\Omega}(2R_n - uP_{n-1})v'd\vartheta\,, \\
Q_n(\Omega) &= \int\limits_0^{\Omega}R_n d\vartheta - 2\int\limits_0^{\Omega}(2R_n - uP_{n-1})Vv'd\vartheta + \\
&\quad + 2V(\Omega)\int\limits_0^{\Omega}(2R_n - uP_{n-1})v'd\vartheta\,, \\
Q_n'(\Omega) &= R_n(\Omega) + \frac{2}{v_0''}\int\limits_0^{\Omega}(2R_n - uP_{n-1})v'd\vartheta\,.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots \quad (68)
$$

Для вычисленія по этимъ формуламъ необходимо составить только одну новую функцію

$$R_n = \int\limits_0^{\vartheta} uQ_{n-1}d\vartheta\,.$$

Когда всѣ постоянныя $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$ и т. д., которыя будутъ линейными однородными функціями X_0, X'_0, Y_0 и Y'_0, найдены, инваріанты A и B опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

Пусть

$$
\begin{aligned}
P_n(\Omega) &= (a\,,a)_nX_0 + (a\,,a')_nX_0' + (a\,,b)_nY_0 + (a\,,b')_nY_0'\,, \\
P_n'(\Omega) &= (a',a)_nX_0 + (a',a')_nX_0' + (a',b)_nY_0 + (a',b')_nY_0'\,, \\
Q_n(\Omega) &= (b\,,a)_nX_0 + (b\,,a')_nX_0' + (b\,,b)_nY_0 + (b\,,b')_nY_0'\,, \\
Q_n'(\Omega) &= (b',a)_nX_0 + (b',a')_nX_0' + (b',b)_nY_0 + (b',b')_nY_0'\,,
\end{aligned}
$$

гдѣ $(a\,,a)_n$, $(a\,,a')_n$ и т. д. извѣстныя постоянныя.

Тогда характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее періоду Ω, будетъ:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_0^\infty (a\,,\,a)_n\lambda^n - q\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b'\,,\,a)_n\lambda^n \\ \sum\limits_0^\infty (a\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,\,a')_n\lambda^n - q\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b'\,,\,a')_n\lambda^n \\ \sum\limits_0^\infty (a\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,b)_n\lambda^n - q\,, & \sum\limits_0^\infty (b'\,,\,b)_n\lambda^n \\ \sum\limits_0^\infty (a\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (a'\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^\infty (b'\,,\,b')_n\lambda^n - q \end{vmatrix} = 0.$$

Изъ сравненія этого уравненія съ (45) получимъ A и B подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ λ.

11. Когда $\lambda = 0$, разсматриваемыя здѣсь движенія, очевидно, неустойчивы. Но это не исключаетъ возможности устойчивыхъ движеній для достаточно малыхъ значеній λ, ибо при $\lambda = 0$ всѣ четыре корня характеристичнаго уравненія равны 1.

Предыдущія формулы могутъ служить для рѣшенія вопроса объ устойчивости въ этомъ предположеніи, для чего достаточно составить только немногіе первые члены разложеній A и B по восходящимъ степенямъ λ.

Покажемъ, къ чему вообще приводится рѣшеніе этого вопроса.

Изъ формулъ (67) находимъ:

$$(a\,,\,a)_0 = (a'\,,\,a')_0 = (b\,,\,b)_0 = (b'\,,\,b')_0 = 1\,,$$

вслѣдствіе чего наше характеристичное уравненіе будетъ вида:

$$(1-q)^4 + \sum_1^\infty \left\{ K_n(1-q)^3 + L_n(1-q)^2 + M_n(1-q) + N_n \right\} \lambda^n = 0\,,$$

гдѣ $K_n\,, L_n\,, M_n\,, N_n$ суть величины, не зависящія ни отъ q, ни отъ λ.

Но уравненіе это должно приводиться къ виду (45), вслѣдствіе чего между четырьмя величинами $K_n\,, L_n\,, M_n$ и N_n должны существовать двѣ зависимости:

$$K_n + L_n = -\frac{M_n}{2} = N_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Такимъ образомъ для каждаго значенія n достаточно вычислить только двѣ величины K_n и N_n.

Нетрудно видѣть, что первая опредѣляется формулой

$$K_n = (a\,,\,a)_n + (a',\,a')_n + (b\,,\,b)_n + (b',\,b')_n \quad . \; . \; . \; . \; (70)$$

Что-же касается второй, то замѣчая, что изъ (67) слѣдуетъ

$$(a\,,\,a')_0 = 0\,,\;(a\,,\,b)_0 = 0\,,\;(a\,,\,b')_0 = 0\,,\;(a',\,b)_0 = 0\,,$$

$$(b\,,\,a')_0 = 0\,,\;(b',\,a)_0 = 0\,,\;(b',\,a')_0 = 0\,,\;(b',\,b)_0 = 0\,,$$

получаемъ для опредѣленія ея тожественное относительно λ равенство:

$$\sum_1^{\infty} N_n\lambda^n = \begin{vmatrix} \sum\limits_1^{\infty}(a\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^{\infty}(a',\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^{\infty}(b\,,\,a)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(b',\,a)_n\lambda^n \\ \sum\limits_1^{\infty}(a\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(a',\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(b\,,\,a')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(b',\,a')_n\lambda^n \\ \sum\limits_1^{\infty}(a\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(a',\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(b\,,\,b)_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(b'\,,\,b)_n\lambda^n \\ \sum\limits_1^{\infty}(a\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^{\infty}(a',b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_0^{\infty}(b\,,\,b')_n\lambda^n\,, & \sum\limits_1^{\infty}(b',b')_n\lambda^n \end{vmatrix} \quad (71)$$

Изъ этого равенства находимъ:

$$N_1 = 0\,,$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} (a\,,\,a)_1\,, & (a'\,,\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_0\,, & (b'\,,\,a)_1 \\ (a\,,\,a')_1\,, & 0\,, & 0\,, & (b',\,a')_1 \\ (a\,,\,b)_1\,, & 0\,, & 0\,, & (b'\,,\,b)_1 \\ (a\,,\,b')_1\,, & (a'\,,b')_0\,, & (b\,,b')_0\,, & (b'\,,\,b')_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a'\,,\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_0 \\ (a'\,,b')_0\,, & (b\,,b')_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a\,,\,a')_1\,, & (a\,,\,b)_1 \\ (b'\,,\,a')_1\,, & (b'\,,\,b)_1 \end{vmatrix}\,, \quad . \; . \; . \; (72)$$

и т. д.

Принимая въ разсчетъ (69), находимъ для инваріантовъ A и B слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} K_n \lambda^n , \\ B &= 3 + K_1\lambda + \frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}(2K_n + N_n)\lambda^n . \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \ (73)$$

Вслѣдствіе этого условія (52) приводятся къ виду:

$$\left.\begin{aligned} -4 < K_1\lambda + \frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}(2K_n + N_n)\lambda^n < 0 , \\ N_2\lambda^2 + \left(\frac{1}{4}K_1 N_2 + N_3\right)\lambda^3 + \ldots > 0 , \\ \left(\frac{1}{4}K_1{}^2 - N_2\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{2}K_1 K_2 - N_3\right)\lambda^3 + \ldots > 0 , \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (74)$$

гдѣ невыписанные члены содержатъ степени λ выше третьей.

Отсюда видно, что условіями устойчивости разсматриваемыхъ движеній для достаточно малыхъ значеній λ вообще служатъ неравенства:

$$K_1 < 0 , \qquad 0 < N_2 < \frac{1}{4} K_1{}^2 .$$

Въ предѣльныхъ случаяхъ послѣднихъ должны быть удовлетворены конечно еще другія неравенства, зависящія отъ членовъ высшихъ порядковъ.

Такъ, когда $N_2 = 0$, условіями устойчивости вообще служатъ неравенства:

$$K_1 < 0 , \qquad N_3 > 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (75)$$

Это послѣднее обстоятельство, какъ увидимъ, представляется въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія. Величина N_2 въ этомъ случаѣ обращается въ нуль вслѣдствіе того, что между $(a', a)_0$, $(b, a)_0$, $(a', b')_0$ и $(b, b')_0$ существуетъ соотношеніе

$$\frac{(b\,,\,a)_0}{(a',\,a)_0} = \frac{(b\,,\,b')_0}{(a',\,b')_0} .$$

Пользуясь послѣднимъ и полагая

$$(b\,,\,a)_0 = -k\,(a', a)_0 ,$$

легко находимъ изъ (71) слѣдующее выраженіе N_3:

$$N_3 = \begin{vmatrix} (a\,,\,a)_1\,, & (a'\,,\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_1 + k(a'\,,\,a)_1\,, & (b'\,,\,a)_1 \\ (a\,,\,a')_1\,, & 0 & ,\,(b\,,\,a')_1 + k(a'\,,\,a')_1\,, & (b'\,,\,a')_1 \\ (a\,,\,b)_1\,, & 0 & ,\,(b\,,\,b)_1 + k(a'\,,\,b)_1\,, & (b'\,,\,b)_1 \\ (a\,,\,b')_1\,, & (a'\,,\,b')_0\,, & (b\,,\,b')_1 + k(a'\,,\,b')_1\,, & (b'\,,\,b')_1 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; (76)$$

12. Приложимъ наши формулы къ случаю притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія.

Во всякомъ періодическомъ Лапласовомъ движеніи въ этомъ случаѣ относительная траекторія каждой изъ точекъ по отношенію къ одной изъ двухъ остальныхъ есть эллипсъ, въ фокусѣ котораго находится послѣдняя.

Называя черезъ p параметръ и черезъ ε эксцентриситетъ этого эллипса, будемъ имѣть:

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}\,,$$

вслѣдствіе чего найдемъ:

$$p^2 v = (1 - \varepsilon \cos \vartheta)^2\,,$$

$$u = \frac{3}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}\,.$$

Кромѣ истинной аномаліи ϑ, мы будемъ разсматривать также эксцентрическую φ.

Для облегченія интегрированій, которыя намъ придется произвести, полезно имѣть въ виду извѣстныя соотношенія между φ и ϑ:

$$1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}\,,$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \vartheta}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}\,, \quad \cos \varphi = \frac{\cos \vartheta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}\,,$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}\,, \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi}\,,$$

$$\frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\,, \quad \frac{d\vartheta}{1 - \varepsilon \cos \vartheta} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\,.$$

Мы предполагаемъ, что уголъ φ обращается въ нуль одновременно съ ϑ. При этомъ φ также одновременно съ ϑ будетъ обращаться въ каждое значеніе типа $m\pi$, гдѣ m цѣлое.

Періодъ Ω въ разсматриваемомъ случаѣ равенъ 2π.

Прежде всего интегрированіемъ уравненій (59) находимъ:

$$P_0 = -C_1 \cos\vartheta\,(1-\varepsilon\cos\vartheta) + C_2\varepsilon\sin\vartheta\,(1-\varepsilon\cos\vartheta) +$$

$$+ C_3\left\{2+\varepsilon^2 - 3\varepsilon\cos\vartheta + \frac{3\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\varepsilon\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\right\},$$

$$Q_0 = C_1\sin\vartheta\,(2-\varepsilon\cos\vartheta) - C_2(1-\varepsilon\cos\vartheta)^2 +$$

$$+ 3C_3\left\{\varepsilon\sin\vartheta - \frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,(1-\varepsilon\cos\vartheta)^2\right\} + C_4,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 и C_4 постоянныя, для которыхъ получаемъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{3(1-2\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)}\,X_0 + \frac{2-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\,Y_0', \\
C_3 &= \frac{2-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)}\,X_0 + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\,Y_0', \\
C_2 &= \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\,X_0', \\
C_4 &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,X_0' + Y_0.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (77)$$

Отсюда, замѣчая, что

$$P_0'(2\pi) = \varepsilon(1-\varepsilon)C_2 + \frac{6\pi\varepsilon(1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_3,$$

$$Q_0(2\pi) = -(1-\varepsilon)^2C_2 - \frac{6\pi(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_3 + C_4,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
(a', a)_0 &= \frac{6\pi\varepsilon(2-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & (a', b')_0 &= \frac{6\pi\varepsilon(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\
(b, a)_0 &= -\frac{6\pi(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & (b, b')_0 &= -\frac{6\pi(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}.
\end{aligned}\right\} \; . \; (78)$$

Формулы эти даютъ:

$$\frac{(b, a)_0}{(a', a)_0} = \frac{(b, b')_0}{(a', b')_0} = -\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (79)$$

Затѣмъ составляемъ функцію

$$R_1 = \int_0^{\vartheta} u\, Q_0\, d\vartheta\ .$$

Находимъ:

$$R_1 = 3C_1\left(1 - \cos\vartheta + \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1-\varepsilon\cos\vartheta}{1-\varepsilon}\right) - 3C_2(\vartheta - \varepsilon\sin\vartheta) +$$

$$+ 9C_3\left(\frac{\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\vartheta - \int_0^{\varphi}\frac{\varphi d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right) + 3C_4\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Входящій сюда интегралъ не выражается въ конечномъ видѣ, но значеніе его для $\varphi = 2\pi$ легко находимъ, замѣняя интегральную перемѣнную φ черезъ $2\pi - \varphi$:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\varphi d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ .$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$R_1(2\pi) = -6\pi C_2 - \frac{18\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_3 + \frac{6\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Далѣе, замѣчая, что

$$p^2(2R_1 - uP_0)v' =$$

$$= 6\varepsilon C_1\left\{(2-\cos\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta + \frac{2}{\varepsilon}\log\frac{1-\varepsilon\cos\vartheta}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta\right\} +$$

$$+ 6\varepsilon C_3\left\{\frac{3\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin^2\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta) - 6\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\int_0^{\varphi}\frac{\varphi d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} -\right.$$

$$\left. -(2+\varepsilon^2 - 3\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta\right\} -$$

$$- 6\varepsilon C_2(2\vartheta - \varepsilon\sin\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta + 12\varepsilon C_4\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(1-\varepsilon\cos\vartheta)\sin\vartheta\ ,$$

находимъ:

$$p^2\int_0^{2\pi}(2R_1 - uP_0)v'd\vartheta =$$

$$= 24\pi\varepsilon C_2 + \frac{72\pi^2\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}C_3 - 12\pi\left(1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)C_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

При составленіи этой формулы, а также и тѣхъ, съ которыми мы встрѣтимся далѣе, полезно имѣть въ виду, что если $f(x)$ есть непрерывная и однозначная функція x, то

$$\int_0^{2\pi} \vartheta f(\cos\vartheta)\, d\vartheta = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta)\, d\vartheta$$

и

$$\int_0^{2\pi} \varphi f(\cos\vartheta)\, d\vartheta = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta)\, d\vartheta\,,$$

какъ нетрудно убѣдиться, замѣняя интегральную перемѣнную ϑ черезъ $2\pi-\vartheta$ и замѣчая, что при этомъ φ переходитъ въ $2\pi-\varphi$.

Вслѣдствіе (80) и (81) изъ (68) находимъ:

$$P_1(2\pi) = -\frac{12\pi}{1-\varepsilon} C_2 - \frac{36\pi^2}{(1-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}} C_3 + \frac{6\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left(1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) C_4\,,$$

$$Q_1'(2\pi) = 6\pi \frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_2 + \frac{18\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_3 + \frac{6\pi}{\varepsilon} \left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2}{1-\varepsilon}\right) C_4\,,$$

откуда вслѣдствіе (77) получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
(a\,,a)_1 &= -\frac{36\pi^2(2-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,,\\
(a\,,a')_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon^2}\left(\frac{1-4\varepsilon+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right),\\
(a\,,b)_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left(1-\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right),\\
(a\,,b')_1 &= -\frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\\
(b'\,,a)_1 &= \frac{18\pi^2(3+\varepsilon)(2-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,,\\
(b'\,,a')_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon^2}\left(\frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2-7\varepsilon+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}\right),\\
(b'\,,b)_1 &= \frac{6\pi}{\varepsilon}\left(\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2}{1-\varepsilon}\right),\\
(b'\,,b')_1 &= \frac{18\pi^2(3+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (82)$$

Далѣе, замѣчая, что изъ формулъ

$$\frac{1}{p^2}\,V = \int_0^{\vartheta} \frac{(v - v_0)\,d\vartheta}{p^2 v'^2} =$$

$$= \frac{1 - \cos\vartheta}{2\varepsilon(1+\varepsilon)^2 \sin\vartheta} + \frac{\varepsilon \sin\vartheta}{4(1+\varepsilon)^2(1 - \varepsilon\cos\vartheta)} + \frac{3\varphi}{4(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,,$$

$$\frac{1}{p^2}\,V_1 = \int_0^{\vartheta} \frac{(v'' - v_0'')\,d\vartheta}{p^2 v'^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon(1+2\varepsilon^2)\sin^2\vartheta - (1-\varepsilon^2)(1-\cos\vartheta)}{2\varepsilon(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)\sin\vartheta\,(1-\varepsilon\cos\vartheta)} + \frac{3\varepsilon\varphi}{2(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

слѣдуетъ

$$(1-\varepsilon)(V_1 v' + 1) - 2\varepsilon V v' = \cos\vartheta\,(1 - \varepsilon\cos\vartheta)\,,$$

откуда

$$(1-\varepsilon)\,V_1(2\pi) - 2\varepsilon\,V(2\pi) = 0\,,$$

изъ (68) находимъ:

$$(1-\varepsilon)P_1'(2\pi) + \varepsilon Q_1(2\pi) = \varepsilon\int_0^{2\pi} R_1\,d\vartheta + \int_0^{2\pi}(2R_1 - uP_0)\cos\vartheta\,(1-\varepsilon\cos\vartheta)\,d\vartheta\,.$$

Отсюда

$$(1-\varepsilon)P_1'(2\pi) + \varepsilon Q_1(2\pi) =$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta\,(2 - \varepsilon\cos\vartheta)}{1 - \varepsilon\cos\vartheta}\,Q_0\,d\vartheta - 3\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,P_0\,d\vartheta =$$

$$= -6\pi\left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\right)C_1 + 6\pi\left(\frac{(1-\varepsilon)(5 - \varepsilon + 2\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{5+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)C_3\,.$$

Равенство это въ силу (77) даетъ:

$$(1-\varepsilon)(a', a')_1 + \varepsilon\,(b, a')_1 = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-\varepsilon)(a', a)_1 + \varepsilon\,(b\,,\,a)_1 = \\ &= -\frac{6\pi(3+\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{6\pi(2-\varepsilon)(5-\varepsilon+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{18\pi(1-2\varepsilon)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ &(1-\varepsilon)(a', b')_1 + \varepsilon\,(b\,,\,b')_1 = \\ &= -\frac{12\pi}{\varepsilon^2} + \frac{6\pi(1-\varepsilon)(5-\varepsilon+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{6\pi(2-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2}.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \, (84)$$

Намъ остается теперь составить выраженіе для $Q_1(2\pi)$. Но такъ-какъ мы встрѣтимъ надобность только въ членахъ этого выраженія, зависящихъ отъ постоянныхъ C_2 и C_4, то въ послѣдующемъ вычисленіи опускаемъ члены съ постоянными C_1 и C_3.

Имѣемъ:

$$\int_0^{2\pi} R_1 d\vartheta = -6\pi^2 C_2 + \frac{6\pi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_4 + \dots,$$

$$2(1+\varepsilon)^2(2R_1 - uP_0)Vv' =$$

$$= -3C_2(2\vartheta - \varepsilon\sin\vartheta)\left\{2(1-\cos\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta) + \varepsilon^2\sin^2\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{3\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\right\} +$$

$$+ 6C_4\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left\{2(1-\cos\vartheta)(1-\varepsilon\cos\vartheta) + \varepsilon^2\sin^2\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{3\varepsilon\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\vartheta(1-\varepsilon\cos\vartheta)\right\} + \dots,$$

$$\int_0^{2\pi}(2R_1 - uP_0)Vv'd\vartheta =$$

$$= -3\pi^2\left(\frac{3(1-4\varepsilon+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 1\right)C_2 + \frac{3\pi^2}{(1+\varepsilon)^2}\left(\frac{\varepsilon^2+2\varepsilon-2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 6\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)C_4 + \dots,$$

$$2\,V(2\pi)\int_0^{2\pi}(2R_1 - uP_0)v'd\vartheta =$$

$$= \frac{72\pi^2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_2 - \frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)C_4 + \dots,$$

откуда по (68)

$$Q_1(2\pi)=\frac{18\pi^2(1+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_2-\frac{18\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,C_4+\ldots,$$

а отсюда вслѣдствіе (77):

$$(b\,,b)_1=-\frac{18\pi^2}{(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,,\;\ldots\ldots\ldots\;(85)$$

$$(b,a')_1=\frac{36\pi^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Послѣдняя формула въ силу (83) даетъ:

$$(a',a')_1=-\frac{36\pi^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\;\ldots\ldots\ldots\;(86)$$

Теперь мы имѣемъ всѣ необходимыя формулы для вычисленія величинъ K_1 и N_3.

Согласно (70), имѣемъ:

$$K_1=(a\,,a)_1+(a',a')_1+(b\,,b)_1+(b',b')_1\,,$$

и формула эта вслѣдствіе (82), (85) и (86) даетъ:

$$K_1=-\frac{36\pi^2(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}\,.$$

Отсюда видно, что первое изъ условій (75) всегда удовлетворено.

Затѣмъ, замѣчая, что изъ (82) и (78) слѣдуетъ

$$\frac{(a\,,a)_1}{(a\,,b')_1}=\frac{(b',a)_1}{(b',b')_1}=\frac{(a',a)_0}{(a',b')_0}\,,$$

приводимъ формулу (76) къ виду:

$$N_3=\begin{vmatrix} 0 & ,(a',a)_0\,, & (b\,,a)_1+k\,(a',a)_1\,, & 0 \\ (a\,,a')_1, & 0 & ,(b,a')_1+k\,(a',a')_1\,, & (b',a')_1 \\ (a\,,b)_1\,, & 0 & ,(b\,,b)_1+k\,(a',b)_1\,, & (b'\,,b)_1 \\ 0 & ,(a',b')_0\,, & (b\,,b')_1+k\,(a',b')_1\,, & 0 \end{vmatrix},$$

гдѣ, согласно (79), $k=\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Отсюда находимъ:

$$N_3 = \begin{vmatrix} (a,a')_1\,, & (b',a')_1 \\ (a\,,\,b)_1\,, & (b',\,b)_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a',\,a)_0\,, & (b\,,\,a)_1 + \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}(a',\,a)_1 \\ (a',b')_0\,, & (b,b')_1 + \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}(a',b')_1 \end{vmatrix},$$

что вслѣдствіе (78), (82) и (84) приводится къ:

$$N_3 = \left\{ \frac{36\pi^2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)} \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right) \right\}^2.$$

Второе изъ условій (75), слѣдовательно, также всегда удовлетворено.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

В ъ с л у ч а ѣ п р и т я ж е н і я, о б р а т н о п р о п о р ц і о н а л ь н а г о к в а д р а т у р а з с т о я н і я, в с я к о е п е р і о д и ч е с к о е Л а п л а с о в о д в и ж е н і е у с т о й ч и в о, е с л и м а с с а о д н о й и з ъ т о ч е к ъ д о с т а т о ч н о в е л и к а с р а в н и т е л ь н о с ъ м а с с а м и д в у х ъ о с т а л ь н ы х ъ.

13. Обращаемся къ изложенію второго общаго способа вычисленія инваріантовъ A и B.

Прежде всего выведемъ нѣкоторыя вспомогательныя формулы.

Положимъ, какъ въ параграфѣ 7,

$$\frac{1}{\varrho} = s\,, \quad \frac{1}{\varrho_0} = s_0\,, \quad \frac{1}{\varrho_1} = s_1\,,$$

$$\int f(\varrho)\,d\varrho = \varphi(s)\,.$$

Дифференціальное уравненіе, связывающее s и ϑ, будетъ:

$$\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = h - s^2 - 2g\varphi(s)\,,$$

гдѣ

$$h = \frac{s_0{}^2\varphi(s_1) - s_1{}^2\varphi(s_0)}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)}, \qquad 2g = \frac{s_0{}^2 - s_1{}^2}{\varphi(s_1) - \varphi(s_0)}\,.$$

Положимъ далѣе

$$\frac{s_0+s_1}{2} = \sigma\,, \qquad \frac{s_0-s_1}{s_0+s_1} = \varepsilon\,.$$

Когда $\varepsilon = 0$, разсматриваемое періодическое движеніе обращается въ постоянное. Вообще ε будетъ нѣкоторою положительною правильною дробью. Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, это есть эксцентриситетъ эллипса, описываемаго каждою изъ трехъ точекъ по отношенію къ одной изъ двухъ остальныхъ.

Введемъ вмѣсто ϑ новую независимую перемѣнную ψ, полагая

$$s=\sigma(1-\varepsilon\cos\psi)\,,$$

которую опредѣлимъ болѣе точнымъ образомъ условіемъ, чтобы ψ обращалась въ нуль одновременно съ ϑ, и чтобы ϑ была возрастающею функціей ψ, когда послѣдняя переходитъ черезъ вещественныя значенія.

Будемъ имѣть:

$$s_0=\sigma(1+\varepsilon)\,,\qquad s_1=\sigma(1-\varepsilon)\,.$$

Предположимъ функцію $\varphi(s)$ такою, чтобы функція $\varphi(\sigma+\zeta)$ при достаточно маломъ ζ была разложима въ абсолютно сходящійся рядъ:

$$\varphi(\sigma+\zeta)=\varphi(\sigma)+\zeta\varphi'(\sigma)+\frac{\zeta^2}{1.2}\varphi''(\sigma)+\ldots.$$

Тогда, означая для сокращенія $\varphi(\sigma)$, $\varphi'(\sigma)$ и т. д. черезъ φ, φ' и т. д., и полагая

$$\cos\psi=t\,,$$

будемъ имѣть слѣдующія разложенія

$$\varphi(s)=\varphi-\sigma\varepsilon t\varphi'+\frac{\sigma^2\varepsilon^2t^2}{1.2}\varphi''-\frac{\sigma^3\varepsilon^3t^3}{1.2.3}\varphi'''+\ldots\,,$$

$$\varphi(s_0)=\varphi+\sigma\varepsilon\varphi'+\frac{\sigma^2\varepsilon^2}{1.2}\varphi''+\frac{\sigma^3\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''+\ldots\,,$$

$$\varphi(s_1)=\varphi-\sigma\varepsilon\varphi'+\frac{\sigma^2\varepsilon^2}{1.2}\varphi''-\frac{\sigma^3\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''+\ldots\,,$$

абсолютно сходящіяся для всякаго вещественнаго ψ и для всякаго ε, модуль котораго достаточно малъ.

Мы будемъ предполагать, что $\varphi'(\sigma)$ отлична отъ нуля. Предположеніе это равносильно тому, что $f\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ не нуль.

Полагая

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\frac{\sigma^n\varphi^{(n+1)}}{\varphi'}=\Phi_n\,,\quad\ldots\ldots\ldots(87)$$

вслѣдствіе этихъ разложеній находимъ:

$$g = -\frac{\sigma}{\varphi'}\,\frac{1}{1+\sum\limits_{1}^{\infty}\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Далѣе, имѣемъ:

$$[\varphi(s_0)-\varphi(s_1)]\,[h-s^2-2g\varphi(s)] =$$

$$= 2\sigma^3\varepsilon^3\sin^2\psi(\varphi'-\sigma\varphi'')(1+T)\,, \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

гдѣ

$$(\varphi'-\sigma\varphi'')T =$$

$$= \varphi' \sum_{1}^{\infty}\left\{2\Phi_{2n}\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}\,t\,\varepsilon^{2n-1} + \left(\Phi_{2n} - 2\Phi_{2n+1}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\right)\varepsilon^{2n}\right\}.$$

Отсюда, замѣчая, что для достаточно малаго ε

$$\frac{\varphi(s_0)-\varphi(s_1)}{\varphi'} > 0\,,$$

приходимъ къ заключенію, что для возможности періодическихъ движеній, безконечно близкихъ къ постоянному, соотвѣтствующему данному σ, необходимо условіе:

$$1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'} \geqq 0\,.$$

Это условіе, приводящееся къ виду:

$$3+\frac{f'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma f\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \geqq 0\,,$$

мы всегда будемъ предполагать удовлетвореннымъ со знакомъ неравенства, ибо случай, когда

$$3+\frac{f'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma f\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = 0$$

вслѣдствіе выбора нѣкотораго опредѣленнаго значенія σ, не представляетъ интереса. Если же это равенство удовлетворено для всякаго σ, то

$$f(\varrho)=\frac{\alpha}{\varrho^3},$$

гдѣ α постоянная; а въ послѣднемъ случаѣ между Лапласовыми движеніями не можетъ быть періодическихъ.

Полагая

$$\sqrt{1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'}}=k,$$

получимъ:

$$k^2T=\sum_1^\infty\left\{2\Phi_{2n}\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}t\,\varepsilon^{2n-1}+\left(\Phi_{2n}-2\Phi_{2n+1}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\right)\varepsilon^{2n}\right\}. \quad (90)$$

Затѣмъ, полагая

$$\frac{k}{\sqrt{1+\sum\limits_1^\infty\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}}}=l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

найдемъ:

$$\frac{d\psi}{d\vartheta}=l\sqrt{1+T}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

откуда

$$\vartheta=\frac{1}{l}\int\limits_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1+T}},$$

и слѣдовательно

$$\Omega=\frac{1}{l}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1+T}}.$$

Увеличенію ψ на 2π будетъ соотвѣтствовать увеличеніе ϑ на Ω.

Мы должны еще составить формулы для разложенія функціи u.

Формула (14) даетъ:

$$u=-g\left(3\,\frac{\varphi'(s)}{s}+\varphi''(s)\right).$$

Поэтому замѣчая, что

$$\frac{3\varphi'(s)+s\varphi''(s)}{\varphi'}=$$

$$=4-k^2+\sum_1^\infty(-1)^n(n+1)\Big((n+3)\Phi_n+(n+2)\Phi_{n+1}\Big)\,t^n\,\varepsilon^n\,,$$

и полагая для сокращенія:

$$S=\sum_1^\infty(-1)^n(n+1)\Big((n+3)\Phi_n+(n+2)\Phi_{n+1}\Big)\,t^n\,\varepsilon^n\,,\quad . \; . \; (93)$$

вслѣдствіе (88) находимъ:

$$u=\frac{4-k^2+S}{\left(1+\sum\limits_1^\infty\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}\right)(1-\varepsilon t)}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(94)$$

Положимъ теперь

$$\frac{d\vartheta}{d\psi}=\vartheta' \quad \text{и} \quad \frac{d^2\vartheta}{d\psi^2}=\vartheta''\,.$$

Тогда преобразованія уравненій (29) для независимой перемѣнной ψ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2X}{d\psi^2}-\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\frac{dX}{d\psi}-2\vartheta'\frac{dY}{d\psi}-(1-\lambda)u\vartheta'^2X=0\,,\\&\frac{d^2Y}{d\psi^2}-\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\frac{dY}{d\psi}+2\vartheta'\frac{dX}{d\psi}-\lambda u\vartheta'^2Y=0\,.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(95)$$

Коэффиціенты въ этихъ уравненіяхъ суть періодическія функціи ψ съ періодомъ 2π. При томъ, для достаточно малыхъ значеній модуля ε и для значеній ψ, достаточно близкихъ къ вещественнымъ, это суть синектичныя функціи ψ и ε. Поэтому къ уравненіямъ (95) можетъ быть приложена общая теорема параграфа 9, если за параметръ α принять величину ε.

Для приложенія этой теоремы къ нашимъ уравненіямъ должно составить разложенія по восходящимъ степенямъ ε трехъ функцій:

$$\left.\begin{aligned}&k^2u\vartheta'^2=\frac{4-k^2+S}{(1+T)(1-\varepsilon t)}\,,\\&k\vartheta'=\frac{\sqrt{1+\sum\limits_1^\infty\Phi_{2n}\varepsilon^{2n}}}{\sqrt{1+T}}\,,\\&k^2\frac{\vartheta''}{\vartheta'}=-\frac{k^2T'}{2(1+T)}\,,\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(96)$$

гдѣ T' есть производная функціи T по ψ.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} k^2 u \vartheta'^2 &= 4 - k^2 + \sum_1^\infty u_n \varepsilon^n , \\ k\vartheta' &= 1 + \sum_1^\infty v_n \varepsilon^n , \\ k^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta'} &= \sin\psi \sum_1^\infty w_n \varepsilon^n , \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

суть эти разложенія. На основаніи предыдущихъ формулъ нетрудно убѣдиться, что здѣсь u_n, v_n и w_n суть раціональныя цѣлыя функціи t, изъ которыхъ первыя двѣ суть n-ой, послѣдняя $(n-1)$-ой степени.

Ряды (97) будутъ абсолютно сходящимися для всякаго ψ, достаточно близкаго къ какому-либо вещественному значенію, пока $\operatorname{mod}\varepsilon$ достаточно малъ. Между прочимъ ряды эти будутъ абсолютно сходящимися для всякаго вещественнаго ψ, пока модуль ε менѣе нѣкотораго предѣла E.

Отсюда на основаніи упомянутой теоремы заключаемъ, что инваріанты A и B могутъ быть представлены подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ ε и абсолютно сходящихся, пока $\varepsilon < E$. Для $\varepsilon = E$ ряды эти могутъ дѣлаться расходящимися.

Замѣтимъ одно свойство этихъ разложеній A и B.

Изъ формулъ (90) и (93) видно, что функціи

$$T, \quad S, \quad \frac{T'}{\varepsilon \sin\psi}$$

не мѣняются вслѣдствіе одновременной замѣны t черезъ $-t$ и ε черезъ $-\varepsilon$. Поэтому коэффиціенты въ уравненіяхъ (95), а слѣдовательно и самыя уравненія не мѣняются при одновременной замѣнѣ ε черезъ $-\varepsilon$ и ψ черезъ $\psi + \pi$.

Отсюда слѣдуетъ, что если

$$X = F(\psi), \qquad Y = \Phi(\psi)$$

есть какая-либо система рѣшеній уравненій (95), то

$$X = F(\psi + \pi), \qquad Y = \Phi(\psi + \pi)$$

представитъ нѣкоторую систему рѣшеній для уравненій, получаемыхъ изъ (95) замѣною ε черезъ $-\varepsilon$.

Отсюда заключаемъ, что корни характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго уравненіямъ (95) и періоду 2π, при замѣнѣ ε черезъ

$-\varepsilon$ переходятъ одинъ въ другой, а слѣдовательно инваріанты A и B при этой замѣнѣ не мѣняются.

Вслѣдствіе этого разложенія A и B по восходящимъ степенямъ ε будутъ содержать всегда только четныя степени ε.

14. Замѣняемъ коэффиціенты въ уравненіяхъ (95) ихъ разложеніями (97). Затѣмъ полагаемъ

$$X = \sum_0^\infty P_n \varepsilon^n, \qquad Y = \sum_0^\infty Q_n \varepsilon^n,$$

и разсматриваемъ P_n и Q_n, какъ функціи ψ, не зависящія отъ ε. Тогда, означая дифференцированія по ψ значками, получимъ для опредѣленія этихъ функцій слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} k^2 P_0'' - 2k\,Q_0' - (1-\lambda)(4-k^2)\,P_0 = 0\,, \\ k^2 Q_0'' + 2k\,P_0' - \lambda(4-k^2) Q_0 = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (98)$$

и для $n > 0$

$$\left.\begin{aligned} k^2 P_n'' - 2k\,Q_n' - (1-\lambda)(4-k^2)\,P_n = S_n\,, \\ k^2 Q_n'' + 2k\,P_n' - \lambda(4-k^2)\,Q_n = T_n\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} S_n &= (1-\lambda)\sum_{j=0}^{j=n-1} u_{n-j}\,P_j + \sin\psi \sum_{j=0}^{j=n-1} w_{n-j}\,P_j' + 2k\sum_{j=0}^{j=n-1} v_{n-j}\,Q_j', \\ T_n &= \lambda \sum_{j=0}^{j=n-1} u_{n-j}\,Q_j + \sin\psi \sum_{j=0}^{j=n-1} w_{n-j}\,Q_j' - 2k\sum_{j=0}^{j=n-1} v_{n-j}\,P_j'. \end{aligned}\right\} \quad . \ (100)$$

Непосредственное приложеніе теоремы параграфа 9 требуетъ, чтобы при интегрированіи каждой изъ системъ уравненій (99) постоянныя произвольныя опредѣлялись изъ условія, чтобы функціи P_n, P_n', Q_n, Q_n' обращались въ нуль для нѣкотораго частнаго значенія ψ, одного и того-же для всякаго n, положимъ, $\psi = 0$. Если при томъ постоянныя интегрированія уравненій (98) опредѣлены изъ условія, чтобы для $\psi = 0$ функціи P_0, P_0', Q_0, Q_0' соотвѣтственно принимали значенія X_0, X_0', Y_0, Y_0', то постоянныя $P_n(2\pi), P_n'(2\pi)$, $Q_n(2\pi), Q_n'(2\pi)$ найдутся подъ видомъ линейныхъ и однородныхъ функцій постоянныхъ X_0, X_0', Y_0, Y_0'. Затѣмъ при помощи коэффиціентовъ этихъ функцій составится характеристичное уравненіе, какъ это было показано въ концѣ параграфа 10.

Этотъ способъ вычисленія инваріантовъ A и B, вполнѣ аналогичный изложенному въ параграфахъ 10 и 11, можно приложить напримѣръ къ случаю $k=2$, когда интегрированіе уравненій (98) и (99) даетъ:

$$\mathrm{P}_0 = X_0 + Y_0' + X_0' \sin\psi - Y_0' \cos\psi,$$

$$\mathrm{Q}_0 = Y_0 - X_0' + X_0' \cos\psi + Y_0' \sin\psi,$$

и для $n > 0$:

$$4\mathrm{P}_n = \int_0^\psi \mathrm{T}_n d\psi + \sin\psi \int_0^\psi (\mathrm{S}_n \cos\psi - \mathrm{T}_n \sin\psi) d\psi -$$

$$- \cos\psi \int_0^\psi (\mathrm{S}_n \sin\psi + \mathrm{T}_n \cos\psi) d\psi,$$

$$4\mathrm{Q}_n = -\int_0^\psi \mathrm{S}_n d\psi + \sin\psi \int_0^\psi (\mathrm{S}_n \sin\psi + \mathrm{T}_n \cos\psi) d\psi +$$

$$+ \cos\psi \int_0^\psi (\mathrm{S}_n \cos\psi - \mathrm{T}_n \sin\psi) d\psi .$$

Вообще-же онъ ведетъ къ довольно сложнымъ вычисленіямъ. Поэтому укажемъ на другіе, болѣе общіе способы.

Предыдущій способъ даетъ для X и Y выраженія подъ видомъ линейныхъ и однородныхъ функцій постоянныхъ X_0, X_0', Y_0, Y_0', въ которыхъ коэффиціенты суть функціи ψ и ε, разлагающіяся въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, абсолютно сходящіеся для всякаго вещественнаго ψ, пока $\varepsilon < E$. Замѣнимъ въ этихъ выраженіяхъ постоянныя X_0, X_0', Y_0, Y_0' линейными и однородными независимыми между собою функціями четырехъ новыхъ постоянныхъ C_1, C_2, C_3, C_4 съ коэффиціентами, представляющими ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε и абсолютно сходящіеся, пока $\varepsilon < E$. Тогда получимъ общій интегралъ уравненій (95) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + C_4 X_4,$$

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4,$$

гдѣ X_j, Y_j суть функціи ψ и ε, разлагающіяся въ ряды прежняго вида, абсолютно сходящіеся при томъ-же условіи.

Положимъ

$$\left.\begin{aligned} X_j(\psi+2\pi) &= (j1)X_1+(j2)X_2+(j3)X_3+(j4)X_4\,,\\ X_j'(\psi+2\pi) &= (j1)X_1'+(j2)X_2'+(j3)X_3'+(j4)X_4'\,,\\ Y_j(\psi+2\pi) &= (j1)Y_1+(j2)Y_2+(j3)Y_3+(j4)Y_4\,,\\ Y_j'(\psi+2\pi) &= (j1)Y_1'+(j2)Y_2'+(j3)Y_3'+(j4)Y_4'\,, \end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (101)$$

$$(j=1\,,2\,,3\,,4)\,,$$

гдѣ (ji) суть нѣкоторыя постоянныя.

Если четыре независимыя системы частныхъ рѣшеній X_j, Y_j $(j=1\,,2\,,3\,,4)$ остаются независимыми и для $\varepsilon=0$, что мы всегда будемъ предполагать, то отсюда, когда разложенія функцій X_j, Y_j извѣстны, получимъ постоянныя (ji) подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε и абсолютно сходящихся при ε достаточно маломъ *).

Положимъ

$$(ji)=\sum_0^{\infty}(ji)_n\varepsilon^n\,,$$

$$(j\,,i=1\,,2\,,3\,,4)\,,$$

и

$$X_j=\sum_0^{\infty}\mathrm{P}_{j,n}\varepsilon^n\,,\qquad Y_j=\sum_0^{\infty}\mathrm{Q}_{j,n}\varepsilon^n\,.$$

Тогда для опредѣленія коэффиціентовъ $(ji)_n$ получимъ изъ уравненій (101) слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} (j1)_n\mathrm{P}_{1,0}+(j2)_n\mathrm{P}_{2,0}+(j3)_n\mathrm{P}_{3,0}+(j4)_n\mathrm{P}_{4,0} &= G_{j,n}\,,\\ (j1)_n\mathrm{P}_{1,0}'+(j2)_n\mathrm{P}_{2,0}'+(j3)_n\mathrm{P}_{3,0}'+(j4)_n\mathrm{P}_{4,0}' &= G_{j,n}'\,,\\ (j1)_n\mathrm{Q}_{1,0}+(j2)_n\mathrm{Q}_{2,0}+(j3)_n\mathrm{Q}_{3,0}+(j4)_n\mathrm{Q}_{4,0} &= H_{j,n}\,,\\ (j1)_n\mathrm{Q}_{1,0}'+(j2)_n\mathrm{Q}_{2,0}'+(j3)_n\mathrm{Q}_{3,0}'+(j4)_n\mathrm{Q}_{4,0}' &= H_{j,n}'\,, \end{aligned}\right\}\quad . \quad (102)$$

*) Радіусъ круга общей сходимости этихъ рядовъ вообще будетъ менѣе E.

гдѣ

$$G_{j,0} = \mathrm{P}_{j,0}(\psi + 2\pi),$$

$$G_{j,n} = \mathrm{P}_{j,n}(\psi + 2\pi) -$$

$$-\sum_{l=1}^{l=n}\left\{(j1)_{n-l}\mathrm{P}_{1,l} + (j2)_{n-l}\mathrm{P}_{2,l} + (j3)_{n-l}\mathrm{P}_{3,l} + (j4)_{n-l}\mathrm{P}_{4,l}\right\},$$

а $G_{j,n}'$, $H_{j,n}$, $H_{j,n}'$ получаются изъ выраженія $G_{j,n}$ замѣною буквы P соотвѣтственно черезъ P', Q, Q'.

Когда разложенія (ji) найдены, составимъ характеристичное уравненіе:

$$\begin{vmatrix} (11)-q, & (12), & (13), & (14) \\ (21), & (22)-q, & (23), & (24) \\ (31), & (32), & (33)-q, & (34) \\ (41), & (42), & (43), & (44)-q \end{vmatrix} = 0.$$

Сравнивая послѣднее съ (45), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} 2A &= (11)+(22)+(33)+(44), \\ 2B &= \begin{vmatrix} (11), (12) \\ (21), (22) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (11), (13) \\ (31), (33) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (11), (14) \\ (41), (44) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} (22), (23) \\ (32), (33) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (22), (24) \\ (42), (44) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (33), (34) \\ (43), (44) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Можно предположить въ упомянутыхъ выше выраженіяхъ X_0, X_0', Y_0, Y_0' черезъ постоянныя C_1, C_2, C_3, C_4 коэффиціенты цѣлыми функціями ε какой-либо степени n_1. Функціи эти могутъ быть взяты произвольно подъ тѣмъ условіемъ, чтобы опредѣлитель, составленный изъ нихъ, не обращался въ нуль при $\varepsilon = 0$. А надлежащимъ выборомъ этихъ функцій можно сдѣлать величины $\mathrm{P}_{j,n}$, $\mathrm{Q}_{j,n}$ для $n \leqq n_1$ какими угодно частными рѣшеніями уравненій (99).

Отсюда видно, что при интегрированіи уравненій (99) можно не стѣснять себя какимъ-либо напередъ поставленнымъ условіемъ для опредѣленія постоянныхъ произвольныхъ до значенія n, равнаго произвольному числу n_1. Въ каждомъ частномъ случаѣ постояннымъ этимъ можно приписывать значенія, наиболѣе упрощающія дальнѣйшія вычисленія.

Въ общемъ случаѣ можно напримѣръ вести вычисленія слѣдующимъ образомъ:

Беремъ общій интегралъ уравненій (98) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\mathrm{P}_0 = C_1 e^{p_1 i\psi} + C_2 e^{p_2 i\psi} + C_3 e^{p_3 i\psi} + C_4 e^{p_4 i\psi},$$

$$\mathrm{Q}_0 = C_1 \eta_1 i\, e^{p_1 i\psi} + C_2 \eta_2 i\, e^{p_2 i\psi} + C_3 \eta_3 i\, e^{p_3 i\psi} + C_4 \eta_4 i\, e^{p_4 i\psi},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а $p_1, p_2, p_3 = -p_1$ и $p_4 = -p_2$ суть корни уравненія

$$p^4 - p^2 + \lambda(1-\lambda)\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

которые предполагаются здѣсь всѣ различными. Наконецъ, η_j суть постоянныя, опредѣляемыя формулой

$$\eta_j = \frac{p_j^2 k^2 + (1-\lambda)(4-k^2)}{2kp_j}.$$

Изъ разсмотрѣнія формулъ (100) легко убѣждаемся, что интегрированіе каждой изъ системъ уравненій (99) можно затѣмъ вести такъ, чтобы для функцій $\mathrm{P}_{j,n}, \mathrm{Q}_{j,n}$ получались выраженія вида:

$$\mathrm{P}_{j,n} = e^{p_j i\psi} M_{j,n}, \quad \mathrm{Q}_{j,n} = e^{p_j i\psi} N_{j,n},$$

гдѣ $M_{j,n}$ и $N_{j,n}$ суть раціональныя цѣлыя функціи отъ $\sin\psi$, $\cos\psi$ и ψ. Функціи эти можно находить по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, замѣчая, что степень ихъ относительно $\sin\psi$ и $\cos\psi$ будетъ n, а относительно ψ — вообще не выше $n-1$.

Пусть n_1 есть наибольшее значеніе n, до котораго вычисленіе ведется по этому плану. Тогда для $n \leqq n_1$ изъ уравненій (102), очевидно, найдемъ:

$$(jl)_n = 0,$$

если j и l различны, и

$$(jj)_n \mathrm{P}_{j,0} = \mathrm{P}_{j,n}(\psi + 2\pi) - \sum_{l=1}^{l=n} (jj)_{n-l} \mathrm{P}_{j,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Легко видѣть, что вообще можно полагать $n_1 = \infty$. Въ самомъ дѣлѣ, если корни характеристичнаго уравненія для всѣхъ комплексныхъ значеній ε, модули которыхъ не превосходятъ нѣкотораго предѣла $E_1 \leqq E$, различны, то корни эти разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, абсолютно сходящіеся, пока $\varepsilon < E_1$. Съ другой стороны изъ самаго характеристичнаго уравненія видно, что если для j и l различныхъ и для $n \leqq n_1$

$$(jl)_n = 0 \, ,$$

то разложенія эти до членовъ съ $2n_1$-ой степенью ε включительно суть:

$$\sum_{n=0}^{n=2n_1} (jj)_n \varepsilon^n \, ,$$

$$(j = 1 \, , \; 2 \, , \; 3 \, , \; 4) \, .$$

Такимъ образомъ, если всѣ корни характеристичнаго уравненія для $\varepsilon = 0$ различны, для чего необходимо и достаточно, чтобы разности между корнями уравненія (104) не были цѣлыми числами, то предполагая $n_1 = \infty$ и составляя изъ вычисляемыхъ въ этомъ предположеніи величинъ $(jj)_n$ ряды

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (jj)_n \varepsilon^n \, , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

найдемъ, что послѣдніе для достаточно малыхъ значеній ε будутъ абсолютно сходящимися и представятъ разложенія по восходящимъ степенямъ ε корней характеристичнаго уравненія.

Радіусомъ круга сходимости этихъ рядовъ будетъ или наименьшій изъ непревосходящихъ E модулей тѣхъ значеній ε, для которыхъ по крайней мѣрѣ одно изъ условій (52) есть равенство, или E, когда такихъ значеній ε не существуетъ.

Замѣтимъ, что для нечетныхъ n всѣ $(jj)_n$, вычисляемыя въ разсматриваемомъ предположеніи, будутъ равны нулю, ибо изъ того обстоятельства, что разложенія A и B содержатъ только четныя степени ε, слѣдуетъ, что тѣмъ-же свойствомъ будутъ обладать и разложенія (106).

15. Величины A и B вообще зависятъ отъ σ. Въ случаѣ-же притяженія, пропорціональнаго какой-либо степени разстоянія, зависимость эта исчезаетъ, потому что, если

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^N} \, ,$$

то

$$\varphi' = - \alpha \, \sigma^{N-2} \, ,$$

и формула (87) даетъ:

$$\Phi_n = \frac{(N-2)(N-3)\ldots(N-n-1)}{1.2.3\ldots(n+1)}\ .$$

Въ этомъ случаѣ A и B зависятъ только отъ трехъ параметровъ: N, λ и ε.

Уравненіе, которому удовлетворяютъ s_0 и s_1, если положимъ

$$s = \sqrt{a}\ g^{\frac{1}{3-N}}\ \zeta\,,$$

принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$\frac{2}{N-1}\,\zeta^{N-1} - \zeta^2 + h_1 = 0\ ,$$

если $N \gtrless 1$, и

$$2\log\zeta - \zeta^2 + h_1 = 0\ ,$$

если $N = 1$. Здѣсь h_1 представляетъ произвольное число.

Отсюда видно, что при $N \geqq 3$ въ числѣ Лапласовыхъ движеній не можетъ быть періодическихъ. Напротивъ, при $N \leqq 1$ всѣ Лапласовы движенія суть періодическія.

Покажемъ, какими условіями опредѣляется при разсматриваемомъ законѣ притяженія величина E — радіусъ круга сходимости разложеній A и B по восходящимъ степенямъ ε.

Величина E есть высшій предѣлъ модулей тѣхъ значеній ε, для которыхъ при всякомъ вещественномъ t, лежащемъ между -1 и $+1$, ряды (97) суть абсолютно сходящіеся.

Обращаясь къ формуламъ (96), видимъ, что это есть также высшій предѣлъ модулей тѣхъ значеній ε, для которыхъ при такихъ-же значеніяхъ t разложенія функцій

$$\frac{4-k^2+S}{1-\varepsilon t}\,, \qquad T'\,, \ldots\ldots\ldots \tag{107}$$

$$\sqrt{1+\sum_0^\infty \Phi_{2n}\varepsilon^{2n}}\,, \ldots\ldots\ldots \tag{108}$$

$$(1+T)^{-1}\ ,\ (1+T)^{-\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots \tag{109}$$

суть абсолютно сходящіяся.

Замѣчая, что

$$k^2 = 1 - \frac{\sigma\varphi''}{\varphi'} = 3 - N\,,$$

и принимая въ разсчетъ выраженіе (93) для S, находимъ:

$$\frac{4-k^2+S}{1-\varepsilon t}=\frac{N+1}{(1-\varepsilon t)^{3-N}}.$$

Далѣе, изъ (89) получаемъ:

$$1+T=\frac{4(1-\varepsilon t)^{N-1}-2(1+\varepsilon)^{N-1}-2(1-\varepsilon)^{N-1}+[2t+\varepsilon(1-t^2)][(1+\varepsilon)^{N-1}-(1-\varepsilon)^{N-1}]}{2(3-N)(N-1)\varepsilon^2(1-t^2)}.$$

Отсюда видно, что при разсматриваемыхъ значеніяхъ t разложенія функцій (107) суть абсолютно сходящіяся, пока $\mathrm{mod}\,\varepsilon<1$.

При томъ-же условіи и разложенія функцій: T и

$$\frac{(1+\varepsilon)^{N-1}-(1-\varepsilon)^{N-1}}{2(N-1)\varepsilon}=1+\sum_1^\infty \Phi_{2n}\varepsilon^{2n}$$

суть абсолютно сходящіяся.

Поэтому радіусомъ круга сходимости разложенія функціи (108) служитъ или наименьшій изъ непревосходящихъ 1 модулей корней уравненія

$$\frac{(1+\varepsilon)^{N-1}-(1-\varepsilon)^{N-1}}{2(N-1)\varepsilon}=0,$$

или 1, когда уравненіе это такихъ корней не имѣетъ. Назовемъ этотъ радіусъ черезъ ε_0.

Подобнымъ-же образомъ для всякаго даннаго t, лежащаго между предѣлами -1 и $+1$ включительно, радіусомъ круга сходимости разложеній каждой изъ функцій (109) будетъ или наименьшій изъ непревосходящихъ 1 модулей корней уравненія

$$1+T=0$$

или 1, если послѣднее не имѣетъ такихъ корней. Этотъ радіусъ будетъ нѣкоторою функціей t, наименьшее значеніе которой въ разсматриваемыхъ предѣлахъ измѣняемости t назовемъ черезъ ε_1.

Наименьшее изъ чиселъ ε_0 и ε_1 и будетъ E.

Останавливаться на опредѣленіи числа E для всякаго даннаго N не будемъ. Замѣтимъ только, что для случая $3>N>2$ предыдущія формулы весьма легко даютъ $E=1$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\Phi_{2n} = -(N-2)\frac{(3-N)(4-N)\ldots(2n+1-N)}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$

всегда отрицательно, а потому при $\mathrm{mod}\,\varepsilon < 1$

$$\mathrm{mod}\left(1+\sum_1^\infty \Phi_{2n}\varepsilon^{2n}\right) > 1+\sum_1^\infty \Phi_{2n} = \frac{2^{N-2}}{N-1}\,.$$

Точно такъ-же, замѣчая, что Φ_{2n+1} въ разсматриваемомъ случаѣ положительно, изъ разложенія (90) при условіи $\mathrm{mod}\,\varepsilon < 1$ заключаемъ:

$$\mathrm{mod}(1+T) > 1+(T)_{t=\varepsilon=1} = 0\,.$$

При $N=2$ конечно также $E=1$.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ наши формулы значительно упрощаются вслѣдствіе того, что $\Phi_n = 0$, $k=1$. Уравненіе (92) при этомъ даетъ $\psi = \vartheta$.

Уравненія (99) обращаются въ слѣдующія:

$$\frac{d^2\mathrm{P}_n}{d\vartheta^2} - 2\frac{d\mathrm{Q}_n}{d\vartheta} - 3(1-\lambda)\mathrm{P}_n = 3(1-\lambda)\sum_{l=0}^{l=n-1}\cos^{n-l}\vartheta\,\mathrm{P}_l\,,$$

$$\frac{d^2\mathrm{Q}_n}{d\vartheta^2} + 2\frac{d\mathrm{P}_n}{d\vartheta} - 3\lambda\mathrm{Q}_n = 3\lambda\sum_{l=0}^{l=n-1}\cos^{n-l}\vartheta\,\mathrm{Q}_l\,.$$

16. Возможность разложенія A и B въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, для достаточно малыхъ значеній послѣдняго, позволяетъ рѣшать вопросы объ устойчивости періодическихъ Лапласовыхъ движеній, достаточно близкихъ къ постояннымъ.

Возвращаясь опять къ произвольному закону притяженія, положимъ, что при какихъ-либо данныхъ λ и σ *неравенства* (52) удовлетворены для $\varepsilon = 0$. Изъ этого мы заключимъ, что при тѣхъ-же λ и σ неравенства эти удовлетворятся также и для другихъ достаточно малыхъ значеній ε. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, не только постоянное, но и достаточно близкія къ нему непостоянныя періодическія движенія, соотвѣтствующія тому-же σ, устойчивы.

Напротивъ, если при данныхъ λ и σ для $\varepsilon = 0$ удовлетворено хотя одно изъ неравенствъ, противоположныхъ (52), то же будетъ и для достаточно малыхъ значеній ε, а слѣдовательно періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, не будутъ устойчивыми.

*

Когда для $\varepsilon = 0$ удовлетворяются только нѣкоторыя изъ неравенствъ (52), а остальныя переходятъ въ равенства, разсматриваемыя движенія могутъ быть какъ устойчивыми, такъ и неустойчивыми.

Займемся рѣшеніемъ этого вопроса. Но прежде опредѣлимъ всѣ случаи, въ которыхъ только-что упомянутое обстоятельство можетъ представиться.

Неравенства (52) могутъ обращаться въ равенства только въ случаяхъ, когда по крайней мѣрѣ два изъ корней характеристичнаго уравненія дѣлаются равными. А для того, чтобы послѣднее имѣло мѣсто при $\varepsilon = 0$, уравненіе (104) должно имѣть по крайней мѣрѣ одну пару корней, разность между которыми есть число цѣлое.

Положимъ

$$\lambda(1-\lambda)\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 = \tau\,.$$

Мы будемъ предполагать $\tau \leqq \frac{1}{4}$, потомучто должны разсмотрѣть только случай, когда корни уравненія (104) вещественны.

Пусть эти корни суть: $p_1, p_2, -p_1$ и $-p_2$.

Предполагая $p_2 \geqq p_1 \geqq 0$, легко убѣдиться, что p_1 и p_2 удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq p_1 \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq p_2 \leqq 1\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (110)$$

Числовыя величины всевозможныхъ разностей, которыя могутъ быть составлены изъ этихъ четырехъ корней, взятыхъ попарно, приводятся къ четыремъ:

$$p_2 - p_1\,, \qquad p_1 + p_2\,, \qquad 2p_1\,, \qquad 2p_2\,.$$

Предположеніе, что одна изъ этихъ величинъ есть число цѣлое, влечетъ за собою вслѣдствіе (110) одно изъ шести слѣдующихъ равенствъ:

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= 0\,, \\ p_2 - p_1 &= 1\,, \\ p_1 + p_2 &= 1\,, \\ 2p_1 &= 0\,, \\ 2p_1 &= 1\,, \\ 2p_2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ равенствъ даетъ $\tau = \frac{1}{4}$. Изъ второго выводимъ: $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, и слѣд. $\tau = 0$. Третье требуетъ совмѣстнаго существованія двухъ равенствъ

$$p_2{}^4 - p_2{}^2 + \tau = 0\,,$$

$$(1 - p_2)^4 - (1 - p_2)^2 + \tau = 0\,,$$

изъ которыхъ въ силу (110) слѣдуетъ: $p_2 = 1$, $\tau = 0$. Четвертое приводитъ къ тому-же результату. Пятое даетъ $\tau = \frac{3}{16}$, и шестое: $\tau = 0$.

Такимъ образомъ получаемъ три слѣдующихъ случая:

$$\text{I.} \qquad \tau = \frac{1}{4}\,; \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$$\text{II.} \qquad \tau = \frac{3}{16}\,; \quad p_1 = \frac{1}{2}\,, \quad p_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

$$\text{III.} \qquad \tau = 0\,; \quad p_1 = 0\,, \quad p_2 = 1\,.$$

Это суть единственно возможные случаи, въ которыхъ для $\varepsilon = 0$ нѣкоторыя изъ условій (52) обращаются въ равенства, а остальныя остаются удовлетворенными.

Равенства эти суть слѣдующія:

$$\text{I.} \qquad A^2 = 2(B - 1)\,.$$

$$\text{II.} \qquad A^2 = \left(\frac{B+1}{2}\right)^2.$$

$$\text{III.} \qquad B = 3\,, \quad 2(B - 1) = A^2 = \left(\frac{B+1}{2}\right)^2.$$

Случай III возможенъ только при одномъ изъ трехъ предположеній: $k^2 = 4$, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, изъ которыхъ два послѣднихъ не различаются существенно между собою.

Перваго предположенія разсматривать не будемъ, потомучто случай, когда $k^2 = 4$ вслѣдствіе выбора опредѣленнаго значенія σ, не представляетъ особаго интереса. Если-же $k^2 = 4$ для всякаго σ, то притяженіе пропорціонально первой степени разстоянія, а въ этомъ случаѣ a priori извѣстно, что всѣ Лапласовы движенія устойчивы.

Въ предположеніи $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ результатъ извѣстенъ заранѣе.

Поэтому случая III нѣтъ надобности разсматривать, и вмѣсто этого случая мы разсмотримъ тотъ, когда, при k^2 отличномъ отъ 4, λ есть величина безконечно-малая, ибо здѣсь представляется слѣдующій вопросъ:

Когда λ, не будучи равнымъ нулю, достаточно-мало, неравенства (52), очевидно, удовлетворяются для $\varepsilon = 0$. Поэтому періодическія движенія, достаточно близкія къ постояннымъ, въ этомъ случаѣ устойчивы. Пусть E_1 есть высшій предѣлъ, котораго при данныхъ λ и σ не должно превосходить ε для сохраненія устойчивости. Величина E_1 будетъ нѣкоторою функціей λ и σ. Когда, при постоянномъ σ, λ стремится къ нулю, функція эта приближается къ нѣкоторому предѣлу, который въ иныхъ случаяхъ можетъ быть нулемъ, въ другихъ — отличнымъ отъ нуля. Вопросъ о томъ, когда имѣетъ мѣсто тотъ или другой изъ этихъ двухъ случаевъ, мы и предложимъ себѣ для рѣшенія.

Важность рѣшенія этого вопроса обусловливается тѣмъ, что только въ случаяхъ второго рода существуютъ такія отличныя отъ нуля положительныя числа ε' и λ', что всѣ періодическія движенія, соотвѣтствующія одной и той-же величинѣ σ, для которыхъ $\varepsilon < \varepsilon'$, устойчивы, когда λ, будучи отличнымъ отъ нуля, не превосходитъ λ'.

Начнемъ съ разсмотрѣнія случая I.

17. Въ случаѣ I

$$\tau = \lambda(1-\lambda)\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

Такъ-какъ $\lambda(1-\lambda)$ не можетъ выходить изъ предѣловъ 0 и $\frac{1}{4}$, то τ не можетъ превосходить величины $\frac{1}{4}\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2$. Поэтому разсматриваемый случай можетъ имѣть мѣсто только при условіи

$$\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \geqq 1\,,$$

приводящемся къ

$$k^2 \leqq 2\,.$$

Условіе это и будемъ здѣсь предполагать удовлетвореннымъ.

Мы будемъ разсматривать случай I, какъ предѣльный общаго, когда λ при постоянномъ σ приближается къ нѣкоторому значенію λ_0, удовлетворяющему уравненію (111). Законность такой точки зрѣнія слѣдуетъ изъ того, что согласно теоремѣ параграфа 9 величины A и B могутъ быть представлены подъ видомъ абсолютно сходящихся рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $\lambda - \lambda'$, гдѣ λ' произвольное число.

Чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, будемъ считать λ_0 не превосходящимъ $\frac{1}{2}$.

Положимъ

$$A=\sum_0^\infty A_n\varepsilon^{2n}, \qquad B=\sum_0^\infty B_n\varepsilon^{2n},$$

и начнемъ съ составленія общихъ формулъ для вычисленія четырехъ величинъ: A_0, A_1, B_0 и B_1.

Формулы (90), (93) и (96), если примемъ въ разсчетъ, что $\Phi_1=\frac{1-k^2}{2}$, даютъ слѣдующія выраженія функцій $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$, входящихъ въ разложенія (97):

$$u_1=u_{11}t, \qquad v_1=v_{11}t, \qquad w_1=w_{10},$$

$$u_2=u_{20}+u_{22}t^2, \quad v_2=v_{20}+v_{22}t^2, \quad w_2=w_{21}t,$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
u_{11}&=3(k^2-2\Phi_2)-2\frac{4-k^2}{k^2}\Phi_2,\\
v_{11}&=-\frac{1}{k^2}\Phi_2,\\
w_{10}&=\Phi_2,\\
u_{20}&=\frac{4-k^2}{k^2}(2\Phi_3-\Phi_2),\\
u_{22}&=2\frac{4+5k^2}{k^2}\Phi_3+\frac{3}{k^2}(k^2-2\Phi_2)^2+15\Phi_2+\frac{4(4-k^2)}{k^4}\Phi_2{}^2,\\
v_{20}&=\frac{1}{k^2}\Phi_3+\frac{k^2-1}{2k^2}\Phi_2,\\
v_{22}&=\frac{1}{k^2}\Phi_3+\frac{3}{2k^4}\Phi_2{}^2.
\end{aligned}\right\}\quad(112)$$

Постоянная w_{21} намъ не понадобится.

Вслѣдствіе этого формулы (100) даютъ:

$$\begin{aligned}
S_1&=(1-\lambda)u_{11}t\,P_0+w_{10}\sin\psi\,P_0'+2k\,v_{11}t\,Q_0',\\
T_1&=\lambda u_{11}t\,Q_0+w_{10}\sin\psi\,Q_0'-2k\,v_{11}t\,P_0',\\
S_2&=(1-\lambda)[(u_{20}+u_{22}t^2)P_0+u_{11}t\,P_1]+\sin\psi\,(w_{21}t\,P_0'+w_{10}P_1')+\\
&\quad+2k[(v_{20}+v_{22}t^2)Q_0'+v_{11}t\,Q_1'],\\
T_2&=\lambda[(u_{20}+u_{22}t^2)Q_0+u_{11}t\,Q_1]+\sin\psi\,(w_{21}t\,Q_0'+w_{10}Q_1')-\\
&\quad-2k[(v_{20}+v_{22}t^2)P_0'+v_{11}t\,P_1'].
\end{aligned}$$

Будемъ разумѣть въ этихъ формулахъ подъ P_n и Q_n какія-либо изъ функцій $P_{j,n}$, $Q_{j,n}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Поэтому положимъ:

$$P_0 = e^{p\psi i}, \qquad Q_0 = \eta i e^{p\psi i},$$

гдѣ p есть одинъ изъ корней уравненія (104), и

$$\eta = \frac{p^2k^2 + (1-\lambda)(4-k^2)}{2kp}.$$

Тогда для S_1 и T_1 получимъ выраженія вида:

$$S_1 = K e^{(p+1)\psi i} + K' e^{(p-1)\psi i},$$

$$T_1 = L e^{(p+1)\psi i} + L' e^{(p-1)\psi i},$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
K &= \frac{1-\lambda}{2} u_{11} + \frac{p}{2} w_{10} - kp\eta\, v_{11}, \\
L &= \frac{\lambda}{2} \eta i\, u_{11} + \frac{p\eta i}{2} w_{10} - kpi\, v_{11}, \\
K' &= \frac{1-\lambda}{2} u_{11} - \frac{p}{2} w_{10} - kp\eta\, v_{11}, \\
L' &= \frac{\lambda}{2} \eta i\, u_{11} - \frac{p\eta i}{2} w_{10} - kpi\, v_{11}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (113)$$

Вслѣдствіе этого, если будемъ стараться удовлетворить уравненіямъ (99) для $n = 1$ величинами

$$P_1 = a e^{(p+1)\psi i} + a' e^{(p-1)\psi i},$$

$$Q_1 = b e^{(p+1)\psi i} + b' e^{(p-1)\psi i},$$

то для опредѣленія постоянныхъ a, b, a', b' получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
[k^2(p+1)^2 + (1-\lambda)(4-k^2)]\, a + 2k(p+1)\, i b &= -K, \\
-2k(p+1)\, i a + [k^2(p+1)^2 + \lambda(4-k^2)]\, b &= -L, \\
[k^2(p-1)^2 + (1-\lambda)(4-k^2)]\, a' + 2k(p-1)\, i b' &= -K', \\
-2k(p-1)\, i a' + [k^2(p-1)^2 + \lambda(4-k^2)]\, b' &= -L'.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (114)$$

Полезно замѣтить, что при замѣнѣ p черезъ $-p$ и k черезъ $-k$ коэффиціенты двухъ первыхъ уравненій переходятъ въ соотвѣтственные коэффиціенты двухъ послѣднихъ. То-же происходитъ и при одновременной замѣнѣ p черезъ $-p$ и i черезъ $-i$, ибо при этомъ η переходитъ въ $-\eta$.

Для S_2 и T_2 получаемъ затѣмъ слѣдующія выраженія:

$$S_2 = (M + M' \cos 2\psi + M'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

$$T_2 = (N + N' \cos 2\psi + N'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

гдѣ M, N, M', N', M'', N'' суть нѣкоторыя постоянныя. Для вычисленія первыхъ двухъ находимъ формулы:

$$\left.\begin{aligned}
M = {} & \frac{1-\lambda}{2}(2u_{20} + u_{22}) - kp\eta(2v_{20} + v_{22}) + \frac{1-\lambda}{2}(a + a')u_{11} + \\
& + ki\Big((p+1)b + (p-1)b'\Big)v_{11} - \Big((p+1)a - (p-1)a'\Big)\frac{w_{10}}{2}, \\
N = {} & \frac{\lambda}{2}\eta i(2u_{20} + u_{22}) - kpi(2v_{20} + v_{22}) + \frac{\lambda}{2}(b + b')u_{11} - \\
& - ki\Big((p+1)a + (p-1)a'\Big)v_{11} - \Big((p+1)b - (p-1)b'\Big)\frac{w_{10}}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Отсюда видно, что для P_2 и Q_2 можно принять выраженія:

$$P_2 = (\alpha i\psi + \beta + \beta' \cos 2\psi + \beta'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

$$Q_2 = (-\eta\alpha\psi + \gamma' \cos 2\psi + \gamma'' \sin 2\psi)\, e^{p\psi i},$$

при чемъ для опредѣленія постоянныхъ α и β получатся уравненія:

$$2k(\eta - kp)\alpha - [k^2p^2 + (1-\lambda)(4-k^2)]\,\beta = M,$$

$$2k(1 - kp\eta)\, i\alpha + 2kpi\,\beta = N.$$

Изъ послѣднихъ, припоминая значеніе η, найдемъ:

$$\alpha = \frac{M - N\eta i}{2k(2\eta - kp - kp\eta^2)},$$

или, вслѣдствіе (104)

$$\alpha = \frac{M - N\eta i}{k^3(1-2p^2)\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

Изъ предыдущихъ выраженій функцій P_n и Q_n слѣдуетъ:

$$P_0(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_0,$$
$$P_1(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_1,$$
$$P_2(\psi + 2\pi) = e^{2\pi p i} P_2 + 2\pi i \alpha e^{2\pi p i} P_0.$$

Поэтому, если величину α, соотвѣтствующую корню p_j, назовемъ черезъ α_j, то уравненія (105) дадутъ:

$$(jj)_0 = e^{2\pi p_j i},$$
$$(jj)_1 = 0,$$
$$(jj)_2 = 2\pi i \alpha_j e^{2\pi p_j i}.$$

Замѣтимъ здѣсь, что если по прежнему $p_3 = -p_1$ и $p_4 = -p_2$, то

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_2 + \alpha_4 = 0,$$

какъ это слѣдуетъ изъ того, что выраженія

$$q_j = (jj)_0 + (jj)_2 \varepsilon^2 + \dots,$$
$$(j = 1, 2, 3, 4)$$

представляютъ корни характеристичнаго уравненія, и слѣдовательно $q_1 q_3 = 1$, $q_2 q_4 = 1$.

Вслѣдствіе этого формулы

$$2A_0 = (11)_0 + (22)_0 + (33)_0 + (44)_0,$$
$$2A_1 = (11)_2 + (22)_2 + (33)_2 + (44)_2,$$
$$2B_0 = (11)_0(33)_0 + (22)_0(44)_0 + [(11)_0 + (33)_0][(22)_0 + (44)_0],$$
$$2B_1 = (11)_0(33)_2 + (11)_2(33)_0 + (22)_0(44)_2 + (22)_2(44)_0 + $$
$$+ [(11)_0 + (33)_0][(22)_2 + (44)_2] + [(22)_0 + (44)_0][(11)_2 + (33)_2],$$

слѣдующія изъ уравненій (103), принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \cos 2\pi p_1 + \cos 2\pi p_2, \\ A_1 &= -2\pi(\alpha_1 \sin 2\pi p_1 + \alpha_2 \sin 2\pi p_2), \\ B_0 &= 1 + 2\cos 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2, \\ B_1 &= -4\pi(\alpha_1 \sin 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2 + \alpha_2 \sin 2\pi p_2 \cos 2\pi p_1). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (117)$$

Такимъ образомъ задача о вычисленіи A_1 и B_1 приводится къ вычисленію α_1 и α_2.

Изъ изложеннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ, что въ случаѣ I единственное условіе устойчивости періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, выражается неравенствомъ:

$$\lim\left\{A^2-2(B-1)\right\}_{\lambda=\lambda_0}>0\,,$$

которое должно быть удовлетворено для достаточно малыхъ значеній ε. А такъ-какъ

$$A^2-2(B-1)=A_0{}^2-2(B_0-1)+2(A_0A_1-B_1)\,\varepsilon^2+\ldots,$$

и

$$\lim\left\{A_0{}^2-2(B_0-1)\right\}_{\lambda=\lambda_0}=0\,,$$

то вообще оно приводится къ слѣдующему:

$$\lim\left\{A_0A_1-B_1\right\}_{\lambda=\lambda_0}>0\,.$$

Но формулы (117) даютъ

$$A_0A_1-B_1=4\pi\sin\pi(p_1+p_2)\sin\pi(p_2-p_1)\left(\alpha_2\sin 2\pi p_2-\alpha_1\sin 2\pi p_1\right).$$

При томъ имѣемъ:

$$\lim p_1=\lim p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

а потому послѣднее неравенство можно замѣнить слѣдующимъ:

$$\lim\left\{(p_2-p_1)(\alpha_2\sin 2\pi p_2-\alpha_1\sin 2\pi p_1)\right\}_{\lambda=\lambda_0}<0\quad.\ .\ .\ .\ (118)$$

Полагая

$$\sqrt{2-k^2}=k_1\,,$$

изъ уравненія (111) находимъ:

$$\lambda_0=\frac{1}{2}-\frac{k_1\sqrt{2}}{4-k^2}=\frac{(\sqrt{2}-k_1)^2}{2(4-k^2)}\,.$$

Предположимъ сначала k^2 не равнымъ 2. Тогда, если положимъ

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\zeta^2}{2\sqrt{2}\,k_1(4-k^2)},$$

и разложимъ p_1 и p_2 въ ряды по восходящимъ степенямъ ζ, то выписывая только члены съ нулевою и первою степенями ζ, получимъ:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\zeta}{\sqrt{2}\,k^2} + \ldots, \qquad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}\,k^2} + \ldots.$$

Также найдемъ:

$$k^3(1 - 2p_1{}^2)\eta_1 = 2(\sqrt{2} + k_1)\zeta + \ldots,$$

$$k^3(1 - 2p_2{}^2)\eta_2 = -2(\sqrt{2} + k_1)\zeta + \ldots.$$

При $k^2 = 2$, замѣчая, что $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, полагаемъ:

$$\lambda = \frac{1-\zeta}{2}.$$

При этомъ для предыдущихъ величинъ получимъ разложенія, въ которыхъ члены съ первою степенью ζ могутъ быть выведены изъ соотвѣтственныхъ членовъ предыдущихъ разложеній, если въ нихъ сдѣлаемъ $k^2 = 2$.

Поэтому во всякомъ случаѣ найдемъ:

$$p_2 - p_1 = \frac{\sqrt{2}}{k^2}\,\zeta + \ldots,$$

а формула (116) дастъ:

$$\alpha_1 = \frac{\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0}}{2(\sqrt{2}+k_1)\zeta} + \ldots,$$

$$\alpha_2 = -\frac{\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0}}{2(\sqrt{2}+k_1)\zeta} + \ldots,$$

гдѣ невыписанные члены содержатъ нулевую и положительныя степени ζ.

Вслѣдствіе этого неравенство (118) приведется къ слѣдующему виду:

$$\lim(M - N\eta i)_{\zeta=0} < 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (119)$$

При всѣхъ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ мы будемъ разсматривать только одно предѣльное значеніе λ. Поэтому, для сокращенія, переходовъ къ предѣлу означать не будемъ.

Полагаемъ

$$\lambda = \frac{(\sqrt{2} - k_1)^2}{2(4 - k^2)}$$

и соотвѣтственно этому

$$1 - \lambda = \frac{(\sqrt{2} + k_1)^2}{2(4 - k^2)}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2} + k_1}{k}.$$

Тогда вслѣдствіе (112) величины (113) получатъ слѣдующія выраженія:

$$K = \frac{3(\sqrt{2} + k_1)^2}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{2} + k_1)k_1}{2k^2}\right) \Phi_2,$$

$$L = \frac{3(\sqrt{2} - k_1)ki}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) + \left(\frac{k_1}{2k} + \frac{\sqrt{2} + k_1}{2\sqrt{2}\,k}\right) i\,\Phi_2,$$

$$K' = \frac{3(\sqrt{2} + k_1)^2}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2} + k_1)k_1}{2k^2}\right) \Phi_2,$$

$$L' = \frac{3(\sqrt{2} - k_1)ki}{4(4 - k^2)} (k^2 - 2\Phi_2) + \left(\frac{k_1}{2k} - \frac{\sqrt{2} + k_1}{2\sqrt{2}\,k}\right) i\,\Phi_2,$$

а уравненія (114) дадутъ:

$$a = -\frac{3(\sqrt{2} - 1)}{2k^2(4 - k^2)} \left(k_1 + \sqrt{2} + \frac{4 - k^2}{2}\right)(k^2 - 2\Phi_2) - \frac{\Phi_2}{2\sqrt{2}\,k^2},$$

$$a' = -\frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2k^2(4 - k^2)} \left(k_1 + \sqrt{2} - \frac{4 - k^2}{2}\right)(k^2 - 2\Phi_2) + \frac{\Phi_2}{2\sqrt{2}\,k^2},$$

$$b = -\frac{3(\sqrt{2} - 1)}{2k^3} \left(\frac{\sqrt{2} + k_1}{2} + \frac{k^2}{4 - k^2}\right) i(k^2 - 2\Phi_2) - \frac{(\sqrt{2} + k_1)i}{2\sqrt{2}\,k^3} \Phi_2,$$

$$b' = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2k^3} \left(\frac{\sqrt{2} + k_1}{2} - \frac{k^2}{4 - k^2}\right) i\,(k^2 - 2\Phi_2) + \frac{(\sqrt{2} + k_1)i}{2\sqrt{2}\,k^3} \Phi_2.$$

Отсюда:

$$a+a'=-\frac{3(k^2+2\sqrt{2}\,k_1)}{2k^2(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)\,,$$

$$b+b'=-\frac{3(k_1+\sqrt{2})(k^2-2\sqrt{2}\,k_1)i}{2k^3(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)a+(\sqrt{2}-1)a'=-\frac{3(k_1+\sqrt{2})}{k^2(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)-\frac{\Phi_2}{\sqrt{2}\,k^2}\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)b-(\sqrt{2}-1)b'=-\frac{3(k_1+\sqrt{2})i}{2k^3}(k^2-2\Phi_2)-\frac{(\sqrt{2}+k_1)i}{k^3}\Phi_2\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)b+(\sqrt{2}-1)b'=-\frac{3i}{k(4-k^2)}(k^2-2\Phi_2)-\frac{(\sqrt{2}+k_1)i}{\sqrt{2}\,k^3}\Phi_2\,,$$

$$(\sqrt{2}+1)a-(\sqrt{2}-1)a'=-\frac{3}{2k^2}(k^2-2\Phi_2)-\frac{\Phi_2}{k^2}\,.$$

Вслѣдствіе этого, принимая въ разсчетъ (112), изъ (115) находимъ:

$$\frac{M}{\sqrt{2}+k_1}=\frac{\sqrt{2}+k_1}{4(4-k^2)}(2u_{20}+u_{22})-\frac{1}{\sqrt{2}}(2v_{20}+v_{22})-$$
$$-\frac{9(\sqrt{2}+k_1)(k^2+2\sqrt{2}\,k_1)}{8k^2(4-k^2)^2}(k^2-2\Phi_2)^2-\frac{\sqrt{2}+k_1}{4k^4}\Phi_2^{\,2}+$$
$$+\frac{3[\sqrt{2}\,k^2+(4+k^2)k_1]}{4k^4(4-k^2)}\Phi_2(k^2-2\Phi_2)\,,$$

$$-\frac{Ni}{k}=\frac{\sqrt{2}-k_1}{4(4-k^2)}(2u_{20}+u_{22})-\frac{1}{\sqrt{2}}(2v_{20}+v_{22})-$$
$$-\frac{9(\sqrt{2}-k_1)(k^2-2\sqrt{2}\,k_1)}{8k^2(4-k^2)^2}(k^2-2\Phi_2)^2-\frac{\sqrt{2}-k_1}{4k^4}\Phi_2^{\,2}+$$
$$+\frac{3[\sqrt{2}\,k^2-(4+k^2)k_1]}{4k^4(4-k^2)}\Phi_2(k^2-2\Phi_2)\,,$$

откуда

$$\frac{M-N\eta i}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+k_1)}=\frac{2u_{20}+u_{22}}{2(4-k^2)}-(2v_{20}+v_{22})-\frac{\Phi_2{}^2}{2k^4}-$$

$$-\frac{9(k^2-2\Phi_2)^2}{4k^2(4-k^2)}+\frac{3\Phi_2(k^2-2\Phi_2)}{2k^2(4-k^2)}\,.$$

Вслѣдствіе (112) равенство это принимаетъ окончательно слѣдующій видъ:

$$\frac{4-k^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+k_1)}(M-N\eta i)=6\Phi_3+(8+k^2)\Phi_2-\frac{3}{4}k^2-\frac{6}{k^2}\Phi_2{}^2\,.$$

Такимъ образомъ условіе (119) приводится къ слѣдующему:

$$\frac{6}{k^2}\Phi_2{}^2+\frac{3}{4}k^2-(8+k^2)\Phi_2-6\Phi_3>0\quad.\ .\ .\ .\ (120)$$

Въ случаѣ I при выполненіи этого условія для какого-либо даннаго σ, соотвѣтствующія послѣднему непостоянныя періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, устойчивы. При выполненіи противоположнаго условія — неустойчивы.

Когда условіе (120) обращается въ равенство, рѣшеніе вопроса объ устойчивости требуетъ дополнительнаго изслѣдованія, на которомъ останавливаться не будемъ.

Разсмотримъ періодическія движенія, соотвѣтствующія какому-либо значенію σ, для котораго неравенство (120) удовлетворено.

Вслѣдствіе выполненія этого условія можно найти такое отличное отъ нуля и не превосходящее E число E_1, что при $\lambda=\lambda_0$ неравенства (52) будутъ удовлетворены, пока $0<\varepsilon<E_1$.

Тогда всякому ε, лежащему между предѣлами 0 и E_1 невключительно, будетъ соотвѣтствовать періодическое движеніе, устойчивое не только при $\lambda=\lambda_0$, но и при всякомъ λ, достаточно близкомъ къ λ_0.

Пусть λ имѣетъ какое-либо данное значеніе, достаточно близкое къ λ_0. Если это значеніе менѣе λ_0, всѣ періодическія движенія, для которыхъ ε достаточно мало, будутъ устойчивы. Напротивъ, если оно болѣе λ_0, періодическія движенія будутъ устойчивы, только пока ε заключается между нѣкоторыми предѣлами, изъ которыхъ низшій навѣрно не нуль, ибо при $\frac{1}{2}>\lambda>\lambda_0$ періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, неустойчивы.

Такимъ образомъ, при выполненіи извѣстныхъ условій, устойчивыя періодическія движенія существуютъ только между достаточно удаленными отъ постояннаго.

Для притяженія, обратно пропорціональнаго N-ой степени разстоянія

$$k^2 = 3 - N\,, \quad \Phi_2 = \frac{(N-2)(N-3)}{6}\,, \quad \Phi_3 = \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{24}\,,$$

вслѣдствіе чего условіе (120) приводится къ виду:

$$(3 - N)(N^2 - 1) > 0\,.$$

Такъ-какъ періодическія движенія возможны только при $N < 3$, а разсматриваемый случай I — только при $N \geqq 1$, то условіе это будетъ удовлетворено для всякихъ значеній N, которыя должны быть принимаемы въ разсчетъ въ случаѣ I, за исключеніемъ $N = 1$.

Что-же касается послѣдняго значенія N (для котораго $\lambda_0 = \frac{1}{2}$), то для него при $\lambda = \lambda_0$ равенство

$$A^2 - 2(B - 1) = 0$$

будетъ имѣть мѣсто для всякаго ε, какъ это слѣдуетъ изъ найденныхъ въ параграфѣ 4 формулъ (33) и (35), которыми для $N = 1$ опредѣляются функціи X и Y въ предположеніи $\lambda = \frac{1}{2}$.

Изъ формулъ этихъ видно, что упомянутыя функціи будутъ типа

$$\left(P_1(\vartheta) + \vartheta Q_1(\vartheta)\right)\cos\vartheta + \left(P_2(\vartheta) + \vartheta Q_2(\vartheta)\right)\sin\vartheta\,,$$

гдѣ $P_j(\vartheta)$ и $Q_j(\vartheta)$ суть періодическія функціи ϑ съ періодомъ Ω.

Поэтому для $N = 1$ Лапласовы движенія при $\lambda = \lambda_0$ неустойчивы.

Переходимъ къ случаю II.

18. Въ случаѣ II

$$\tau = \lambda(1 - \lambda)\left(\frac{4 - k^2}{k^2}\right)^2 = \frac{3}{16} \quad \ldots\ldots\ldots (121)$$

Поэтому онъ возможенъ только при условіи

$$\left(\frac{4 - k^2}{k^2}\right)^2 \geqq \frac{3}{4}\,,$$

изъ котораго слѣдуетъ или

$$k^2 \leqq 8(2-\sqrt{3}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

или

$$k^2 \geqq 8(2+\sqrt{3}).$$

Предполагая условіе это выполненнымъ, будемъ разсматривать случай II, подобно предыдущему, какъ предѣльный общаго, когда λ при постоянномъ σ приближается къ одному изъ корней уравненія (121). Корень этотъ назовемъ черезъ λ_1.

Полагая

$$\pm\sqrt{k^4-32k^2+64}=R,$$

найдемъ:

$$\lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{R}{4(4-k^2)}.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ устойчивость періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, опредѣляется знакомъ выраженія

$$\lim\left\{\left(\frac{B+1}{2}\right)^2-A^2\right\}_{\lambda=\lambda_1}$$

при достаточно малыхъ значеніяхъ ε. А такъ-какъ

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2-A^2=\left(\frac{B_0+1}{2}\right)^2-A_0{}^2+\left(\frac{B_0+1}{2}B_1-2A_0A_1\right)\varepsilon^2+\ldots,$$

и

$$\lim\left\{\left(\frac{B_0+1}{2}\right)^2-A_0{}^2\right\}_{\lambda=\lambda_1}=0,$$

то знакъ послѣдняго для такихъ значеній ε вообще будетъ опредѣляться знакомъ выраженія

$$\lim\left\{\frac{B_0+1}{2}B_1-2A_0A_1\right\}_{\lambda=\lambda_1}.$$

Движенія эти будутъ устойчивы или неустойчивы, смотря по тому, положительно или отрицательно это выраженіе.

Вслѣдствіе формулъ (117) имѣемъ:

$$\frac{B_0+1}{2}B_1-2A_0A_1=$$

$$=4\pi\sin 2\pi p_1 \sin 2\pi p_2(\alpha_1 \cos 2\pi p_1 \sin 2\pi p_2+\alpha_2 \cos 2\pi p_2 \sin 2\pi p_1)\ .$$

Пусть $p_2>p_1>0$. Тогда, съ приближеніемъ λ къ λ_1, p_1 будетъ приближаться къ $\frac{1}{2}$, а p_2 — къ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому найдемъ:

$$\lim \eta_1=\frac{8-k^2-R}{4k}\,,\qquad \lim \eta_2=\frac{8+k^2-R}{4\sqrt{3}\,k}\ .$$

Отсюда видно, что знаменатель въ выраженіи (116) стремится къ отличному отъ нуля предѣлу какъ въ случаѣ $p=p_1$, такъ и въ случаѣ $p=p_2$.

Кромѣ того, изъ уравненій (114) видно, что въ случаѣ $p=p_2$ предѣльныя величины a, b, a', b' конечны.

Отсюда заключаемъ, что предѣльное значеніе α_2 при $\lambda=\lambda_1$ конечно. А потому имѣемъ:

$$\lim\left\{\frac{B_0+1}{2}B_1-2A_0A_1\right\}=$$

$$=\lim 4\pi\alpha_1\sin 2\pi p_1\cos 2\pi p_1\sin^2 2\pi p_2=4\pi^2\sin^2\sqrt{3}\,\pi\lim\alpha_1(2p_1-1)\ .$$

Далѣе мы будемъ имѣть дѣло только съ величинами, относящимися къ корню $p=p_1$. Поэтому значка 1, указывающаго на этотъ корень, приписывать не будемъ.

Согласно (116), имѣемъ:

$$\lim \alpha(2p-1)=\frac{2}{k^3}\lim\frac{(2p-1)(M-N\eta i)}{\eta}\ .$$

Далѣе, замѣчая, что предѣльныя величины a и b, слѣдующія изъ уравненій (114), конечны, по формуламъ (115) находимъ:

$$\lim(2p-1)M=\lim(2p-1)\left\{\frac{1-\lambda}{2}a'u_{11}+(p-1)kib'v_{11}+(p-1)a'\frac{w_{10}}{2}\right\},$$

$$\lim(2p-1)N=\lim(2p-1)\left\{\frac{\lambda}{2}b'u_{11}-(p-1)kia'v_{11}+(p-1)b'\frac{w_{10}}{2}\right\}.$$

Уравненія (114) даютъ:

$$\lim \frac{b'}{a'} = i \lim \frac{k^2(p-1)^2 + (1-\lambda)(4-k^2)}{2k(p-1)} = -i \lim \eta ,$$

$$a' = \frac{2k(p-1)iL' - [k^2(p-1)^2 + \lambda(4-k^2)]K'}{k^4(p-1)^4 - k^4(p-1)^2 + \lambda(1-\lambda)(4-k^2)^2} .$$

Знаменатель послѣдняго выраженія въ силу уравненія (104) приводится къ

$$2\,k^4 p\,(1-p)(2p-1) .$$

Поэтому, замѣчая, что въ силу того-же уравненія

$$\eta = \frac{2kp}{k^2p^2 + \lambda(4-k^2)} ,$$

находимъ:

$$\lim (2p-1)\,a' = -\frac{2}{k^3} \lim \frac{K' + L'\eta i}{\eta} .$$

Отсюда, припоминая значенія величинъ K' и L' (формулы (113)), получаемъ:

$$\lim (2p-1) M = \lim K'(2p-1)a' ,$$

$$\lim (2p-1)\, N = -\lim L'(2p-1)a' ,$$

$$\lim (2p-1)(M - N\eta i) = -\frac{2}{k^3} \lim \frac{(K' + L'\eta i)^2}{\eta} .$$

Если-же будемъ разумѣть подъ K', L', η предѣльныя значенія, то принимая въ разсчетъ (112), найдемъ:

$$K' + L'\eta\, i = \left(\frac{1-\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}\eta^2\right) u_{11} - \frac{1-\eta^2}{4}\Phi_2 = -\frac{3kR\eta}{16(4-k^2)}(k^2 - 2\Phi_2) .$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\lim \left\{\frac{B_0+1}{2} B_1 - 2A_0A_1\right\} = -\frac{9}{16} \frac{\pi^2 \sin^2 \sqrt{3}\,\pi}{k^4(4-k^2)^2} R^2 (k^2 - 2\Phi_2)^2 .$$

Отсюда видимъ, что въ случаѣ II періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, вообще неустойчивы. Сомнительными остаются только тѣ случаи, когда $R^2(k^2-2\Phi_2)^2=0$, т. е. когда имѣетъ мѣсто одно изъ трехъ слѣдующихъ равенствъ:

$$k^2-2\Phi_2=0,$$

$$\left.\begin{aligned} k^2&=8(2-\sqrt{3}),\\ k^2&=8(2+\sqrt{3}).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

Изъ нихъ двумя послѣдними опредѣляются предѣлы, между которыми не должно лежать k^2 для возможности случая II.

Когда первое изъ этихъ трехъ равенствъ удовлетворено для всякаго σ, то замѣчая, что при $\sigma=\frac{1}{\varrho}$ оно приводится къ

$$\varrho^2 f''(\varrho)+3\varrho f'(\varrho)-3f(\varrho)=0,$$

находимъ

$$f(\varrho)=\frac{\alpha}{\varrho^3}+\beta\varrho,$$

гдѣ α и β постоянныя.

Вопросъ объ устойчивости періодическихъ движеній при этомъ законѣ притяженія мы уже разсматривали въ параграфѣ 5. Изъ изложеннаго тамъ легко вывести, что въ случаѣ II при этомъ законѣ притяженія всѣ періодическія движенія устойчивы.

Когда удовлетворяется для всякаго σ одно изъ двухъ равенствъ (123), имѣемъ:

$$f(\varrho)=\alpha\varrho^{13\mp 8\sqrt{3}},$$

(α — постоянная), гдѣ верхній знакъ относится къ первому, нижній — ко второму изъ этихъ двухъ равенствъ. Останавливаться на рѣшеніи вопроса объ устойчивости при этомъ законѣ притяженія не будемъ.

Для притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, $k^2=1$, и слѣдовательно условіе (122) удовлетворено. Случай II поэтому возможенъ для этого закона притяженія.

Обращаемся къ случаю безконечно-малаго λ.

19 Для изслѣдованія устойчивости періодическихъ движеній, достаточно близкихъ къ постоянному, въ предположеніи безконечно-малаго λ можно было-бы воспользоваться, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, общими формулами параграфа 17. Но мы предпочитаемъ дать еще одинъ примѣръ вычисленія при помощи формулъ параграфовъ 10 и 11.

Возвращаясь къ обозначеніямъ этихъ параграфовъ, составимъ первый членъ разложенія по восходящимъ степенямъ ε величины N_2, опредѣляемой формулою (72).

Полагая

$$\int_0^\Omega \frac{v-v_0}{v'^2}\,d\vartheta = V,$$

$$\int_0^\Omega \frac{v''-v_0''}{v'^2}\,d\vartheta = V_1,$$

$$\int_0^\Omega \frac{(v-v_0)^2}{v'^2}\,d\vartheta = V_2,$$

изъ формулъ (67) выводимъ:

$$(a', a)_0 = 4\,v_0''\,V + v_0''\,V_1,$$
$$(a', b')_0 = 2\,v_0''\,V,$$
$$(b\,, b')_0 = \Omega + 4\,V_2,$$
$$(b\,, a)_0 = 2\,(b\,, b')_0 - (a', b')_0\,.$$

Чтобы найти величины $(a\,,a')_1$, $(a\,,b)_1$, $(b',a')_1$, $(b',b)_1$, полагаемъ $X_0 = Y_0' = 0$. Тогда изъ (63) и (64) найдемъ:

$$P_0 = X_0'\,\frac{v'}{v_0''}, \qquad Q_0 = Y_0 - 2X_0'\,\frac{v-v_0}{v_0''},$$

а замѣчая, что

$$\int_0^\Omega R_1 v'\,d\vartheta = -\int_0^\Omega (v-v_0)R_1'\,d\vartheta = -\int_0^\Omega u\,(v-v_0)Q_0\,d\vartheta\,,$$

изъ (68) получимъ:

$$P_1(\Omega) = \frac{X_0'}{v_0''^2}\left\{\int_0^\Omega u\,v'^2 d\vartheta - 4\int_0^\Omega u\,(v-v_0)^2 d\vartheta\right\} + \frac{2\,Y_0}{v_0''}\int_0^\Omega u\,(v-v_0)\,d\vartheta\,,$$

$$Q_1(\Omega) = Y_0\int_0^\Omega u\,d\vartheta - \frac{2\,X_0'}{v_0''}\int_0^\Omega u\,(v-v_0)\,d\vartheta - 2P_1(\Omega)\,.$$

Отсюда

$$(a\,,a')_1 = \frac{1}{v_0''^2}\int\limits_0^\Omega u\,v'^2 d\vartheta - \frac{4}{v_0''^2}\int\limits_0^\Omega u\,(v-v_0)^2 d\vartheta\,,$$

$$(a\,,\,b)_1 = \frac{2}{v_0''}\int\limits_0^\Omega u\,(v-v_0)\,d\vartheta\,,$$

$$(b',a')_1 = -(a\,,b)_1 - 2(a\,,a')_1\,,$$

$$(b',\,b)_1 = \int\limits_0^\Omega u\,d\vartheta - 2(a\,,b)_1\,.$$

Здѣсь

$$v - v_0 = s^2 - s_1{}^2 = 2\sigma^2\varepsilon(1-t) - \sigma^2\varepsilon^2\sin^2\psi\,,$$

откуда, согласно (92),

$$v' = 2\sigma^2 l\,\varepsilon(1-\varepsilon t)\sin\psi\sqrt{1+T}\,,$$

и слѣдовательно

$$\frac{d\vartheta}{v'^2} = \frac{(1-\varepsilon t)^{-2}(1+T)^{-\frac{3}{2}}\,d\psi}{4\sigma^4 l^3\varepsilon^2\sin^2\psi}\,.$$

При помощи формулъ (90),...(94) разлагаемъ всѣ разсматриваемыя величины въ ряды по восходящимъ степенямъ ε.

Полагая

$$k^2 - \frac{5}{2}\,\Phi_2 + \frac{5}{2k^2}\,\Phi_2{}^2 + 2\Phi_3 = F\,,$$

$$k^2 - 2\Phi_2 + \frac{5}{2k^2}\,\Phi_2{}^2 + \Phi_3 = G\,,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} l^3\frac{d\vartheta}{v'^2} &= \frac{d\psi}{4\sigma^4\sin^2\psi}\,\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{(2k^2-3\Phi_2)\,t\,d\psi}{4\sigma^4 k^2\sin^2\psi}\,\frac{1}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{3F d\psi}{4\sigma^4 k^2\sin^2\psi} - \frac{3G d\psi}{4\sigma^4 k^2} + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (124)$$

$$l = k + \ldots,$$

$$\frac{(v-v_0)\,d\vartheta}{v'^2}=\frac{(1-t)d\psi}{2\sigma^2k^3\sin^2\psi}\,\frac{1}{\varepsilon}-\frac{(2k^2-3\Phi_2)(1-t)\,d\psi}{2\sigma^2k^5\sin^2\psi}+\frac{3(k^2-2\Phi_2)d\psi}{4\sigma^2k^5}+\ldots,$$

$$\frac{(v-v_0)^2\,d\vartheta}{v'^2}=\frac{(1-t)^2d\psi}{k^3\sin^2\psi}+\ldots,$$

$$d\vartheta=\frac{d\psi}{k}+\ldots,\qquad u=4-k^2+\ldots,$$

$$v'=2\sigma^2k\varepsilon\sin\psi+\ldots,\qquad v_0''=2\sigma^2k^2\varepsilon+\ldots.$$

Отсюда

$$V=\frac{3\pi(k^2-2\Phi_2)}{2\sigma^2k^5}+\ldots,\qquad V_2=-\frac{2\pi}{k^3}+\ldots,\qquad \Omega=\frac{2\pi}{k}+\ldots,$$

$$\int\limits_0^{\Omega}u\,d\vartheta=\frac{2\pi}{k}(4-k^2)+\ldots,$$

$$\int\limits_0^{\Omega}u(v-v_0)\,d\vartheta=\frac{4\pi}{k}(4-k^2)\sigma^2\varepsilon+\ldots,$$

$$\int\limits_0^{\Omega}uv'^2d\vartheta=4\pi k(4-k^2)\sigma^4\varepsilon^2+\ldots,$$

$$\int\limits_0^{\Omega}u(v-v_0)^2\,d\vartheta=12\pi\,\frac{4-k^2}{k}\,\sigma^4\varepsilon^2+\ldots.$$

Для вычисленія интеграла V_1 замѣчаемъ, что при интегрированіи въ разсматриваемыхъ предѣлахъ періодическіе члены разложенія неопредѣленнаго интеграла

$$\int\frac{v''-v_0''}{v'^2}\,d\vartheta$$

исчезаютъ. Поэтому, принимая въ разсчетъ, что интегралъ

$$\int\frac{v''d\vartheta}{v'^2}=-\frac{1}{v'}+\text{const.}$$

можетъ содержать только періодическіе члены, и что такіе-же члены даетъ интегрированіе трехъ первыхъ членовъ выраженія (124), находимъ:

$$V_1=\frac{v_0''}{l^3}\,\frac{3\pi G}{2\sigma^4k^2}+\ldots=\frac{3\pi G}{\sigma^2k^3}\varepsilon+\ldots.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

$$(a', a)_0 - 2(a', b')_0 = v_0'' V_1 = \frac{6\pi}{k} G\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$(b, a)_0 - 2(b, b')_0 = -(a', b')_0 = -\frac{6\pi}{k^3}(k^2 - 2\Phi_2)\varepsilon + \ldots,$$

$$(b, b')_0 = -\frac{2\pi}{k^3}(4-k^2) + \ldots,$$

$$(a, a')_1 = -\frac{\pi}{k^5}(4-k^2)(12-k^2) + \ldots,$$

$$(a, b)_1 = \frac{4\pi}{k^3}(4-k^2) + \ldots,$$

$$(b', a')_1 = -\frac{4\pi}{k^3}(4-k^2) + \ldots - 2(a, a')_1,$$

$$(b', b)_1 = \frac{2\pi}{k}(4-k^2) + \ldots - 2(a, b)_1.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} (a, a')_1, & (a, b)_1 \\ (b', a')_1, & (b', b)_1 \end{vmatrix} = -\frac{2\pi^2}{k^6}(4-k^2)^3 + \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} (a', a)_0, & (b, a)_0 \\ (a', b')_0, & (b, b')_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a', a)_0 - 2(a', b')_0, & (a', b')_0 \\ (b, a)_0 - 2(b, b')_0, & (b, b')_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{12\pi^2}{k^6}\left\{3(k^2 - 2\Phi_2)^2 - (4-k^2)k^2 G\right\}\varepsilon^2 + \ldots,$$

и слѣдовательно

$$N_2 = \frac{24\pi^4}{k^{12}}(4-k^2)^3\left\{(4-k^2)k^2 G - 3(k^2 - 2\Phi_2)^2\right\}\varepsilon^2 + \ldots.$$

Внося сюда вмѣсто G его выраженіе, находимъ:

$$N_2 = \frac{24\pi^4}{k^{12}}(4-k^2)^3 J\varepsilon^2 + \ldots,$$

гдѣ

$$J = (4-k^2)\left(k^2\Phi_3 - \frac{3}{2}\Phi_2{}^2 + 2k^2\Phi_2\right) + (1-k^2)(k^2 - 2\Phi_2)^2.$$

Слѣдующіе члены содержатъ степени ε выше второй.

Составимъ еще первые члены разложеній по восходящимъ степенямъ ε величинъ K_1 и N_3. Члены эти вообще будутъ значеніями этихъ величинъ при $\varepsilon = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, для $\varepsilon = 0$ имѣемъ:

$$A = \cos 2\pi p_1 + \cos 2\pi p_2,$$

$$B = 1 + 2\cos 2\pi p_1 \cos 2\pi p_2,$$

откуда

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = \sin^2 2\pi p_1 \sin^2 2\pi p_2 .$$

Съ другой стороны, формулы (73) даютъ:

$$A = 2 + \frac{1}{2} K_1 \lambda + \ldots,$$

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = N_2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{4} K_1 N_2 + N_3\right) \lambda^3 + \ldots .$$

Послѣдняя формула для $\varepsilon = 0$ обращается въ слѣдующую:

$$\left(\frac{B+1}{2}\right)^2 - A^2 = N_3 \lambda^3 + \ldots .$$

Отсюда, принимая въ разсчетъ, что уравненіе (104) даетъ слѣдующія разложенія по восходящимъ степенямъ λ:

$$p_1{}^2 = \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \lambda + \ldots,$$

$$1 - p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 \lambda + \ldots,$$

находимъ:

$$K_1 = -4\pi^2 \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^2 + \ldots,$$

$$N_3 = 4\pi^4 \left(\frac{4-k^2}{k^2}\right)^6 + \ldots,$$

гдѣ слѣдующіе члены содержатъ положительныя степени ε.

Изъ найденныхъ формулъ видно, что если для какого-либо даннаго σ удовлетворено неравенство

$$(4-k^2)J > 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

то при томъ-же σ для достаточно малыхъ значеній ε удовлетворятся условія:

$$K_1 < 0\,, \qquad N_2 \geqq 0\,, \qquad \frac{1}{4} K_1{}^2 - N_2 > 0\,, \qquad N_3 > 0\,,$$

а при этомъ могутъ быть найдены такія отличныя отъ нуля положительныя числа ε' и λ', что для всякихъ ε и λ, удовлетворяющихъ условіямъ

$$0 \leqq \varepsilon < \varepsilon', \qquad 0 < \lambda < \lambda',$$

неравенства (74) будутъ удовлетворены.

Поэтому при выполненіи условія (125) для какого-либо σ, всякое періодическое Лапласово движеніе, соотвѣтствующее этому σ и достаточно близкое къ постоянному, при достаточно малыхъ значеніяхъ λ (исключая $\lambda = 0$) устойчиво.

При выполненіи противоположнаго условія, N_2 для достаточно малыхъ значеній ε отрицательно, и слѣдовательно въ этомъ случаѣ всякое періодическое движеніе, достаточно близкое къ постоянному, при достаточно малыхъ значеніяхъ λ становится неустойчивымъ.

Въ предѣльномъ случаѣ неравенства (125) необходимо дополнительное изслѣдованіе, на которомъ останавливаться не будемъ.

Въ случаѣ

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^N}$$

имѣемъ:

$$k^2 = 3 - N\,, \quad \Phi_2 = \frac{(N-2)(N-3)}{6}\,, \quad \Phi_3 = \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{24}\,,$$

вслѣдствіе чего

$$4 - k^2 = N + 1\,, \quad J = \frac{(N-2)(3-N)^2(N+1)^2}{36}\,.$$

Условіе (125) въ этомъ случаѣ приводится поэтому къ виду:

$$(N+1)(N-2) > 0\,,$$

откуда слѣдуетъ или

$$N > 2\,,$$

или

$$N < -1 .$$

Такимъ образомъ въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго N-ой степени разстоянія, если N лежитъ между предѣлами -1 и 2 невключительно, періодическія движенія, достаточно близкія къ постоянному, при достаточно малыхъ значеніяхъ λ становятся неустойчивыми. Для всѣхъ-же другихъ значеній N они при этомъ не теряютъ устойчивости.

Въ заключеніе сопоставляемъ всѣ найденные результаты.

Имѣемъ три матерьяльныя точки, массы которыхъ суть M, m и m', и которыя взаимно притягиваются пропорціонально произведеніямъ изъ массъ и пропорціонально нѣкоторой функціи $f(r)$ ихъ взаимныхъ разстояній r.

Разсматриваемъ одно изъ періодическихъ Лапласовыхъ движеній, въ которомъ точки остаются въ вершинахъ равносторонняго треугольника, стороны котораго съ теченіемъ времени измѣняются періодически между нѣкоторыми предѣлами ϱ_0 и ϱ_1, изъ которыхъ низшій ϱ_0 не нуль и высшій ϱ_1 не безконеченъ.

Полагаемъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho_1}\right)=\sigma , \qquad \frac{\varrho_1-\varrho_0}{\varrho_1+\varrho_0}=\varepsilon ,$$

$$\int f\left(\frac{1}{\sigma}\right) d\,\frac{1}{\sigma}=\varphi(\sigma)=\varphi ,$$

$$1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'}=k^2 , \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\frac{\sigma^n\varphi^{(n+1)}}{\varphi'}=\Phi_n ,$$

предполагая, что φ' не нуль, и что

$$1-\frac{\sigma\varphi''}{\varphi'}>0 .$$

Вслѣдствіе послѣдняго предположенія возможны періодическія движенія, для которыхъ ε на сколько угодно мало.

Кромѣ того, предполагаемъ, что рядъ

$$\varphi+\varphi'\,\frac{\zeta}{1}+\varphi''\,\frac{\zeta^2}{1.2}+\varphi'''\frac{\zeta^3}{1.2.3}+\ldots .$$

для достаточно малыхъ значеній $\bmod \zeta$ есть абсолютно сходящійся и представляетъ функцію $\varphi(\sigma+\zeta)$.

Наконецъ, полагаемъ

$$3\frac{Mm+Mm'+mm'}{(M+m+m')^2}=\mu.$$

Величина μ будетъ положительною правильною дробью, достигающею своего высшаго предѣла 1 только при $M=m=m'$. Значеніе $\mu=0$, соотвѣтствующее случаю $M=\infty$ или $m=m'=0$, будемъ исключать.

Условимся періодическое Лапласово движеніе считать устойчивымъ, если послѣ безконечно-малыхъ возмущеній треугольникъ, въ вершинахъ котораго находятся матерьяльныя точки, во всякій моментъ возмущеннаго движенія безконечно-мало отличается отъ равносторонняго, а предѣлы измѣняемости сторонъ его безконечно-мало отличаются отъ соотвѣтственныхъ предѣловъ въ невозмущенномъ движеніи.

При этомъ будутъ имѣть мѣсто слѣдующія теоремы:

I. Если

$$\mu \lessgtr \frac{3}{4}\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \mu<\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2,$$

то всѣ періодическія движенія, для которыхъ ε менѣе нѣкотораго предѣла, устойчивы. Напротивъ, если

$$\mu>\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2,$$

что возможно только при условіи $k^2<2$, то всѣ періодическія движенія, для которыхъ ε менѣе нѣкотораго предѣла, неустойчивы.

II. Если

$$(4-k^2)\left\{(4-k^2)\left(k^2\Phi_3-\frac{3}{2}\Phi_2{}^2+2k^2\Phi_2\right)+(1-k^2)(k^2-2\Phi_2)^2\right\}>0,$$

то всякое періодическое движеніе, для котораго ε менѣе нѣкотораго предѣла, остается устойчивымъ для всякихъ достаточно малыхъ значеній μ. Если-же имѣетъ мѣсто противоположное неравенство, то всякое періодическое движеніе, для котораго ε менѣе нѣкотораго предѣла, для достаточно малыхъ значеній μ становится неустойчивымъ.

III. Когда выполнено одно изъ двухъ неравенствъ:

$$k^2<8(2-\sqrt{3}) \qquad \text{или} \qquad k^2>8(2+\sqrt{3}),$$

для μ возможно значеніе $\frac{3}{4}\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$. Если при этомъ $k^2-2\Phi_2$ не равно нулю, то всякое періодическое движеніе, для котораго ε не превосходитъ нѣкотораго предѣла, при значеніяхъ μ, достаточно близкихъ къ $\frac{3}{4}\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$, становится неустойчивымъ.

IV. Если $k^2 \leqq 2$, то для μ возможно значеніе $\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$. Если при этомъ

$$6\Phi_2{}^2+\frac{3}{4}k^4-k^2(8+k^2)\Phi_2-6k^2\Phi_3>0\,,$$

то всякое періодическое движеніе, для котораго ε, не будучи равнымъ нулю, менѣе нѣкотораго предѣла, при значеніяхъ μ, достаточно близкихъ къ $\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$, остается устойчивымъ. Напротивъ, если выполнено противоположное неравенство, то всякое періодическое движеніе, для котораго ε не превосходитъ нѣкотораго предѣла, при такихъ значеніяхъ μ становится неустойчивымъ.

Изъ этихъ теоремъ, какъ слѣдствіе, можетъ быть выведена слѣдующая:

Если при $k^2<2$

$$6\Phi_2{}^2+\frac{3}{4}k^4-k^2(8+k^2)\Phi_2-6k^2\Phi_3>0\,,$$

то для $\mu-\left(\frac{k^2}{4-k^2}\right)^2$ достаточно малаго и при томъ положительнаго могутъ быть найдены такія положительныя числа ε_1 и $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, что всѣ періодическія движенія, для которыхъ $\varepsilon<\varepsilon_1$, неустойчивы, а тѣ, для которыхъ $\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$, устойчивы.

Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго N-ой степени разстоянія, непостоянныя періодическія Лапласовы движенія возможны только при $N<3$.

Предполагая такой законъ притяженія, разсмотримъ періодическія движенія, для которыхъ ε не превосходитъ нѣкотораго предѣла ε'.

Разумѣя подъ α, β. γ, δ вообще нѣкоторыя *положительныя* функціи ε, обращающіяся въ нуль при $\varepsilon=0$, и предполагая ε' достаточно малымъ, будемъ имѣть слѣдующую теорему:

V. Когда $3 > N \geqq 2$, разсматриваемыя періодическія движенія устойчивы при выполненіи одного изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \alpha \quad \text{или} \quad \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \beta < \mu < \left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \gamma$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда $2 > N > 1$, движенія эти устойчивы при выполненіи одного изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\alpha < \mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \beta$$

или

$$\frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \gamma < \mu < \left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \delta$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда $1 > N > 8\sqrt{3} - 13$, эти движенія устойчивы при одномъ изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\alpha < \mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \beta \quad \text{или} \quad \mu > \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \gamma$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Когда $8\sqrt{3} - 13 > N > -1$, движенія эти устойчивы при $\mu > \alpha$ и неустойчивы при $\mu < \alpha$.

Когда $-1 \geqq N > -(13 + 8\sqrt{3})$, эти движенія всегда устойчивы.

Когда $N < -(13 + 8\sqrt{3})$, движенія эти устойчивы при выполненіи одного изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$\mu < \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 - \alpha \quad \text{или} \quad \mu > \frac{3}{4}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 + \beta$$

и неустойчивы въ противномъ случаѣ.

Кромѣ того, имѣемъ слѣдующую теорему:

VI. Въ случаѣ притяженія, обратно пропорціональнаго квадрату разстоянія, всякое періодическое Лапласово движеніе при достаточно маломъ μ устойчиво.

Къ вопросу о конфигураціяхъ.

К. А. Андреева.

1. Точки и прямыя линіи, данныя на плоскости въ опредѣленномъ числѣ, могутъ имѣть такое относительное расположеніе, что каждая данная точка будетъ совмѣщаться съ опредѣленнымъ числомъ данныхъ прямыхъ и каждая прямая съ опредѣленнымъ числомъ данныхъ точекъ. При этомъ число прямыхъ, совмѣщенныхъ съ одною точкою, можетъ быть одно и то же для всѣхъ данныхъ точекъ, а число точекъ, совмѣщенныхъ съ одною данною прямою, одно и то же для всѣхъ данныхъ прямыхъ. Сочетанія точекъ и прямыхъ, подчиненныхъ въ своемъ расположеніи такимъ условіямъ, принято нѣкоторыми геометрами называть *конфигураціями*. Точки и прямыя, составляющія конфигурацію, суть ея элементы.

Простѣйшій примѣръ конфигурацій представляютъ вершины и стороны треугольника. Здѣсь каждая прямая совмѣщена съ двумя точками и каждая точка съ двумя прямыми.

Далѣе, подъ понятіе о конфигураціяхъ подходятъ всѣ полные многоугольники и полные многосторонники. Дѣйствительно, вершины и стороны полнаго многоугольника n-го порядка составляютъ такую конфигурацію, въ которой съ каждой прямой (стороной) совмѣщены двѣ точки (вершины), а съ каждой точкой (вершиной) $(n-1)$ прямыхъ (сторонъ). Точно также стороны и вершины полнаго многосторонника n-го порядка представляютъ конфигурацію, въ которой съ каждою точкою совмѣщены двѣ прямыя и съ каждою прямой $(n-1)$ точекъ.

Конфигураціи, въ которыхъ число точекъ, совмѣщающихся съ прямыми, и число прямыхъ, совмѣщающихся съ точками, одно и тоже, суть *конфигураціи симметрическія*. Изъ всѣхъ многоугольниковъ и многосторонниковъ только треугольникъ представляетъ симметрическую конфигурацію.

2. Будемъ называть *характеристикою* конфигураціи число ея элементовъ одного рода, совмѣщенныхъ съ однимъ элементомъ другого

рода. Всякая конфигурація имѣетъ, слѣдовательно, двѣ характеристики, равенство которыхъ есть условіе симметричности конфигураціи.

Конфигурацію, характеристики которой суть a и b, мы будемъ обозначать чрезъ $Cf(a,b)[x,y]$, гдѣ x и y суть числа всѣхъ элементовъ, составляющихъ конфигурацію. При этомъ подъ первыми буквами a и x нужно подразумѣвать всегда точки, а подъ вторыми b и y прямыя. Соотвѣтственно этому правилу полный четыреугольникъ есть конфигурація $Cf(2,3)[4,6]$, а полный четырехсторонникъ конфигурація $Cf(3,2)[6,4]$.

3. Приведенные выше примѣры представляютъ такія конфигураціи, въ которыхъ одна изъ характеристикъ не превосходитъ 2. Очевидно, что возможность такихъ конфигурацій не можетъ возбуждать сомнѣнія, такъ какъ въ нихъ всѣ элементы одного рода могутъ быть даны произвольно, а всѣ элементы другого рода опредѣляются сочетаніями первыхъ по два.

Но если каждая изъ характеристикъ болѣе 2, то возможность конфигураціи не очевидна и требуетъ доказательства. Констатированіе этой возможности представляетъ, слѣдовательно, теорему, выражающую нѣкоторое дескриптивное геометрическое свойство.

Извѣстно, напримѣръ, что на плоскости могутъ быть даны десять точекъ и десять прямыхъ въ такомъ расположеніи, чтобы чрезъ каждую точку проходили три изъ этихъ прямыхъ и на каждой прямой лежали три изъ этихъ точекъ.

Такое сочетаніе 10 точекъ и 10 прямыхъ представляетъ симметрическую конфигурацію, характеристики которой суть 3 и 3, т. е. $Cf(3,3)[10,10]$. Возможность этой конфигураціи формулируется обыкновенно въ видѣ теоремы о гомологическихъ треугольникахъ.

Извѣстно также, что на плоскости можно взять девять точекъ и девять прямыхъ въ такомъ расположеніи, что чрезъ каждую точку проходятъ три прямыя и на каждой прямой лежатъ три точки. Это есть конфигурація, обозначаемая чрезъ $Cf(3,3)[9,9]$.

Конфигурацію послѣдняго рода даетъ теорема о шестиугольникѣ Паскаля, когда вершины этого шестиугольника лежатъ по три на двухъ прямыхъ, или теорема о шестиугольникѣ Бріаншона, когда стороны его проходятъ по три чрезъ двѣ точки *).

4. Объясненное въ предыдущемъ понятіе о конфигураціяхъ точекъ и прямыхъ линій можетъ быть расширено въ смыслѣ распространенія на элементы болѣе сложные и принадлежащіе системамъ большаго числа измѣреній, нежели системы точекъ и прямыхъ на плоскости. Такъ на-

*) Въ 1880 году мы указывали на эти сочетанія прямыхъ и точекъ, какъ на основныя предложенія проективной геометріи. См. ст. „Объ изложеніи началъ проективной геометріи въ Сообщ. Х. М. О.“, вып. 2, 1880, § 14, стр. 163—166.

примѣръ, всѣ круги на плоскости представляютъ систему трехъ измѣреній и, разсматривая круги и точки, какъ элементы конфигурацій, можно утверждать слѣдующее:

1) Четыре точки и четыре круга могутъ быть взяты такъ на плоскости, чтобы чрезъ каждую точку проходило три изъ этихъ круговъ и на каждомъ кругѣ лежало три изъ этихъ точекъ.

2) Восемь точекъ и восемь круговъ могутъ быть взяты такъ на плоскости, что чрезъ каждую точку проходятъ четыре круга и на каждомъ кругѣ лежатъ четыре точки.

Такія совокупности точекъ и круговъ представляютъ также симметрическія конфигураціи съ характеристиками 3 и 4. Возможность первой изъ нихъ очевидна; указаніе на возможность второй составляетъ теорему.

5. Наибольшаго вниманія заслуживаютъ конфигураціи въ пространствѣ, образуемыя основными геометрическими элементами: точками, плоскостями и прямыми линіями.

Точки и плоскости суть необходимые элементы такихъ конфигурацій. Прямыя линіи могутъ быть принимаемы въ разсмотрѣніе или нѣтъ. Число точекъ, совмѣщающихся съ одною плоскостью, и число плоскостей, совмѣщающихся съ одною точкою, суть характеристики конфигураціи.

Простѣйшія изъ конфигурацій въ пространствѣ представляютъ вершины и грани тетраэдра, а также вершины и грани такъ называемыхъ полныхъ пространственныхъ многоугольниковъ и многогранниковъ. Эти конфигураціи принадлежатъ къ такимъ, возможность которыхъ очевидна. Но существуетъ, безъ сомнѣнія, множество конфигурацій, констатированіе которыхъ представляетъ болѣе или менѣе трудно доказываемыя дескриптивныя свойства пространства.

Къ такимъ свойствамъ принадлежитъ теорема, доказанная въ первый разъ Мёбіусомъ, о возможности такого расположенія двухъ тетраэдровъ, при которомъ каждый изъ нихъ вписанъ въ другой *). Это есть симметрическая конфигурація восьми точекъ и восьми плоскостей, совмѣщающихся по четыре, т. е. $Cf(4,4)[8,8]$.

6. Нѣкоторыя конфигураціи обнаруживаются при геометрическихъ изслѣдованіяхъ, какъ случайные или побочные результаты. Такъ при разсмотрѣніи четырехъ сферъ мы получаемъ 12 центровъ подобія, расположенныхъ на 12 плоскостяхъ по шести на каждой. Притомъ черезъ каждый центръ подобія проходятъ также шесть изъ этихъ плоскостей. Это есть, слѣдовательно, конфигурація $Cf(6,6)[12,12]$. Здѣсь въ число элементовъ могутъ быть включены и прямыя (16 осей подобія), на каж-

*) Möbius (A. F.)—„Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf andere um und eingeschrieben zugleich heissen?“ — Crelle Journal T. III, 1828. p. 273—278.—Möbius gesammelte Werke, T. I, 1885, p. 439–446.

дой изъ которыхъ лежатъ три центра подобія и чрезъ каждую изъ которыхъ проходятъ три плоскости.

При изслѣдованіи системъ прямыхъ линій въ пространствѣ (Strahlencomplexe) встрѣчается линейчатая поверхность 4-го порядка и 4-го класса, такъ называемая Куммерова поверхность. Она имѣетъ 16 узловыхъ точекъ и 16 особыхъ плоскостей, которыя составляютъ симметрическую конфигурацію $Cf(6, 6)[16, 16]$. Съ каждою плоскостью этой конфигураціи совмѣщены 6 ея точекъ, лежащихъ на одной кривой 2-го порядка, и чрезъ каждую точку проходятъ 6 плоскостей касательныхъ къ одному конусу 2-го порядка.

7. Профессоръ Страсбургскаго университета Теодоръ Рейе первый обратилъ вниманіе на конфигураціи, какъ на непосредственный предметъ геометрическихъ изслѣдованій.

Во введеніи къ своимъ лекціямъ по геометріи положенія этотъ геометръ по поводу теоремы о гомологическихъ треугольникахъ говоритъ, что фигура, изображающая эту теорему, заслуживаетъ вниманія, какъ примѣръ характеризующихся особаго рода правильностью геометрическихъ сочетаній или конфигурацій *).

Въ нѣкоторыхъ своихъ спеціальныхъ изслѣдованіяхъ онъ доказываетъ отдѣльные виды конфигурацій. Такъ напримѣръ въ статьѣ „Ueber die Kummer'sche Configuration" **), онъ ставитъ доказательство указанной выше конфигураціи особыхъ точекъ и особыхъ плоскостей Куммеровой поверхности внѣ зависимости отъ разсмотрѣнія этой поверхности.

Наконецъ, въ статьѣ подъ заглавіемъ „Das Problem der Configurationen" ***) имъ былъ поставленъ категорически вопросъ о разысканіи конфигурацій по даннымъ ихъ числовымъ характеристикамъ и разъясненіи ихъ геометрическихъ свойствъ.

8. Вопросъ о конфигураціяхъ, поставленный такимъ образомъ, возбуждаетъ, конечно, большой интересъ. Но помимо непосредственнаго интереса къ конфигураціямъ, какъ представляющимъ любопытныя геометрическія сочетанія, на первый взглядъ неочевидныя, онѣ должны привлекать вниманіе геометровъ по своему значенію для систематическаго изложенія геометрическихъ теорій.

Дѣло въ томъ, что указанныя выше конфигураціи, состоящія изъ сочетаній 10 точекъ съ 10 прямыми и 9 точекъ съ 9 прямыми, представляютъ геометрическія теоремы, изъ которыхъ, какъ основныхъ предложеній или леммъ, можетъ быть развита вся проективная теорія линій 2-го порядка на плоскости. Подобнымъ же образомъ многія другія

*) Th. Reye.—Die Geometrie der Lage. 2-te Aufl. Hannover, 1877, p. 4.

**) ——— „Ueber die Kummer'sche Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen".— „Borchardt Journal, T. LXXXIV, 1878, p. 209—213.

***) ——— „Das Problem der Configurationen" — Acta mathematica, T. I, 1882 p. 93—96.

конфигураціи могутъ быть принимаемы за точки отправленія въ изложеніи другихъ геометрическихъ теорій, имѣющихъ предметомъ болѣе сложныя геометрическія формы какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ.

Если принять во вниманіе, что конфигураціи точекъ, прямыхъ линій и плоскостей представляютъ зависимости между основными геометрическими элементами и что сущность этихъ зависимостей является основнымъ принципомъ цѣлой теоріи, то нельзя не признать за ними естественнаго значенія леммъ для этихъ теорій.

9. Задача Рейе объ изслѣдованіи конфигурацій, исходя изъ числовыхъ характеристикъ, чрезвычайно обширна и потому самому можетъ получать разрѣшеніе не иначе какъ по частямъ.

Почти одновременно съ публикаціей статьи „Das Problem der Configurationen" появляется въ математическихъ журналахъ рядъ геометрическихъ изслѣдованій, имѣющихъ цѣлью дать отвѣтъ на эту задачу для простѣйшихъ случаевъ. Наибольшую послѣдовательность въ разсмотрѣніи такихъ случаевъ представляютъ нѣсколько статей Кантора, публикованныхъ въ отчетахъ Вѣнской Академіи Наукъ *).

Изслѣдованія этого геометра показали между прочимъ, что нужно различать три рода конфигурацій, обозначающихся черезъ $Cf(3,3)[9,9]$. Изъ нихъ только одна представляетъ частный случай теоремы Паскаля о вписанномъ шестиугольникѣ. Всѣ три доказываются при помощи только началъ проективной геометріи и указаніе на нихъ должно имѣть естественное мѣсто при изложеніи этихъ началъ.

Далѣе, Канторъ обобщилъ конфигурацію $Cf(3,3)[10,10]$, представляющую теорему о гомологическихъ треугольникахъ, на случай какихъ угодно характеристикъ a и b. Именно, онъ доказалъ возможность конфигураціи $Cf(a,b)[x,y]$, гдѣ x есть число сочетаній изъ $(a+b-1)$ элементовъ по b, и y число сочетаній изъ того же числа элементовъ по a. Это доказательство состоитъ въ послѣдовательномъ примѣненіи теоремы о гомологическихъ треугольникахъ.

Не нужно думать, однако, что этимъ обобщеніямъ даются всѣ конфигураціи, соотвѣтствующія характеристикамъ a и b. Оно выясняетъ только существованіе особаго типа конфигурацій, въ которыхъ числа x и y всѣхъ элементовъ находятся въ опредѣленной зависимости отъ характеристикъ. Указанныя выше конфигураціи 9 точекъ и 9 прямыхъ, очевидно, подъ этотъ типъ не подходятъ.

---

*) Kantor (S) — „Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume".— Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wiss. T. LXXX, 1879, p. 715—723.

——— „Ueber die Configurationen (3,3) mit den indices 8, 9 und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung".—Ibid. T. LXXXIV. 1881, p. 915—932.

——— „Die Configurationen (3,3) 10".—Ibid. T. LXXXIV, 1881, p. 1291—1314.

*

Тому же автору принадлежатъ указанія на нѣкоторые типы конфигурацій въ пространствѣ. Онъ показалъ, напримѣръ, что если обозначать чрезъ C_k^l число сочетаній изъ k предметовъ по l, то, каковы бы ни были цѣлыя числа m и n, возможна такая комбинація C_{m+n}^{n+1} точекъ, C_{m+n}^{m} прямыхъ и C_{m+n}^{m+1} плоскостей, что 1) чрезъ каждую прямую проходитъ n плоскостей и на каждой прямой лежитъ m точекъ, 2) на каждой плоскости лежитъ $(m+1)$ прямыхъ и C_{m+1}^{2} точекъ, 3) чрезъ каждую точку проходитъ $(n+1)$ прямыхъ и C_{n+1}^{2} плоскостей.

Кромѣ изслѣдованій Кантора существуетъ въ геометрической литературѣ нѣсколько другихъ работъ, представляющихъ прямо или косвенно частные отвѣты на задачу Рейе о разысканіи конфигурацій.

Настоящая замѣтка примыкаетъ къ тому же ряду изслѣдованій, отвѣчающихъ на задачу Рейе, и имѣетъ цѣлью доказательство одного общаго типа симметрическихъ конфигурацій въ пространствѣ, который, сколько намъ извѣстно, не былъ до сихъ поръ указанъ.

Въ виду того, что простѣйшая изъ этыхъ конфигурацій есть сочетаніе вершинъ и граней двухъ вписанныхъ другъ въ друга тетраэдровъ, мы будемъ называть ихъ *конфигураціями Мёбіуса*.

10. Возможность построенія двухъ тетраэдровъ, вписанныхъ одновременно другъ въ друга, можетъ быть выражена слѣдующей теоремой.

Если черезъ данную точку o проведемъ четыре плоскости A_1, A_2, A_3, A_4 и на шести прямыхъ, по которымъ онѣ пересѣкаются, возьмемъ по одной точкѣ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, то четыре плоскости B_1, B_2, B_3, B_4, опредѣляемыя каждыми тремя изъ этихъ точекъ, не лежащими на одной изъ плоскостей A, проходятъ черезъ одну точку q.

Здѣсь мы имѣемъ конфигурацію восьми точекъ o, p_i, q и восьми плоскостей A_i, B_j, связанныхъ между собою такъ, что чрезъ каждую точку проходятъ четыре плоскости и на каждой плоскости лежатъ четыре точки.

Это есть первая конфигурація Мёбіуса. Въ ней мы можемъ подраздѣлить всѣ элементы на пять послѣдовательныхъ группъ или рядовъ: o, (A), (p), (B), q. Точки o и q, составляющія крайнія группы, суть противоположные элементы. Очевидно, что элементами трехъ первыхъ рядовъ всѣ остальные элементы вполнѣ опредѣляются.

Возможность той же конфигураціи можетъ быть выражена также слѣдующей теоремой, взаимной по формѣ съ предыдущею.

Если на данной плоскости O возьмемъ четыре точки a_1, a_2, a_3, a_4 и чрезъ шесть прямыхъ, соединяющихъ эти точки, приведемъ плоскости P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, то четыре точки b_1, b_2, b_3, b_4, опредѣляемыя каждыми тремя изъ этихъ плоскостей, не проходящими чрезъ одну и ту же изъ точекъ a, лежатъ на одной плоскости Q.

Здѣсь мы имѣемъ тоже 8 точекъ a_i и b_j и 8 плоскостей O, P_i, Q, составляющихъ конфигурацію, при чемъ плоскости O и Q будутъ противоположными элементами.

Каждой точкѣ конфигураціи соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, своя противоположная точка и каждой плоскости противоположная плоскость.

11. Вообразимъ теперь, что чрезъ данную точку o проведены пять плоскостей A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и на линіяхъ ихъ пересѣченія взято 10 точекъ p_1, p_2, $\ldots p_{10}$, по одной на каждой.

Какія-нибудь четыре изъ плоскостей A вмѣстѣ съ соотвѣтственными точками p опредѣлятъ первую конфигурацію Мёбіуса, въ которой, согласно предыдущему, должна существовать точка q, противоположная точкѣ o. Такихъ точекъ будетъ, очевидно, пять, т. е. столько, сколько существуетъ сочетаній изъ пяти плоскостей A по четыре. Можно доказать, что эти пять точекъ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 лежатъ на одной плоскости C.

Допустивъ, что это доказано, мы будемъ имѣть конфигурацію 16 точекъ o, p_i, q_j и 16 плоскостей A_i, B_j, C, въ которой черезъ каждую точку проходятъ пять плоскостей и на каждой плоскости лежатъ пять точекъ. Дѣйствительно, чрезъ точку o проходятъ пять плоскостей A, на каждой плоскости A лежитъ точка o и четыре точки p, чрезъ каждую точку p проходятъ двѣ плоскости A и три плоскости B, на каждой плоскости B лежатъ три точки p и двѣ точки q, чрезъ каждую точку q проходятъ четыре плоскости B и одна C, наконецъ, на плоскости C лежатъ 5 точекъ q.

Это есть вторая конфигурація Мёбіуса. Въ ней элементы составляютъ шесть послѣдовательныхъ группъ: o, (A), (p), (B), (q), C. Точка o и плоскость C суть противоположные элементы.

12. Положимъ, далѣе, что чрезъ данную точку o проведены шесть плоскостей A и на всѣхъ линіяхъ ихъ пересѣченія взято по одной точкѣ p.

Каждыя пять изъ плоскостей A вмѣстѣ съ соотвѣтственными точками p опредѣлятъ вторую конфигурацію Мёбіуса, въ которой будетъ существовать плоскость C, противоположная точкѣ o. Такихъ плоскостей будетъ, слѣдовательно, также шесть.

Можно доказать, что всѣ шесть плоскостей C_1, C_2, $\ldots C_6$ проходятъ черезъ одну точку r, и вмѣстѣ съ тѣмъ убѣдиться, что 32 точки o, p_i, q_j, r и 32 плоскости A_i, B_j, C_k составляютъ конфигурацію, въ которой чрезъ каждую точку проходятъ 6 плоскостей и на каждой плоскости лежатъ 6 точекъ.

Это третья конфигурація Мёбіуса. Въ ней мы имѣемъ семь послѣдовательныхъ рядовъ элементовъ, причемъ точкѣ o противоположнымъ элементомъ служитъ точка r.

13. Приведенныя, но пока еще не доказанныя, геометрическія предложенія суть только первыя звенья цѣлаго ряда такихъ предложеній, изъ которыхъ каждое предполагаетъ извѣстными всѣ предыдущія и которыми констатируется цѣлый рядъ конфигурацій Мёбіуса.

Общая или m-ая конфигурація этого ряда есть сочетаніе 2^{n-1} точекъ и стольких же плоскостей, въ которой черезъ каждую точку проходитъ n плоскостей и на каждой плоскости лежитъ n точекъ. При этомъ очевидно, что $n = m + 3$, т. е. порядокъ каждой конфигураціи на три единицы меньше, чѣмъ ея характеристика.

Конфигураціи Мёбіуса суть, слѣдовательно, типа $Cf(n, n)[2^{n-1}, 2^{n-1}]$.

Само собою понятно, что мы сведемъ доказательство всѣхъ конфигурацій Мёбіуса къ доказательству только первой изъ нихъ, если, допустивъ возможность первыхъ $(m-1)$, убѣдимся въ возможности m-ой.

Вообразимъ для этого, что чрезъ данную точку o проведены n плоскостей $A_1, A_2, \ldots A_n$ и на линіяхъ ихъ пересѣченія взято по одной точкѣ p. Какія-нибудь $(n-1)$ изъ плоскостей A вмѣстѣ съ соотвѣтствующими точками p опредѣлятъ конфигурацію Мёбіуса съ характеристикой $(n-1)$. Такихъ конфигурацій будетъ n.

Если докажемъ, что элементы всѣхъ этихъ конфигурацій, противоположные точкѣ o, совмѣщаются съ однимъ и тѣмъ же новымъ элементомъ (лежатъ на одной плоскости, если они суть точки, и проходятъ черезъ одну точку, если суть плоскости), то и убѣдимся въ возможности конфигураціи съ характеристикой n.

14. Будемъ обозначать черезъ $Cf(k)[A_i, A_j \ldots]$ конфигурацію съ характеристикой k, опредѣляемую всѣми n плоскостями A, за исключеніемъ $A_i, A_j \ldots$, и соотвѣтственными имъ точками p.

Если положимъ сперва, что n есть число нечетное, то въ конфигураціяхъ $Cf(n-1)[A_i]$ элементы, противоположные точкѣ o, будутъ плоскости, въ конфигураціяхъ $Cf(n-2)[A_i, A_j]$ точки, въ конфигураціяхъ $Cf(u-3)[A_i, A_j, A_k]$ опять плоскости и т. д.

Обозначимъ плоскости, противоположныя точкѣ o,

въ конфигураціи	$Cf(n-1)[A_1]$	чрезъ	N_1,
„	$Cf(n-1)[A_2]$	„	N_2,
„	$Cf(n-1)[A_3]$	„	N_3,
„	$Cf(n-1)[A_4]$	„	N_4.

Обозначимъ точки, противоположныя точкѣ o,

въ конфигураціи	$Cf(n-2)[A_1, A_2]$	чрезъ	v_1,
„	$Cf(n-2)[A_1, A_3]$	„	v_2,
„	$Cf(n-2)[A_1, A_4]$	„	v_3,
„	$Cf(n-2)[A_2, A_3]$	„	v_4,
„	$Cf(n-2)[A_2, A_4]$	„	v_5,
„	$Cf(n-2)[A_3, A_4]$	„	v_6.

Обозначимъ плоскости, противоположныя точкѣ o,

въ конфигураціи $Cf(n-3)[A_2, A_3, A_4]$ чрезъ M_1,
„ $Cf(n-3)[A_1, A_3, A_4]$ „ M_2,
„ $Cf(n-3)[A_1, A_2, A_4]$ „ M_3,
„ $Cf(n-3)[A_1, A_2, A_3]$ „ M_4.

Пусть наконецъ точка, противоположная точкѣ o, въ конфигураціи $Cf(n-4)[A_1, A_2, A_3, A_4]$ будетъ u.

Вслѣдствіе того, что доказываемое для какого-нибудь даннаго значенія n мы считаемъ извѣстнымъ для всѣхъ его меньшихъ значеній, будемъ имѣть, что всѣ четыре плоскости M проходятъ черезъ точку u. На томъ же основаніи заключаемъ, что каждая изъ точекъ v лежитъ на двухъ изъ плоскостей M, именно:

точка v_1 на плоскостяхъ M_3, M_4,
„ v_2 „ M_2, M_4,
„ v_3 „ M_2, M_3,
„ v_4 „ M_1, M_4,
„ v_5 „ M_1, M_3,
„ v_6 „ M_1, M_2.

Наконецъ по той же причинѣ

плоскость N_1 проходитъ чрезъ точки v_1, v_2, v_3,
„ N_2 „ „ „ v_1, v_4, v_5,
„ N_3 „ „ „ v_2, v_4, v_6,
„ N_4 „ „ „ v_3, v_5, v_6.

Отсюда видимъ, что всѣ точки u и v и всѣ плоскости M и N составляютъ первую конфигурацію Мёбіуса и потому четыре плоскости N_1, N_2, N_3, N_4 проходятъ чрезъ одну точку w, противоположную въ этой конфигураціи съ точкою u.

Такъ какъ въ предыдущихъ разсужденіяхъ подъ плоскостью A_4 можно подразумѣвать любую изъ плоскостей A за исключеніемъ A_1, A_2, A_3, то убѣждаемся, что всѣ плоскости N, противоположныя точкѣ o въ n конфигураціяхъ $Cf(n-1)[A_i]$, проходятъ черезъ одну и ту же точку w, а это и нужно было доказать.

Если бы мы предположили, что n есть число четное, то предыдущее доказательство измѣнилось бы только въ томъ, что въ разсматриваемыхъ четырехъ послѣднихъ рядахъ элементовъ (N), (v), (M), u точки были бы замѣнены плоскостями и обратно. При этомъ заключительный доводъ доказательства остался бы по существу тотъ же самый, такъ какъ мы видѣли, что первая конфигурація Мёбіуса можетъ быть констатирована двумя взаимными теоремами.

15. Чтобы вполнѣ убѣдиться, что доказанная предыдущими разсужденіями конфигурація обладаетъ всѣми вышеупомянутыми свойствами общей конфигураціи Мёбіуса, намъ нужно еще показать, что при вся-

комъ n число всѣхъ точекъ и всѣхъ плоскостей, составляющихъ эту конфигурацію, равно 2^{n-1}, а число элементовъ, совмѣщенныхъ съ любымъ элементомъ конфигураціи, равно n.

Принимая за данныя, опредѣляющія конфигурацію, точку o, n плоскостей A и точки p, мы распредѣляемъ, какъ уже сказано, всѣ элементы въ послѣдовательные ряды, состоящіе поперемѣнно изъ точекъ и плоскостей.

Первый рядъ содержитъ одну только точку o, второй — n плоскостей A, третій—всѣ точки p, число которыхъ равно числу сочетаній изъ n по 2. Четвертый рядъ состоитъ изъ плоскостей B, каждая изъ которыхъ соотвѣтствуетъ тремъ изъ плоскостей A; слѣдовательно, число элементовъ четвертаго ряда равно числу сочетаній изъ n по 3. Пятый рядъ состоитъ изъ точекъ, противоположныхъ точкѣ o въ первыхъ конфигураціяхъ Мёбіуса, опредѣляемыхъ каждыми четырьмя изъ плоскостей A (конечно вмѣстѣ съ точками p и o), а потому число элементовъ этого ряда будетъ равно числу сочетаній изъ n по 4.

Вообще число элементовъ k-го ряда должно равняться числу сочетаній изъ n по k, потому что элементы этого ряда суть противоположные точкѣ o въ конфигураціяхъ съ характеристикою k, опредѣляемыхъ каждыми k плоскостями изъ всѣхъ n плоскостей A.

Называя чрезъ μ и ν числа точекъ и плоскостей, составляющихъ конфигурацію, опредѣляемую всѣми плоскостями A, и подразумѣвая подъ знакомъ C_n^k число сочетаній изъ n по k, будетъ, слѣдовательно, имѣть:

$$\mu + \nu = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n.$$

Вторая часть этого равенства есть сумма биноміальныхъ коэффиціентовъ и потому

$$\mu + \nu = (1+1)^n = 2^n.$$

Въ то же время

$$\mu - \nu = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\mu = \nu = 2^{n-1}.$$

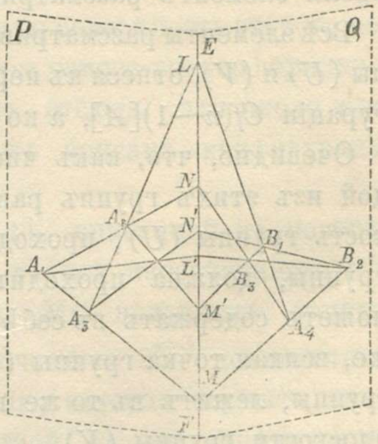
Если мы возьмемъ какой-нибудь элементъ ε k-го ряда, то онъ, будучи противоположнымъ точкѣ o для нѣкоторой конфигураціи $Cf(k)[A]$ съ характеристикой k, совмѣщается съ k элементами предыдущаго ряда, принадлежащими этой конфигураціи. Кромѣ того этотъ же элементъ ε будетъ совмѣщаться съ тѣми элементами послѣдующаго ряда, которые суть противоположные точкѣ o для всѣхъ конфигурацій $Cf(k+1)[A]$, опредѣляемыхъ тѣми сочетаніями плоскостей A по $(k+1)$, въ которыя входятъ k плоскостей A, принадлежащихъ предыдущей конфигураціи $Cf(k)[A]$. Число этихъ сочетаній, очевидно, равняется $(n-k)$. Слѣдовательно, съ произвольно взятымъ элементомъ ε конфигураціи $Cf(n)[A]$ совмѣщаются $k+(n-k)=n$ элементовъ.

16. Въ предыдущемъ мы свели доказательство конфигураціи Мёбіуса какого-угодно порядка къ доказательству первой изъ этихъ конфигурацій, т. е. возможности построенія двухъ вписанныхъ другъ въ друга тетраэдровъ.

Это послѣднее предложеніе доказано Мёбіусомъ при помощи его барицентрическаго исчисленія, которое, какъ извѣстно, есть одно изъ обобщеній метода координатъ. Сокращенный способъ аналитической геометріи даетъ средство къ весьма простой формулировкѣ этого доказательства при той же самой руководящей идеѣ *).

Считаемъ не лишнимъ привести здѣсь геометрическое доказательство того же предложенія, основанное на началахъ проективной геометріи.

Возьмемъ четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 въ пространствѣ и примемъ ихъ за вершины тетраэдра (A). Обозначимъ черезъ P плоскость, проходящую черезъ три первыя изъ этихъ точекъ, и черезъ Q произвольную плоскость, проходящую черезъ A_4. Пусть EF будетъ линія пересѣченія этихъ плоскостей.



Ребра тетраэдра A, лежащія на его грани P, встрѣтятъ прямую EF въ точкахъ L, M, N. Прямыя LA_4, MA_4, NA_4 будутъ линіями пересѣченія остальныхъ трехъ граней того же тетраэдра съ плоскостью Q.

Возьмемъ на этихъ прямыхъ точки B_1, B_2, B_3 и примемъ ихъ за вершины другого тетраэдра (B). Эти три вершины лежатъ на граняхъ тетраэдра (A) и грань Q тетраэдра (B) проходитъ черезъ вершину A_4 тетраэдра (A). Пусть L', M', N' будутъ точки, въ которыхъ прямыя B_2B_3, B_1B_3, B_1B_2 встрѣчаютъ прямую EF.

Для того чтобы тетраэдръ (B) былъ описанный около тетраэдра (A), его грани должны пересѣкать плоскость P по тремъ прямымъ, соединяющимъ точки L', M', N' съ вершинами A_1, A_2, A_3.

Допустивши это, замѣтимъ, что шесть точекъ L, L', M, M', N, N', будучи точками пересѣченія прямой EF со сторонами полнаго четыреугольника B_1 B_2 B_3 A_4 на плоскости Q, составляютъ инволюцію. От-

*) Это доказательство приведено нами, какъ примѣръ примѣненія сокращеннаго способа, въ „Основномъ курсѣ Аналитической Геометріи" ч. II, Харьковъ, 1888, стр. 62—63.

сюда же слѣдуетъ, что шесть прямыхъ, по которымъ плоскость P пересѣкаетъ три грани тетраэдра (A) и три грани тетраэдра (B), будучи прямыми, сходящимися по три въ точкахъ A_1, A_2, A_3 и встрѣчающими прямую EF въ шести точкахъ инволюціи, составляютъ также систему сторонъ полнаго четыреугольника. Это доказываетъ, что прямыя A_1L', A_2M', A_3N' сходятся въ одну точку.

Точка эта есть четвертая вершина тетраэдра (B), и такъ какъ она находится на плоскости P, то убѣждаемся, что тетраэдръ (B) есть не только описанный около тетраэдра (A), но и вписанный въ него. Другими словами, тетраэдры (A) и (B) суть вписанные другъ въ друга.

17. Не трудно показать, что всякая конфигурація Мёбіуса состоитъ изъ двухъ такихъ же конфигурацій низшаго на единицу порядка, вписанныхъ одновременно другъ въ друга.

Положимъ, что разсматриваемая конфигурація есть $Cf(n)[A]$, гдѣ подъ A будемъ подразумѣвать, какъ и прежде, n плоскостей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку o конфигураціи. Если возьмемъ какія-нибудь $(n-1)$ изъ этихъ плоскостей, то опредѣлимъ конфигурацію $Cf(n-1)[A]$, низшаго на единицу порядка и входящую въ составъ разсматриваемой, т. е. такую, каждый элементъ которой есть въ то же время элементъ разсматриваемой конфигураціи.

Всѣ элементы разсматриваемой конфигураціи мы раздѣлимъ на двѣ группы (U) и (V), отнеся къ первой тѣ, которые принадлежатъ взятой конфигураціи $Cf(n-1)[A]$, а ко второй всѣ тѣ, которые не принадлежатъ ей.

Очевидно, что, какъ число точекъ, такъ и число плоскостей въ каждой изъ этихъ группъ равняется 2^{n-2}. При этомъ какая-нибудь плоскость группы (U), проходя непремѣнно черезъ $(n-1)$ точекъ той же группы, должна проходить еще черезъ одну точку группы (V) и не можетъ содержать въ себѣ болѣе одной точки этой группы. Точно такъ же, всякая точка группы (U), находясь на $(n-1)$ плоскостяхъ той же группы, лежитъ въ то же время на одной, и притомъ только на одной, плоскости группы (V).

Всѣ элементы группъ (U) и (V) совмѣщаются, такимъ образомъ, попарно: точки съ плоскостями и плоскости съ точками.

Если теперь возьмемъ какую-нибудь плоскость группы (V), то она, проходя, согласно сказанному, только черезъ одну точку группы (U), должна проходить черезъ $(n-1)$ точекъ той же группы (V). Подобнымъ же образомъ всякая точка группы (V), находясь только на одной плоскости группы (U), должна лежать на $(n-1)$ плоскостяхъ той же группы (V).

Всѣ элементы группы (V) составляютъ, слѣдовательно, конфигурацію Мёбіуса съ характеристикой $(n-1)$.

Такимъ образомъ видимъ, что двѣ группы (U) и (V), на которыя раздѣлены нами всѣ элементы разсматриваемой конфигураціи, суть двѣ конфигураціи низшаго на единицу порядка и притомъ такія, что точки одной лежатъ на плоскостяхъ другой и обратно, т. е. это суть двѣ конфигураціи вписанныя другъ въ друга.

18. Восемь граней двухъ вписанныхъ другъ въ друга тетраэдровъ могутъ быть разсматриваемы, какъ четыре поверхности 2-го порядка имѣющія восемь общихъ точекъ.

Извѣстно изъ теоріи поверхностей 2-го порядка, что семью точками, общими тремъ такимъ поверхностямъ, опредѣляется восьмая ихъ общая точка, и что черезъ эти восемь точекъ можно провести безчисленное множество поверхностей 2-го порядка.

Первая конфигурація Мёбіуса представляется, такимъ образомъ, прямымъ слѣдствіемъ этого свойства поверхностей 2-го порядка. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы убѣждаемся изъ сказаннаго, что если семь точекъ этой конфигураціи находятся на какой-нибудь данной поверхности 2-го порядка (напр. на сферѣ), то и восьмая точка лежитъ на той же поверхности.

Положимъ, что намъ дана какая-нибудь поверхность 2-го порядка S. Возьмемъ на ней точку o и проведемъ черезъ эту точку n плоскостей $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$. Линія пересѣченія какихъ-либо двухъ изъ этихъ плоскостей встрѣтитъ поверхность S еще въ одной точкѣ p. Элементами o, (A), (p) опредѣлится конфигурація Мёбіуса, всѣ точки которой, какъ слѣдуетъ изъ сказаннаго, должны лежать на поверхности S.

Мы убѣждаемся такимъ образомъ, что во всякую поверхность второго порядка можетъ быть вписана конфигурація Мёбіуса какого-угодно порядка.

Въ силу закона двойственности заключаемъ отсюда, что около всякой поверхности второго порядка можетъ быть описана конфигурація Мёбіуса какого-угодно порядка.

19. Всякая плоскость конфигураціи $Cf(n)[A]$, вписанной въ поверхность S 2-го порядка, опредѣляетъ своимъ съ ней пересѣченіемъ нѣкоторую *дѣйствительную линію 2-го порядка*. Мы получаемъ, такимъ образомъ, на поверхности S систему 2^{n-1} точекъ и 2^{n-1} коническихъ сѣченій, представляющихъ также конфигурацію, которая служитъ какъ бы изображеніемъ на поверхности S вписанной въ нее конфигураціи Мёбіуса. Черезъ каждую точку этой конфигураціи проходитъ n коническихъ сѣченій и на каждомъ коническомъ сѣченіи лежитъ n точекъ.

Если поверхность S есть сфера, то, взявши ея стереографическую проекцію на какую-нибудь плоскость, мы получимъ на этой послѣдней такую же конфигурацію точекъ и круговъ. Выше были упомянуты частные случаи такихъ круговыхъ конфигурацій.

Еще въ 1873 году въ статьѣ „Выводъ одного общаго свойства многосторонниковъ" *) нами была доказана возможность такого расположенія круговъ на плоскости.

---

*) См. Математическій Сборникъ т. VI, Москва, 1873.

Новое аналитическое доказательство параллелограмма силъ.

В. Г. Имшенецкаго.

1. Аналитическихъ даказательствъ основной теоремы статики предложено немного, сравнительно съ обиліемъ доказательствъ синтетическихъ или геометрическихъ.

Лучшія аналитическія доказательства принадлежатъ *Даламберу* [1]), *Лапласу* [2]) и *Пуассону* [3]).

Наше доказательство, сходное по основнымъ допущеніямъ съ двумя первыми изъ только что упомянутыхъ, приводитъ къ цѣли проще, съ помощію однихъ лишь элементарныхъ средствъ анализа, между тѣмъ какъ для доказательствъ Даламбера и Лапласа потребовались средства анализа безконечномалыхъ.

2. Если p и q означаютъ величину двухъ силъ, которыхъ направленія въ общей точкѣ ихъ приложенія O составляютъ прямой уголъ, а r и α представляютъ соотвѣтственно величину равнодѣйствующей и уголъ, не больше прямого, между направленіями силъ p и r; то легко заключить, какъ извѣстно, что между этими четырьмя величинами должны существовать два уравненія общаго вида

$$r = pf\left(\frac{q}{p}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и

$$\frac{q}{p} = \varphi(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

вслѣдствіе необходимаго требованія однородности отъ этихъ уравненій.

1) Opuscules mathématiques, t. VI, p. 368.

2) Mécanique céleste, t. I, p. 1.

3) Traité de Mécanique, t. I, p. 45 (2-e éd).

Наша задача состоитъ поэтому въ отысканіи ´вида неизвѣстныхъ функцій f и φ, а изъ ея сущности легко непосредственно сдѣлать слѣдующія заключенія объ ихъ свойствахъ.

Перемѣнивъ q на p и обратно мы неизмѣнимъ величины r, но вслѣдствіе этого уголъ α перемѣнится въ дополнительный уголъ $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Слѣдовательно, вмѣстѣ съ (1) и (2) имѣемъ уравненія:

$$r = qf\left(\frac{p}{q}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$\frac{p}{q} = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

изъ которыхъ первое показываетъ, что r есть функція отъ p и q не только однородная первой степени, но и симметричная.

Изъ совокупности предыдущихъ четырехъ уравненій обнаруживаются свойства функцій, выраженныя въ слѣдующихъ уравненіяхъ:

$$\varphi(\alpha)\,\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

и

$$f\left(\frac{q}{p}\right) : f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q}{p}, \quad \text{или} \quad f(\varphi(\alpha)) : f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \varphi(\alpha) \ldots (6)$$

Кромѣ того ясно, что, допуская только положительныя или равныя нулю значенія p и q и значенія α, не выходящія изъ границъ 0 и $\frac{\pi}{2}$, мы всегда будемъ имѣть:

$$pf\left(\frac{q}{p}\right) \geqq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha) \geqq 0.$$

При томъ нетрудно видѣть, что функція $pf\left(\frac{q}{p}\right)$, или $qf\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ только для $p = 0$ и $q = 0$, а функція $\varphi(\alpha) = 0$, только для $\alpha = 0$.

Первое утвержденіе не есть самостоятельное допущеніе, но только слѣдствіе другого необходимаго допущенія, что силы приложенныя къ точкѣ должны имѣть единственную равнодѣйствующую. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что двѣ неравныя нулю силы p и q, приложенныя къ точкѣ подъ какимъ-нибудь угломъ, различнымъ отъ двухъ прямыхъ, находятся въ равновѣсіи, и прилагая къ той-же точкѣ третью силу s, равную по величинѣ и противуположную p, мы для трехъ силъ p, q и s могли-бы получить двѣ различныхъ равнодѣйствующихъ s и q: такъ какъ сами по себѣ уравновѣшиваются p и q, по предположенію, а p и s—какъ равныя и противуположныя [1]).

Второе утвержденіе означаетъ только, что $\varphi(\alpha)$ т. е. отношеніе $\frac{q}{p}$, при конечной величинѣ p, можетъ быть равно нулю лишь для $q=0$, вслѣдствіе чего $\alpha=0$, потому что тогда направленія силъ p и r совпадаютъ.

Замѣтимъ еще, что для $\alpha=\frac{\pi}{4}$ изъ (5) имѣемъ

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=1$$

и такъ какъ $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$, то

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

3. Перейдемъ теперь къ опредѣленію вида функцій φ и f.

Изъ (1) и (2) уравненій слѣдуетъ, что

$$p=\frac{r}{f(\varphi(\alpha))} \quad \text{и} \quad q=\frac{r\varphi(\alpha)}{f(\varphi(\alpha))}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

Послѣднія формулы могутъ служить для разложенія силы на двѣ прямоугольныя слагающія, когда дано направленіе одной изъ нихъ.

Чтобы воспользоваться формулами (8), проведемъ черезъ O, точку приложенія силъ p, q и r, двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя xx' и yy' такъ, чтобы направленіе силы r составляло съ Ox и Oy соотвѣтственно углы $\alpha+\beta\leqq\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$.

Означая слагающія силъ r, p и q, направленныя по осямъ xx' и yy' соотвѣтственно черезъ r' и r'', p' и p'', q' и q'', получимъ по формуламъ (8) слѣдующія ихъ выраженія:

---

[1]) Это разсужденіе заимствовано изъ статьи *G. Darboux*: Sur la composition des forces. Bull. des sc. math. t. VIII, p. 284. См. также *Despeyroux*. Cours de Mécanique t. I, Note I, p. 373.

$$r' = \frac{r}{f(\varphi(\alpha+\beta))}, \qquad r'' = \frac{r\varphi(\alpha+\beta)}{f(\varphi(\alpha+\beta))};$$

$$p' = \frac{p}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))}, \qquad p'' = \frac{p\varphi(\beta)}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r\varphi(\beta)}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))};$$

$$q' = -\frac{q\varphi(\beta)}{f(\varphi(\beta))} = -\frac{r\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)}{f(\varphi(\alpha))f(\varphi(\beta))}, \qquad q'' = \frac{q}{f(\varphi(\beta))} = \frac{r\varphi(\alpha)}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))}.$$

Чтобы яснѣе показать соотношеніе между шестью предыдущими силами, приложимъ къ точкѣ O еще силу r_1, равную и противуположную r, и означая черезъ r_1' и r_1'' слагающія r_1, направленныя по xx' и yy', будемъ имѣть

$$r_1' = -r' \qquad \text{и} \qquad r_1'' = -r''.$$

Такъ какъ три силы p, q и r_1 находятся въ равновѣсіи, то должны находиться въ равновѣсіи и шесть силъ p', q', r_1' и p'', q'', r_1'', изъ которыхъ три первыя, направленныя по xx', имѣютъ равнодѣйствующую

$$X = p' + q' + r_1' = p' + q' - r',$$

а три послѣднія, направленныя по yy', можно замѣнить равнодѣйствующей

$$Y = p'' + q'' + r_1'' = p'' + q'' - r''.$$

И такъ, приложенныя къ точкѣ O двѣ силы и X и Y составляютъ прямой уголъ и находятся въ равновѣсіи; слѣдовательно, какъ мы видѣли выше, необходимо

$$X = 0 \qquad \text{и} \qquad Y = 0;$$

т. е.

$$r' = p' + q' \qquad \text{и} \qquad r'' = p'' + q''.$$

Введя данныя выше значенія всѣхъ членовъ двухъ послѣднихъ равенствъ, получаемъ:

$$\frac{r}{f(\varphi(\alpha+\beta))} = \frac{r[1-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)]}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

$$\frac{r\varphi(\alpha+\beta))}{f(\varphi(\alpha+\beta))} = \frac{r[\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)]}{f(\varphi(\alpha))\,f(\varphi(\beta))} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (10)$$

и, посредствомъ дѣленія (10) на (9), находимъ

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{1-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)},$$

теорему сложенія аргументовъ для функціи $\varphi(\alpha)$ вида подобнаго формулѣ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Кромѣ того мы видѣли, что значенія $\varphi(\alpha)$ и $\operatorname{tg}\alpha$ равны для $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Отсюда, какъ извѣстно, легко заключить о существованіи равенства

$$\varphi(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

сначала для всѣхъ значеній $\alpha=\frac{m}{2^n}\left(\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\pi}{2}$, гдѣ m и n произвольныя цѣлыя, и потомъ вообще для значеній α, не выходящихъ изъ предѣловъ 0 и $\frac{\pi}{2}$.

4. Обращаемся къ отысканію вида функціи f, чего можно достичь, не зная найденнаго выше вида функціи φ, но только основываясь на ихъ свойствахъ, выраженныхъ уравненіями (1) — (6).

Дѣйствительно, полагая

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},$$

мы заключаемъ, на основаніи (5), что вторая часть равенства (9), представляющая значеніе r', обращается въ нуль; поэтому r равно второй части равенства (10), которая представляетъ значеніе слагающей r''. Отсюда легко замѣтить, что

$$f(\varphi(\alpha)).f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\varphi(\alpha)+\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Умноживъ это послѣднее уравненіе на (6) и обращая вниманіе на (5), находимъ

$$f(\varphi(\alpha))^2=\varphi(\alpha)^2+1,$$

а такъ какъ значеніе $f(\varphi(\alpha))$ можетъ быть только положительнымъ, то

$$f(\varphi(\alpha))=+\sqrt{\varphi(\alpha)^2+1}$$

Слѣдовательно видъ функціи f найденъ и, въ силу уравненій (1) и (2), вмѣстѣ съ этимъ получаемъ формулу

$$r = p\sqrt{\frac{q^2}{p^2} + 1} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

представляющую величину равнодѣйствующей двухъ силъ приложенныхъ къ точкѣ подъ прямымъ угломъ.

Переходъ къ случаю, когда двѣ силы въ точкѣ ихъ приложенія составляютъ не прямой уголъ, какъ извѣстно очень простъ; поэтому оставляемъ его безъ разсмотрѣнія.

Розысканіе особенныхъ точекъ плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ.

М. А. Тихомандрицкаго.

Въ курсахъ Дифференціальнаго исчисленія дается понятіе о разнаго рода особенныхъ точкахъ, которыя могутъ имѣть плоскія кривыя; но ни въ одномъ изъ нихъ я не встрѣчалъ изложенія общаго метода для нахожденія по данному уравненію кривой ея особенныхъ точекъ; восполнить этотъ пробѣлъ по отношенію къ плоскимъ алгебраическимъ кривымъ—цѣль настоящей замѣтки.

Здѣсь мы именно покажемъ, въ общихъ чертахъ, какимъ образомъ при помощи *раціональныхъ дѣйствій*, именно алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя, можно изъ даннаго уравненія плоской алгебраической кривой:

$$F(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

вывести рядъ паръ уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= 0, \\ \psi(x, y) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

изъ которыхъ каждая пара будетъ опредѣлять координаты особенныхъ точекъ одной опредѣленной категоріи, одна, напримѣръ, координаты всѣхъ двойныхъ точекъ съ различными касательными, другая двойныхъ съ совпадающими касательными, третья координаты всѣхъ тройныхъ точекъ съ различными касательными, четвертая тройныхъ съ двумя совпадающими касательными и т. д. Съ помощію этихъ паръ уравненій, *не рѣшая* ихъ, можно опредѣлить *родъ* кривой (Geschlecht Клебша, Defect Кэли, Rang Вейерштрасса), а также найти при помощи *раціональныхъ дѣйствій* уравненія *присоединенныхъ кривыхъ* [adjungirte Curven Нётера (Nöther)], что имѣетъ фундаментальное значеніе въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ ирраціональности, опредѣляемой алгебраическимъ уравненіемъ (1).

Предлагаемая замѣтка была мною набросана въ общихъ чертахъ еще въ бытность мою въ Берлинѣ въ 1884 г. и предназначалась тогда-же для сообщенія нашему Математическому Обществу; но другія изслѣдованія отвлекли меня отъ окончательной разработки этого вопроса. Черезъ пять лѣтъ вернувшись къ своимъ наброскамъ, исправивъ и дополнивъ ихъ, я рѣшился представить ихъ на судъ Математическаго Общества, такъ какъ до сихъ поръ нигдѣ излагаемый способъ опредѣленія особенныхъ точекъ не былъ опубликованъ, сколько мнѣ извѣстно.

---

1. Координаты k-кратной точки кривой (1), какъ извѣстно, должны удовлетворять такимъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{c} F(x,y)=0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}=0\,,\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\,, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0\,,\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0\,,\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0\,, \\ \dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3}=0\,,\quad \dfrac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}=0\,,\quad \dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}=0\,,\quad \dfrac{\partial^3 F}{\partial y^3}=0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-1}}=0\,,\quad \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-2}\partial y}=0\,,\quad \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-3}\partial y^2}=0\,,\ldots\ldots \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial y^{k-1}}=0\,, \end{array}\right\}\ldots(3)$$

при чемъ угловые коэффиціенты касательныхъ къ вѣтвямъ кривой, проходящимъ чрезъ эту кратную точку, въ этой самой точкѣ, опредѣлятся изъ уравненія:

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k}+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-1}\partial y}y'+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-2}\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-3}\partial y^3}y'^3+\ldots+\frac{\partial^k F}{\partial y^k}y'^k=0.\quad(4)$$

Если это уравненіе для y' должно имѣть кратные корни, то изъ этого требованія получатся новыя условія въ формѣ уравненій, которымъ должны удовлетворять координаты такой k-кратной точки. Отсюда слѣдуетъ, что для опредѣленія особенныхъ точекъ данной кривой надо имѣть способъ находить общія рѣшенія нѣсколькихъ совмѣстныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными, который и будетъ показанъ въ слѣдующемъ §.

2. Пусть дана система m уравненій:

$$f(x, y) = 0, \ f_1(x, y) = 0, \ f_2(x, y) = 0, \cdots f_{m-1}(x, y) = 0; \ . \ . \quad (5)$$

чтобы найти рѣшенія общія первымъ двумъ, станемъ (расположивъ ихъ по нисходящимъ степенямъ y) искать общаго наибольшаго дѣлителя первыхъ частей первыхъ двухъ изъ этихъ уравненій: операція эта остановится, когда придемъ къ остатку, несодержащему y; пусть онъ будетъ $\varphi(x)$; предпослѣдній же остатокъ пусть будетъ $\psi(x, y)$; тогда для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\varphi(x) = 0, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

$\psi(x, y)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$, [что мы будемъ такъ обозначать:

$$\psi(x, y) = D(f(x, y), \ f_1(x, y)),] \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (7)$$

и слѣдовательно общія рѣшенія первыхъ двухъ изъ уравненій (1) найдутся изъ пары уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= 0, \\ \psi(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

Станемъ теперь искать общаго наибольшаго дѣлителя функцій $\psi(x, y)$ и $f_2(x, y)$; операція остановится, когда придемъ къ остатку $\theta(x)$, несодержащему y; предпослѣдній остатокъ обозначимъ чрезъ $\psi_1(x, y)$: тогда, для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію:

$$\theta(x) = 0, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

будетъ

$$\psi_1(x, y) = D(\psi(x, y), \ f_2(x, y)), \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (10)$$

и общія рѣшенія уравненій $\psi(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ найдутся изъ системы уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \theta(x) &= 0, \\ \psi_1(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (11)$$

Ищемъ теперь $D(\psi(x), \ \theta(x))$; если онъ будетъ равенъ постоянной, то ни одно изъ рѣшеній системы (7) не будетъ совпадать ни съ однимъ изъ рѣшеній системы (4), и три первыя уравненія не будутъ имѣть общихъ рѣшеній, будутъ несовмѣстны; если же онъ будетъ функція x, пусть $\varphi_1(x)$, такъ что слѣд.

$$\varphi_1(x) = D(\varphi(x), \ \theta(x)), \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (12)$$

то для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\varphi_1(x) = 0, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (13)$$

$\psi_1(x, y)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ первыхъ частей первыхъ трехъ уравненій, и потому общія рѣшенія этихъ трехъ уравненій найдутся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) = 0\,, \\ \psi_1(x, y) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Послѣ этого приступаемъ къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя функцій $\psi_1(x, y)$ и $f_3(x, y)$; дойдя до остатка $\theta_1(x)$, несодержащаго x, и обозначая предпослѣдній чрезъ $\psi_2(x, y)$, будемъ имѣть для значеній x удовлетворяющихъ уравненію

$$\theta_1(x) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\psi_2(x, y) = D(\psi_1(x, y),\ f_3(x, y))\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

слѣдовательно рѣшенія общія уравненіямъ $\psi_2(x, y) = 0$ и $f_3(x, y) = 0$ найдутся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(x) = 0\,, \\ \psi_2(x, y) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Ищемъ теперь $D(\varphi_1(x),\ \theta_1(x))$; если онъ равенъ постоянной, то наши первыя четыре изъ уравненій (1), а слѣдовательно и всѣ несовмѣстны; если же онъ функція x:

$$D(\varphi_1(x),\ \theta(x)) = \varphi_2(x)\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

то общія рѣшенія первыхъ четырехъ уравненій найдутся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x) = 0\,, \\ \psi_2(x, y) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Продолжая это, мы получимъ что нибудь изъ двухъ: или что для $k \leqq m - 1$

$$D(\varphi_{k-2}(x),\ \theta_{k-2}(x)) = \text{постоянному}: \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

тогда первыя k уравненій, а слѣдовательно и всѣ несовмѣстны; или же дойдемъ до пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{m-2}(x) = 0\,, \\ \psi_{m-2}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

изъ которой найдемъ общія рѣшенія всѣхъ уравненій предложенной системы.

3. Возвращаясь къ системѣ уравненій (1) § 1, по только что изложенному способу выведемъ для уравненій первыхъ двухъ строчекъ этой таблицы пару уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) = 0\,, \\ \psi(x\,,y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

которая и опредѣлитъ координаты всѣхъ особенныхъ точекъ. Чтобы выдѣлить изъ нихъ двойныя, присоединимъ уравненія третьей строчки нашей таблицы къ уравненію $\psi(x\,,y) = 0$, и выведемъ для этой системы по тому же способу пару уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \theta(x) = 0\,, \\ \psi_1(x\,,y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

опредѣляющую ихъ общія рѣшенія. Затѣмъ ищемъ $D(\varphi(x)\,,\theta(x))$; если онъ будетъ равенъ постоянной, то это будетъ значить, что пары (1) и (2), а слѣдовательно и система уравненій первыхъ трехъ строчекъ нашей таблицы не имѣютъ общихъ рѣшеній, и слѣдовательно всѣ особенныя точки нашей кривой суть двойныя; если же онъ будетъ функція x, именно будетъ

$$D(\varphi(x)\,,\theta(x)) = \varphi_1(x)\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

то полагая

$$\varphi(x) : \varphi_1(x) = \chi(x)\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

координаты двойныхъ точекъ мы получимъ изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \chi(x) = 0\,, \\ \psi(x\,,y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

тогда какъ изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) = 0\,, \\ \psi_1(x\,,y) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

опредѣлятся координаты особенныхъ точекъ кратности выше двойной. Чтобы выдѣлить изъ нихъ тройныя, присоединимъ къ $\psi_1(x\,,y) = 0$ уравненія четвертой строчки нашей таблицы и найдемъ по тому же способу § 2 пару уравненій, опредѣляющихъ ихъ общія рѣшенія:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(x) = 0\,, \\ \psi_2(x\,,y) = 0\,; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

затѣмъ ищемъ $D(\varphi_1(x)\,,\theta_1(x))$; если онъ будетъ равенъ постоянной, то системы (6) и (7) не будутъ имѣть общихъ рѣшеній; слѣдовательно кратныхъ точекъ выше тройныхъ не будетъ, и эти послѣднія опредѣлятся изъ пары уравненій (6); въ противномъ же случаѣ, т. е. когда будетъ

$$D(\varphi_1(x), \theta_1(x)) = \varphi_2(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

мы получимъ, полагая

$$\varphi_1(x) : \varphi_2(x) = \chi_1(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} \chi_1(x) = 0\,, \\ \psi_1(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

координаты всѣхъ тройныхъ точекъ, а изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x) = 0\,, \\ \psi_2(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

координаты всѣхъ точекъ высшей кратности. Продолжая это мы наконецъ придемъ къ парѣ уравненій

$$\left.\begin{aligned} \chi_{k-2}(x) = 0\,, \\ \psi_{k-2}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

изъ которыхъ опредѣлятся координаты всѣхъ k-кратныхъ точекъ, тогда какъ изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{k-1}(x) = 0\,, \\ \psi_{k-1}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

координаты всѣхъ точекъ высшей кратности. Здѣсь

$$\varphi_{k-1}(x) = D(\varphi_{k-2}(x), \theta_{k-2}(x)),$$

а

$$\left.\begin{aligned} \theta_{k-2}(x) = 0\,, \\ \psi_{k-1}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\}$$

— система уравненій, опредѣляющихъ общія рѣшенія той системы уравненій, которая получится, когда къ уравненію $\psi_{k-1}(x, y) = 0$ присоединимъ уравненія $k+1$-ой строки нашей таблицы.

Операція эта остановится, когда дойдемъ до такой пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{m-2}(x) = 0\,, \\ \psi_{m-2}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

что, присоединяя къ $\psi_{m-2}(x, y) = 0$ уравненія слѣдующей строчки и найдя пару уравненій, опредѣляющихъ ихъ общія рѣшенія:

$$\left.\begin{aligned}\theta_{m-2}(x)=0\,,\\ \psi_{m-1}(x\,,y)=0\,,\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(15)$$

мы будемъ затѣмъ имѣть

$$D(\varphi_{m-2}(x)\,,\theta_{m-2}(x))=C\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

гдѣ $C=$ постоянному: тогда точекъ кратности высшей m-ой наша кривая не будетъ имѣть, и полагая $\varphi_{m-2}(x\,,y):C=\chi_{m-2}(x)$, координаты m-кратныхъ точекъ опредѣлятся изъ пары уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\chi_{m-2}(x)=0\,,\\ \psi_{m-2}(x\,,y)=0\,.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(17)$$

Примѣчаніе. Каждое изъ уравненій каждой пары, прежде чѣмъ идти дальше, должно быть освобождено отъ кратныхъ корней, если таковые имѣются; а такіе случаи возможны. Пусть напримѣръ имѣемъ пару:

$$\left.\begin{aligned}\chi(x)=X_1\cdot X_2{}^2\ldots X_k^k=0\\ [\psi(x\,,y)=[f(x\,,y)]^m+X_1\cdot X_2{}^3\ldots X_k{}^k=0\end{aligned}\right\}\;.\;.\;(18)$$

гдѣ $X_1\,,X_2,\ldots X_k$ полиномы безъ кратныхъ множителей; первое уравненіе по раздѣленіи на $D(\chi(x)\,,\chi'(x))$ приведется къ такому:

$$X_1\cdot X_2\ldots X_k=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(19)$$

которое имѣетъ всѣ корни перваго изъ (18), но только простыми; для этихъ значеній второе приведется къ

$$[f(x\,,y)]^m=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(20)$$

и чрезъ раздѣленіе на

$$D\left\{[f(x\,,y)]^m\,,\frac{\partial[f(x\,,y)]^m}{\partial y}\right\}=[f(x\,,y)]^{m-1}$$

приведется къ такому:

$$f(x\,,y)=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(21)$$

котораго всѣ рѣшенія удовлетворяютъ и (20).

4. Такимъ образомъ съ помощію однихъ раціональныхъ дѣйствій особенныя точки разгруппируются по ихъ кратностямъ такъ, что каждая группа будетъ содержать лишь точки одинаковой кратности, координаты которыхъ будутъ опредѣляться изъ пары уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned}\chi_{k-2}(x)=0\,,\\ \psi_{k-2}(x\,,y)=0\,.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Каждая такая группа можетъ быть раздѣлена на подгруппы по числу совпадающихъ касательныхъ въ ней къ вѣтвямъ кривой. Для k-кратной точки угловые коэффиціенты касательныхъ опредѣляются изъ уравненія (2) § 1: означимъ его для краткости чрезъ

$$\Phi(x\,,y\,;y')=0\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \quad (2)$$

предполагая расположеннымъ по убывающимъ степенямъ y'. Для того, чтобы отыскать тѣ точки, для которыхъ это уравненіе, гдѣ неизвѣстная есть y', будетъ имѣть равные корни, мы должны найти, для какихъ значеній x и y функціи Φ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y'}$ будутъ имѣть общаго наибольшаго дѣлителя:

$$D\left(\Phi,\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right);$$

ища этого общаго наибольшаго дѣлителя, мы придемъ къ остатку $\varphi(x\,,y)$, несодержащему y'; для значеній x и y, удовлетворяющихъ условію

$$\varphi(x\,,y)=0\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\quad (3)$$

предпослѣдній остатокъ, — означимъ его чрезъ $\Phi_1(x\,,y\,,y')$, и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ:

$$\Phi_1(x\,,y\,,y')=D\left(\Phi\,,\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right).\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \quad (4)$$

Ищемъ теперь $D(\varphi(x\,,y)\,,\psi_{k-2}(x\,,y))$; эта операція остановится, когда придемъ къ остатку $\Theta(x)$, несодержащему y; тогда предпослѣдній остатокъ,—означимъ его чрезъ $\varphi_1(x\,,y)$, будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ этихъ функцій:

$$\varphi_1(x\,,y)=D(\varphi(x\,,y)\,,\psi_{k-2}(x\,,y))\quad .\ .\ .\ .\ .\ \quad (5)$$

для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\Theta(x)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \quad (6)$$

Вслѣдъ за этимъ ищемъ $D(\chi_{k-2}(x)\,,\Theta(x))$; если онъ окажется равнымъ постоянному, то ни въ одной изъ k-кратныхъ точекъ не будетъ совпадающихъ касательныхъ и слѣдовательно взаимнокасающихся вѣтвей; если же онъ будетъ функція x:

$$D(\chi_{k-2}(x)\,,\Theta(x))=f(x)\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ \quad (7)$$

то для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$f(x)=0\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \quad (8)$$

$\phi_1(x, y)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ $\phi(x, y)$ и $\psi_{k-2}(x, y)$, и потому изъ пары уравненій

$$\left.\begin{aligned} f(x) = 0\,, \\ \phi_1(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

опредѣлятся координаты тѣхъ изъ k-кратныхъ точекъ, въ которыхъ первая часть уравненія (2) и производная ея по y' будутъ имѣть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцію $\Phi_1(x, y, y')$, [(4)]; слѣдовательно, въ которыхъ будутъ совпадающія касательныя и, слѣдовательно, взаимнокасающіяся вѣтви, тогда какъ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} \chi_{k-2}(x) : f(x) = 0\,, \\ \psi_{k-2}(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

а также изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} f(x) = 0\,, \\ \psi_{k-2}(x, y) : \phi_1(x, y) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

опредѣлятся координаты k-кратныхъ точекъ безъ совпадающихъ касательныхъ.

5. Въ тѣхъ k-кратныхъ точкахъ, въ которыхъ $\Phi_1(x, y, y')$ и $\dfrac{\partial \Phi_1(x,y,y')}{\partial y'}$ не будутъ имѣть общимъ дѣлителемъ функцію y', не будетъ совпадать касательныхъ болѣе чѣмъ по двѣ; тогда угловые коэффиціенты относящіеся къ двойнымъ касательнымъ найдутся изъ уравненія:

$$\Phi_1(x, y, y') = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

тогда какъ угловые коэффиціенты простыхъ касательныхъ изъ уравненія:

$$\Phi(x, y, y') : [\Phi_1(x, y, y')]^2 = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Далѣе, k-кратныя точки съ простыми и съ двойными касательными могутъ быть разгрупированы по числу двойныхъ касательныхъ въ нихъ: для этого надо опредѣлить наивысшую степень уравненія $\Phi_1(x, y, y') = 0$ относительно y'. Пусть это уравненіе по расположеніи его по убывающимъ степенямъ y' будетъ:

$$\pi(x, y)y'^m + \pi_1(x, y)y'^{m-1} + \ldots + \pi_{m-1}(x, y)y' + \pi_m(x, y) = 0\,; \quad (3)$$

если координаты разсматриваемой k-кратной точки съ совпадающими касательными не обращаютъ въ нуль $\pi(x, y)$, то степень этого уравненія будетъ m; если-же они обращаютъ его въ нуль, то степень будетъ $m - 1$ — если они не обращаютъ въ нуль и $\pi_1(x, y)$, въ противномъ случаѣ будетъ $m - 2$, и т. д.; вообще, если они обращаютъ въ нуль только l первыхъ коэффиціентовъ уравненія (3), то степень его будетъ $m-l$. Отсюда видно уже, какъ слѣдуетъ поступать для разгрупированія k-кратныхъ точекъ съ двойными только касательными по числу таковыхъ: ищемъ общія рѣшенія уравненій (9) съ однимъ, двумя, тремя и т. д. первыми изъ уравненій:

$$\pi(x\,,y)=0\,,\ \pi_1(x\,,y)=0\,;\ \pi_2(x\,,y)=0\ldots\pi_{m-1}(x\,,y)=0\,,$$

и затѣмъ изъ рѣшеній общихъ первымъ двумъ выключаемъ рѣшенія общія первымъ тремъ; изъ послѣднихъ выключаемъ рѣшенія общія первымъ четыремъ и т. д. совершенно подобно тому, какъ въ предыдущихъ §§: тогда получимъ пары уравненій, опредѣляющихъ k-кратныя точки одна съ m двойными касательными, другая съ $m-1$, третья съ $m-2$ и т. д.

6. Чтобы изъ k-кратныхъ точекъ (9) § 4 съ совпадающими касательными выдѣлить имѣющія только двойныя касательныя, нужно опредѣлить по предыдущему § тѣ, для которыхъ уравненіе (1) того же § будетъ имѣть кратные корни. Слѣдовательно ищемъ $D\left(\Phi_1,\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y'}\right)$; дойдя до остатка $\varphi^{(1)}(x\,,y)$, несодержащаго y', мы въ предпослѣднемъ остаткѣ — означимъ его чрезъ $\Phi_2(x\,,y\,,y')$, будемъ имѣть этого общаго дѣлителя для значеній x и y, удовлетворяющихъ уравненію

$$\varphi^{(1)}(x\,,y)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

вмѣстѣ съ уравненіями (9) § 4. Чтобы найти такія значенія x и y, ищемъ

$$D(\varphi_1(x\,,y)\,,\ \varphi^{(1)}(x\,,y))=\varphi_2(x\,,y)\,;\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

— это будетъ предпослѣдній остатокъ — для значеній x обращающихъ въ нуль послѣдній:

$$\Theta_1(x)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Ищемъ теперь $D(f(x)\,,\Theta_1(x))$; если это постоянная, то k-кратныхъ точекъ съ касательными, совпадающими больше чѣмъ по двѣ, не будетъ; если же будетъ

$$D(f(x)\,,\ \Theta_1(x))=f_1(x)\,,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

то изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)&=0\,,\\ \varphi_2(x\,,y)&=0\,,\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

опредѣлятся координаты k-кратныхъ точекъ, въ которыхъ касательныя могутъ совпадать и больше, чѣмъ по двѣ; тогда какъ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} f(x):f_1(x)&=0\,,\\ \varphi_1(x\,,y)&=0\,,\end{aligned}\right\}$$

а также изъ уравненій

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x) = 0\,, \\ \varphi_1(x\,,y) : \varphi_2(x\,,y) = 0 \end{array}\right\}$$

опредѣлятся k-кратныя точки, въ которыхъ имѣются только двойныя касательныя.

7. Теперь ясно какъ можно идти дальше въ этомъ направленіи, а также изъ Высшей Алгебры извѣстно, какъ отдѣлятся всѣ равные корни уравненія (2) § 4, когда будутъ имѣться они разной кратности. Когда k-кратныя точки раздѣлены на категоріи по числу совпадающихъ касательныхъ, эти категоріи можно еще подраздѣлить на другія по порядкамъ касанія вѣтвей, имѣющихъ общія касательныя. Для этого надо обратиться къ уравненію:

$$\mathbf{F}(x\,,y\,,y'\,,y'') = 0\,,$$

опредѣляющему вторую производную y, когда вмѣсто $x\,,y$ подставлены координаты разсматриваемой k-кратной точки, а вмѣсто y' угловой коэффиціентъ разсматриваемой изъ двойныхъ (или тройныхъ и т. д.) касательныхъ. Сперва нужно выдѣлить изъ разсматриваемой группы тѣ точки и касательныя, для которыхъ y'' имѣетъ разныя значенія: тогда касаніе разсматриваемыхъ вѣтвей будетъ перваго порядка; затѣмъ тѣ, для которыхъ y'' будетъ имѣть равныя значенія. Для опредѣленія такихъ точекъ и направленій совпадающихъ касательныхъ, надо обратиться къ разсмотрѣнію уравненія, дающаго y''', и т. д. и т. д. Идея о необходимыхъ для этого дѣйствіяхъ должна была достаточно выясниться изъ предъидущаго; болѣе-же подробное изложеніе дальнѣйшаго хода было-бы обременительно для начинающаго читателя и излишне для знающаго.

8. Если подъ *присоединенной* кривой (adjungirte Curve Nöther'a) данной кривой

$$F(x\,,y) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (1)$$

будемъ разумѣть такую, которая проходитъ чрезъ всѣ особенныя точки, причемъ въ каждой изъ нихъ имѣетъ тѣ же особенности, какъ и основная кривая (1), но порядка на единицу нисшаго, слѣдовательно въ k-кратной точкѣ данной кривой $k-1$-кратную, ея двойныя касательныя простыми, ея тройныя двойными и т. д.; причемъ касаніе вѣтвей порядка $\lambda - 1$ тамъ, гдѣ вѣтви фундаментальной кривой (1) имѣютъ касаніе порядка λ, то опредѣленіе ея уравненія можетъ быть выполнено при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій, именно рѣшенія уравненій первой степени относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ этого уравненія. Пусть будетъ:

$$f(x\,,y) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (2)$$

уравненіе присоединенной кривой порядка m, гдѣ m должно быть достаточно высоко для возможности задачи. По опредѣленію ея, координаты k-кратной точки фундаментальной кривой, опредѣляемыя парою уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\chi_{k-2}(x) = 0\,,\\ \psi_{k-2}(x,y) = 0\,,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

должны удовлетворять всѣмъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{c} f(x\,,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial x^{k-2}} = 0 \quad \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial x^{k-3}\partial y} = 0 \ldots \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial y^{k-2}} = 0\,, \end{array}\right\}\ldots\ldots(4)$$

ибо эти точки для присоединенной кривой $k-1$-кратныя. Слѣдовательно первая часть каждаго изъ этихъ уравненій должна дѣлиться безъ остатка на первую часть уравненія

$$\psi_{k-2}(x\,,y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$\chi_{k-2}(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Итакъ дѣлимъ первую часть каждаго изъ уравненій (4) на $\psi_{k-2}(x\,,y)$ (расположивъ всѣ по убывающимъ степенямъ y), и когда получимъ остатокъ степени относительно y ниже чѣмъ $\psi_{k-2}(x\,,y)$, приравниваемъ нулю коэффиціентъ при каждой степени y въ этомъ остаткѣ: получимъ рядъ уравненій вида

$$\varrho(x) = 0\,,\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

которыя всѣ должны обращаться тождественно въ нуль для x, равныхъ корнямъ уравненія (6); а потому первыя части ихъ должны быть дѣлимы безъ остатка на $\chi_{k-2}(x)$; слѣдовательно производя дѣленіе и получивъ остатокъ, мы должны коэффиціенты его при каждой степени x приравнять нулю: это дастъ рядъ уравненій, очевидно линейныхъ относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ уравненія $f(x\,,y) = 0$.

9. Угловые коэффиціенты въ этой точкѣ опредѣлятся изъ уравненія:

$$\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-1}}+\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}\partial y}y'+\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-1}\partial y^2}y'^2+\ldots+\frac{\partial^{k-1}f}{\partial y^{k-1}}y'^{k-1}=0\,;\;.\;.\;(1)$$

если въ разсматриваемыхъ точкахъ данная кривая имѣетъ совпадающія касательныя, слѣдовательно уравненіе (2) §§ (1) и (4) для y' имѣетъ кратные корни, то эти кратные корни будутъ корнями и этого уравненія (1) кратности пониженной на единицу, какъ и для уравненія:

$$\Phi_1(x\,,y\,,y')=D\left(\Phi,\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

[(4) § 4], а потому первая часть уравненія (1) должна дѣлиться безъ остатка на функцію $\Phi_1(x\,,y\,,y')$; выполняя дѣленіе по расположеніи по степенямъ y', мы должны, слѣдовательно, приравнять нулю въ остаткѣ коэффиціенты при каждой степени y', что дастъ рядъ уравненій вида:

$$\mathfrak{F}(x\,,y)=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

которыя должны удовлетворяться всѣми значеніями x и y, удовлетворяющими уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}f(x)=0\,,\\ \varphi(x\,,y)=0\,,\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

опредѣляющимъ координаты разсматриваемыхъ особенныхъ точекъ данной кривой; дѣля потому $\mathfrak{F}(x\,,y)$ на $\varphi(x\,,y)$ по расположеніи обѣихъ по убывающимъ степенямъ y, мы приравниваемъ нулю коэффиціенты при каждой степени y въ имѣющемся получиться остаткѣ этого дѣленія, что дастъ рядъ уравненій вида:

$$\sigma(x)=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

которыя всѣ должны удовлетворяться корнями уравненія $f(x)=0$; а потому первыя части каждаго изъ нихъ должны дѣлиться безъ остатка на $f(x)$; приравнивая на этомъ основаніи нулю коэффиціенты при каждой степени x въ этихъ остаткахъ, получимъ новый рядъ уравненій, очевидно, линейныхъ относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ уравненія $f(x\,,y)=0$ присоединенной кривой.

10. Если l вѣтвей данной кривой въ какой-либо k-кратной точкѣ имѣютъ общую касательную, то $l-1$ вѣтвей присоединенной кривой будутъ къ ней касаться; кромѣ того, если для g изъ этихъ вѣтвей y'' имѣетъ одинаковое значеніе, то для присоединенной кривой $g-1$ будутъ имѣть равныя значенія, и потому уравненіе

$$\mathfrak{F}(x\,,y\,,y'\,,y'')=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

опредѣляющее y'' для присоединенной кривой будетъ имѣть корнями всѣ корни уравненія

$$\mathbf{F}(x, y, y', y'') = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

опредѣляющаго y'' для фундаментальной кривой, кратности пониженной на единицу, какъ въ уравненіи:

$$G(x, y, y', y'') = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ

$$G(x, y, y', y'') = D\left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y''}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

при условіи $H(x, y, y') = 0$; а потому первая часть (1) должна дѣлиться безъ остатка на $G(x, y, y', y'')$, откуда подобно предыдущему получимъ рядъ новыхъ уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ $f(x, y) = 0$. Дѣйствительно, коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y'' остатка отъ этого дѣленія, всѣ вида

$$H(x, y, y'),$$

должны дѣлиться безъ остатка на первую часть уравненія, опредѣляющаго разсматриваемыя значенія y'; слѣдовательно должны быть равны нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y' въ остаткѣ дѣленія. которые вида

$$K(x, y);$$

слѣдовательно они должны дѣлиться безъ остатка на первую часть уравненія того же вида той пары, которая опредѣляетъ координаты особенной точки разсматриваемой категоріи; а потому коэффиціенты при степеняхъ y въ остаткѣ этого дѣленія должны обращаться въ нуль для всѣхъ значеній x, равныхъ корнямъ перваго уравненія пары, опредѣляющаго абсциссы, слѣдовательно должны дѣлиться безъ остатка на первую часть этого уравненія; приравнивая на этомъ основаніи коэффиціенты остатка отъ этого дѣленія нулю, получимъ опять линейныя уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ $f(x, y)$. Такъ можно идти и далѣе. Итакъ для опредѣленія коэффиціентовъ $f(x, y)$ мы будемъ имѣть рядъ линейныхъ уравненій.

11. Присоединенныя кривыя будутъ пересѣкать данную кривую (фундаментальную) еще въ другихъ точкахъ, изъ которыхъ только часть можетъ быть задана произвольно; нѣкоторое же опредѣленное число, постоянное для всѣхъ присоединенныхъ кривыхъ, независящее отъ ихъ степени, зависящее только отъ вида фундаментальной кривой, будетъ по нимъ опредѣляться. Поэтому это число Клебшъ и назвалъ *родомъ* кривой (Geschlecht, Rang Weierstrass'a, Defect Cayly, Genre Жордана). Для кривыхъ n-го порядка, имѣющихъ только кратныя точки съ различны-

ми касательными въ нихъ, это число, по Риману означаемое чрезъ p, опредѣляется формулою:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{k=1}^{k=m} \alpha_k \frac{k.(k-1)}{1.2},$$

гдѣ α_k число k-кратныхъ точекъ. Это же число равно $\mu_k . \nu_k$, если μ_k есть степень относительно x уравненія $\chi_{k-2}(x) = 0$, а ν_k степень относительно y уравненія $\psi_{k-2}(x, y) = 0$, опредѣляющихъ координаты k-кратныхъ точекъ. Итакъ для разсматриваемаго случая p находится при помощи раціональныхъ дѣйствій. Для кривыхъ съ двойными точками и точками возврата Клебшъ даетъ формулу:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - d - r,$$

гдѣ d число двойныхъ, а r число точекъ возврата, т. е. двойныхъ съ совпадающими касательными; числа эти точно также найдутся какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т. е. помножая степень уравненія $\chi(x) = 0$ относительно x на степень уравненія $\psi(x, y) = 0$ относительно y, если эта пара даетъ двойныя точки съ различными касательными, и тоже дѣлая для другой пары уравненій, опредѣляющихъ двойныя точки съ совпадающими касательными. Формулы для p въ общемъ случаѣ мы нигдѣ не встрѣчали.

Опечатки въ статьѣ М. А. Тихомандрицкаго: „Розысканіе особенныхъ точекъ плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ“.

Стр. 115 строка 22, вмѣсто

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k} + \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-1} \partial y} y' + \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-2} \partial x^2} y'^2 + \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-3} \partial y^3} y'^3 + \ldots + \frac{\partial^k F}{\partial y^k} y'^k = 0$$

должно быть

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k} + C_1^k \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-1} \partial y} y' + C_2^k \frac{\partial^k F}{\partial y^{k-2} \partial y^2} y'^2 + C_3^k \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-3} \partial y^3} y'^3 + \ldots + \frac{\partial^k F}{\partial y^k} y'^k = 0$$

Стр. 119 строка 26, вмѣсто

$$\psi_{k-1}(x, y) = 0$$

должно быть

$$\psi_{k-2}(x, y) = 0$$

Стр. 126 строка 1, вмѣсто

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}} + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-2} \partial y} y' + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-3} \partial y^2} y'^2 + \ldots + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^{k-1}} y'^{k-1} = 0$$

должно быть

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}} + C_1^{k-1} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-2} \partial y} y' + C_2^{k-1} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-3} \partial y^2} y'^2 + \ldots + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^{k-1}} y'^{k-1} = 0$$

О числахъ Бернулли.

Г. Ѳ. Вороного.

Замѣтка эта, почти исключительно, посвящена изслѣдованію нѣкоторыхъ свойствъ чиселъ Бернулли, на которыя въ первый разъ указалъ проф. I. C. Adams въ Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 85, въ статьѣ: „Table of the values of the firs sixty two numbers of Bernoulli". Онъ говоритъ:

„Я доказалъ, что, если n простое число большее 3, то числитель n-го „Бернулліева числа будетъ дѣлиться на n.

„Я также замѣтилъ, что если p такой простой дѣлитель n, который „не входитъ множителемъ въ знаменатель n-го числа Бернулли, то „числитель этого числа дѣлится на p" *).

Я доказываю относительно чиселъ Бернулли слѣдующую теорему:

Если m-е Бернулліево число $B_m = \frac{P_m}{\Theta_m}$, гдѣ $\frac{P_m}{\Theta_m}$ дробь не сократимая, то:

$$(-1)^{m-1}(a^{2m}-1)P_m \equiv 2ma^{2m-1}\Theta_m\left[1^{2m-1}E\frac{a}{N}+2^{2m-1}E\frac{2a}{N}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+(N-1)^{2m-1}E\frac{(N-1)a}{N}\right], \text{ (mod. } N).$$

*) По поводу послѣдняго замѣчанія, онъ прибавляетъ: „I have not succeeded however, in obtaining a general proof of this proposition, though, I have no doubt of its truth". Въ этой же статьѣ профессоръ Adams обѣщаетъ напечатать замѣтку о числахъ Бернулли въ appendix при 22-мъ томѣ Cambridge Observations. Ни въ Пулковской обсерваторіи, ни въ Академіи Наукъ этотъ томъ Cambridge Observations не былъ полученъ.

Здѣсь a и N произвольныя положительныя цѣлыя числа простыя между собой; символъ $E\frac{ai}{N}$ обозначаетъ цѣлую часть дроби $\frac{ai}{N}$.

Изъ этой теоремы я вывожу нѣсколько слѣдствій и между прочимъ слѣдующую обобщенную теорему Adams'a:

Если число m, значекъ m-го Бернулліева числа, имѣетъ дѣлителемъ число $k=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}\cdots p_l^{\lambda}$, гдѣ $p_1, p_2, \cdots, p_l$ простыя числа, не дѣлящія знаменатель m-го Бернулліева числа, то числитель его будетъ дѣлиться на k.

При доказательствѣ этихъ предложеній, я пользуюсь теоремой Штаудта относительно знаменателей Бернулліевыхъ чиселъ, но доказательство ея я значительно измѣнилъ.

---

§ 1. По формулѣ Лагранжа, для всякой цѣлой функціи $f(z)$, степени не выше n-й, имѣетъ мѣсто равенство:

$$f(z)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f(x+i)}{z-x-i}\cdot\frac{F(z)}{F'(x+i)}, \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

гдѣ

$$F(z)=(z-x)(z-x-1)\ldots(z-x-n).$$

Дифференцируемъ равенство (1) по z

$$f'(z)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f(x+i)}{z-x-i}\cdot\frac{F'(z)}{F'(x+i)}-\sum_{i=0}^{i=n}\frac{f(x+i)}{(z-x-i)^2}\cdot\frac{F(z)}{F'(x+i)}.$$

Въ этой формулѣ положимъ $z=x$.

Такъ какъ $F(x)=0$, то получимъ:

$$f'(x)=\operatorname{Lim}\left[\frac{f(x)}{z-x}\cdot\frac{F'(z)}{F'(x)}-\frac{f(x)}{(z-x)^2}\cdot\frac{F(z)}{F'(x)}\right]_{z=x}-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x+i)}{i}\cdot\frac{F'(x)}{F'(x+i)}.$$

Легко видѣть, что

$$\frac{F'(x)}{F'(x+i)}=(-1)^i\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots i.1.2\ldots(n-i)}=(-1)^i\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i},$$

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{F'(z)}{(z-x)F'(x)}-\frac{F(z)}{(z-x)^2F'(x)}\right]_{z=x}=-\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right].$$

Поэтому:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) = -\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i}\,f(x) + \frac{n}{1.1}\,f(x+1) - \frac{n(n-1)}{2.1.2}\,f(x+2) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{i-1}\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i.1.2\ldots i}\,f(x+i) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\ldots 1}{n.1.2\ldots n}\,f(x+n). \end{aligned}\right\} (2)$$

§ 2. Примѣнимъ формулу (2) къ функціямъ Бернулли.

Сумма ряда

$$1^k + 2^k + \ldots + x^k = S_k(x)$$

выражается цѣлой функціей отъ x степени $k+1$. Эта функція называется функціей Бернулли: $\varphi_{k+1}(x)$.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}x^k + \frac{k}{1.2}B_1x^{k-1} - \\ -\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3.4}B_2x^{k-3} + \ldots + (-1)^{\frac{k}{2}-1}B_{\frac{k}{2}}x \end{aligned}\right\}, \quad \ldots (3)$$

при k четномъ, и

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}x^k + \frac{k}{1.2}B_1x^{k-1} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3.4}B_2x^{k-3} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{\frac{k-1}{2}-1}B_{\frac{k-1}{2}}kx^2, \end{aligned}\right\} (4)$$

при k нечетномъ.

Числа $B_1, B_2\ldots$ называются числами Бернулли.

По формулѣ (2), при $x=0$,

$$\varphi'_{2k+1}(0) = -\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i}\,\varphi_{2k+1}(0) + \frac{n}{1.1}\,\varphi_{2k+1}(1) - \frac{n(n-1)}{2.1.2}\,\varphi_{2k+1}(2) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,\varphi_{2k+1}(n).$$

Изъ формулы (3) слѣдуетъ, что

*

$$\varphi'_{2k+1}(0)=(-1)^{k-1}B_k\,,$$

$$\varphi_{2k+1}(0)=0\,,$$

$$\varphi_{2k+1}(i)=S_{2k}(i)=1^{2k}+2^{2k}+\ldots+i^{2k}.$$

Поэтому:

$$(-1)^{k-1}B_k=\frac{n}{1.1}S_{2k}(1)-\frac{n(n-1)}{2.1.2}S_{2k}(2)+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}S_{2k}(n). \quad (5)$$

Въ этой формулѣ n должно быть больше $2k$.

Примѣръ.

$$k=3\,,\quad n=7.$$

$$(-1)^2B_3=7-\frac{7.6}{2.1.2}\cdot65+\frac{7.6.5}{3.1.2.3}\cdot794+\frac{7.6.5.4}{4.1.2.3.4}\cdot4890+$$

$$+\frac{7.6.5.4.3}{5.1.2.3.4.5}\cdot20515-\frac{7.6.5.4.3.2}{6.1.2.3.4.5.6}\cdot67171+\frac{1}{7}\cdot184820.$$

$$B_3=7-682-\frac{1}{2}+9263+\frac{1}{3}-42787-\frac{1}{2}+$$

$$+86163-78366-\frac{1}{6}+26402+\frac{6}{7}=\frac{1}{42}.$$

§ 3. Теперь докажемъ нѣсколько леммъ *).

Лемма I.

$$S_n(ab)\equiv bS_n(a)+naS_{n-1}(a)S_1(b-1)\,,\ (\mathrm{mod.}\ a^2).$$

Доказательство.

Если равенство

$$(f+ga)^n=f^n+\frac{n}{1}f^{n-1}ga+\cdots$$

разсматривать, какъ сравненіе по модулю a^2, то получимъ:

$$(f+ga)^n\equiv f^n+nf^{n-1}ga\,,\ (\mathrm{mod}\ a^2).$$

Давая f значенія $1, 2, 3,\ldots a$, для g значенія $0, 1, 2,\ldots b-1$ и складывая полученныя сравненія, найдемъ:

$$S_n(ab)\equiv bS_n(a)+naS_{n-1}(a)S_1(b-1)\,,\ (\mathrm{mod.}\ a^2).$$

*) Доказательство первыхъ VIII леммъ заимствуемъ у Staudt'a Crelle's Journal, B. 21.

Лемма II.

Если a, b, $c \ldots k$, l числа первыя между собой, то

$$\frac{S_n(a.b.c\ldots k.l)}{a.b.c\ldots k.l} - \frac{S_n(a)}{a} - \frac{S_n(b)}{b} - \ldots - \frac{S_n(l)}{l} = \text{цѣлое число}.$$

Доказательство.

По предыдущей леммѣ:

$$S_n(a.b.c\ldots k.l) \equiv b.c\ldots k.l.S_n(a), \ (\text{mod. } a),$$

$$S_n(a.b.c\ldots k.l) \equiv a.c\ldots k.l.S_n(b), \ (\text{mod. } b),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n(a.b.c\ldots\ l) \equiv a.b.c\ldots l.S_n(k), \ (\text{mod. } k),$$

$$S_n(a.b.c\ldots\ k) \equiv a.b.c\ldots k.S_n(l), \ (\text{mod. } l).$$

Поэтому, разность

$$S_n(a.b.c\ldots k.l) - b.c\ldots k.l.S_n(a) - a.c\ldots k.l.S_n(b) -$$
$$- a.b.c\ldots l.S_n(k) - a.b.c\ldots k.S_n(l)$$

дѣлится на a, b, $c, \ldots k$, l и, слѣдовательно, на ихъ произведеніе, такъ какъ числа a, $b \ldots k$, l первыя между собой.

Лемма III.

$$2S_{2n+1}(a) \equiv (2n+1)aS_{2n}(a), \ (\text{mod. } a^2).$$

Доказательство.

Равенство

$$v^{2n+1} + (a-v)^{2n+1} = a^{2n+1} - \frac{2n+1}{1}a^{2n}v + \ldots + (2n+1)av^{2n}$$

разсматриваемъ, какъ сравненіе по модулю a^2. Получимъ:

$$v^{2n+1} + (a-v)^{2n+1} \equiv (2n+1)av^{2n}, \ (\text{mod. } a^2).$$

Давая v значенія 0, 1, $2 \ldots a$ и складывая рядъ полученныхъ такимъ образомъ сравненій, найдемъ:

$$2S_{2n+1}(a) \equiv (2n+1)aS_{2n}(a), \ (\text{mod. } a^2).$$

Лемма IV.

$$S_{2n}(ab) \equiv bS_{2n}(a), \ (\text{mod. } a^2).$$

Доказательство.

На основаніи леммы I-й

$$S_{2n}(ab) \equiv bS_{2n}(a) + 2naS_{2n-1}(a)S_1(b-1)\,,\ (\mathrm{mod}\ a^2).$$

Но

$$2S_{2n-1}(a) \equiv (2n-1)aS_{2n-2}(a),\ (\mathrm{mod.}\ a^2)$$

и потому

$$S_{2n}(ab) \equiv bS_{2n}(a) + n(2n-1)a^2S_{2n-2}(a)S_1(b-1)\,,\ (\mathrm{mod.}\ a^2)$$

или

$$S_{2n}(ab) \equiv bS_{2n}(a),\ (\mathrm{mod.}\ a^2).$$

Лемма V.

Если a, r, n цѣлыя положительныя числа, то

$$\frac{S_{2n}(a^r)}{a^r} - \frac{S_{2n}(a)}{a} = \text{цѣлое число}.$$

Доказательство.

Для $r=1$ лемма справедлива; если же она справедлива для $r=\varrho$, то справедлива и для $r=\varrho+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, по леммѣ IV-й.

$$S_{2n}(a^{\rho+1}) \equiv aS_{2n}(a^\rho),\ (\mathrm{mod.}\ a^{2\rho}).$$

Поэтому:

$$\frac{S_{2n}(a^{\rho+1})}{a^{\rho+1}} - \frac{S_{2n}(a^\rho)}{a^\rho} = \text{цѣлое число}.$$

Слѣдствіе.

Если $a, b, c \ldots l$ числа простыя между собой и $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа, то

$$\frac{S_{2n}(a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda)}{a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda} - \frac{S_{2n}(a)}{a} - \frac{S_{2n}(b)}{b} - \ldots - \frac{S_{2n}(l)}{l} = \text{цѣлое число}.$$

Лемма VI.

Если n дѣлится на $p-1$ при p простомъ, то

$$S_n(p) \equiv -1\,,\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Доказательство.

По теоремѣ Фермата, если n дѣлится на $p-1$, то

$$x^n \equiv 1\,,\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Давая x значенія $1, 2, \ldots p-1$ и складывая полученныя сравненія, найдемъ:

$$S_n(p-1) \equiv p-1\,,\ (\text{mod. } p)$$

или

$$S_n(p) \equiv -1\,,\ (\text{mod. } p).$$

Поэтому:

$$\frac{S_n(p)}{p} + \frac{1}{p} = \text{цѣлое число}.$$

Лемма VII.

Если p простое число и n не дѣлится на $p-1$, то имѣетъ мѣсто сравненіе:

$$S_n(p) \equiv 0\,,\ (\text{mod. } p).$$

Доказательство.

При всякомъ x, не дѣлящемся на p:

$$x \equiv r_1\,,\ (\text{mod. } p)\,,$$

$$2x \equiv r_2\,,\ (\text{mod. } p)\,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(p-1)x \equiv r_{p-1}\,,\ (\text{mod. } p).$$

Числа $r_1, r_2, \ldots r_{p-1}$ положительные наименьшіе вычеты по модулю p и потому представляютъ рядъ чиселъ $1, 2 \ldots p-1$, только иначе расположенныхъ.

Возвышая предыдущія сравненія въ степень n и складывая, найдемъ:

$$x^n S_n(p) \equiv S_n(p)\,,\ (\text{mod. } p).$$

Если x первообразный корень простого числа p, и n не дѣлится на $p-1$, то не можетъ имѣть мѣста сравненіе

$$x^n \equiv 1\,,\ (\text{mod. } p)\,,$$

и потому, необходимо:

$$S_n(p) \equiv 0\,,\ (\text{mod. } p).$$

Лемма VIII.

$$\frac{S_{2n}(u)}{u} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{h} = \text{цѣлое число},$$

гдѣ $a, b \ldots h$ простые дѣлители u, такіе, что $2n$ дѣлится на $a-1$, $b-1, \ldots h-1$.

Эта лемма очевидна на основаніи леммъ V-й VI-й и VII-й.

Лемма IX.

При p простомъ имѣетъ мѣсто сравненіе:

$$\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}-\frac{m(m-1)\dots(m-2p+1)}{1.2\dots(2p)}+\dots$$
$$\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-kp+1)}{1.2\dots(kp)}\equiv 1\,,\ (\mathrm{mod.}\,p)\,,$$

k есть цѣлая часть дроби $\frac{m}{p}$, т. е. $k=E\frac{m}{p}$.

Доказательство.

По формулѣ (2) § 1

$$f'(x)=-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i}f(x)+\frac{n}{1.1}f(x+1)-\frac{n(n-1)}{2.1.2}f(x+2)+\dots$$
$$\dots\pm\frac{1}{n}f(x+n).$$

Функція $f(x)$ степени не выше n-й.

Пусть

$$f(x)=x(1-x^{p-1}),$$
$$f(0)=0\,,$$
$$f'(0)=1.$$

Поэтому:

$$1=n(1-1^{p-1})-\frac{n(n-1)}{1.2}(1-2^{p-1})+\dots\pm\frac{n(n-1)\dots1}{1.2\dots n}(1-n^{p-1}).$$

Здѣсь n больше или равно p.

Разсматривая это равенство, какъ сравненіе по модулю p, найдемъ:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}-\frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{1.2\dots2p}+\dots$$
$$\dots\pm\frac{n(n-1)\dots(n-kp+1)}{1.2\dots kp}\equiv 1\,,\ (\mathrm{mod.}\,p)\,,$$

$$k=E\frac{n}{p}.$$

§ 4. Теорема Штаудта.

$$(-1)^k B_k = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\lambda} + T,$$

α, β, $\ldots\lambda$ простыя числа такія, что $2k$ дѣлится на $\alpha - 1$, $\beta - 1, \ldots \lambda - 1$. T есть цѣлое число.

Доказательство.

Мы вывели для B_k въ § 2 слѣдующую формулу:

$$(-1)^{k-1} B_k = \frac{n}{1}\,\frac{S_{2k}(1)}{1} - \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{S_{2k}(2)}{2} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{S_{2k}(n)}{n},$$

n больше $2k$.

По леммѣ VIII-й.

$$\frac{S_{2k}(u)}{u} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \ldots - \frac{1}{\mu} + t,$$

t число цѣлое, а α, β, $\ldots\mu$ простые дѣлители u, такіе, что $2k$ дѣлится на $\alpha - 1$, $\beta - 1, \ldots \mu - 1$.

Поэтому, въ выраженіи B_k дробь $+\frac{1}{\alpha}$ будетъ имѣть множителемъ слѣдующее выраженіе:

$$-\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha} - \frac{n(n-1)\ldots(n-2\alpha+1)}{1.2\ldots(2\alpha)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-k\alpha+1)}{1.2\ldots(k\alpha)}\right],$$

$$k = E\frac{n}{\alpha}.$$

На основаніи леммы IX-й, это выраженіе равно $-1 + \alpha\Theta_\alpha$, гдѣ Θ_α цѣлое число.

Выше сказанное относится ко всѣмъ простымъ числамъ α, $\beta\ldots\lambda$ такимъ, что $2k$ дѣлится на $\alpha - 1$, $\beta - 1, \ldots \lambda - 1$ и потому:

$$(-1)^{k-1} B_k = -\frac{1}{\alpha} + \Theta_\alpha - \frac{1}{\beta} + \Theta_\beta - \ldots - \frac{1}{\lambda} + \Theta_\lambda + \Theta$$

или

$$(-1)^k B_k = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\lambda} + T.$$

T есть цѣлое число.

Числа α, $\beta \ldots \lambda$ опредѣляются такимъ образомъ:

Выписываются всѣ дѣлители числа k, затѣмъ всѣ они удваиваются и къ полученнымъ числамъ прибавляютъ по единицѣ; всѣ образованные такимъ образомъ простыя числа будутъ искомыя α, $\beta, \ldots \lambda$. Къ нимъ прибавляется еще 2.

Примѣръ 1-й. $k=3$.

Дѣлители: 1, 3.

Числа 3, 7 простыя и потому:

$$B_3 = T - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}.$$

Но мы уже получили раньше, что

$$B_3 = \frac{1}{42}$$

и потому $T=1$.

Примѣръ 2-й. $k=12$.

Дѣлители 12-ти: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Въ ряду чиселъ 3, 5, 7, 9, 13, 25 числа 9 и 25 не простыя и потому:

$$B_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + T.$$

Замѣчаніе.

Знаменатель всякаго Бернулліева числа, на основаніи теоремы Штаудта, равенъ произведенію нѣкоторыхъ простыхъ чиселъ, взятыхъ множителями только по одному разу.

§ 5. Теорема.

При всякомъ N цѣломъ и положительномъ, имѣетъ мѣсто сравненіе:

$$(-1)^{k-1} P_k N \equiv \Theta_k S_{2k}(N), \ (\mathrm{mod.}\ N^2),$$

$B_k = \dfrac{P_k}{\Theta_k}$, гдѣ $\dfrac{P_k}{\Theta_k}$ дробь не сократимая.

Доказательство.

Мы имѣли (§ 2), что

$$\left.\begin{aligned} S_{2k}(N) = \frac{N^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1}{2} N^{2k} + \frac{2k}{1.2} B_1 N^{2k-1} - \frac{2k.(2k-1).(2k-2)}{1.2.3.4} B_2 N^{2k-3} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-2} \frac{2k.(2k-1)\ldots 4}{1.2\ldots(2k-2)} B_{k-1} N^3 + (-1)^{k-1} B_k N. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Положимъ, что $2k+1$ и N имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя d и пусть

$$2k+1=a\cdot d\,,$$

$$N=b\cdot d\,,$$

a и N числа взаимно простыя.

Умножимъ обѣ части равенства (A) на $a\cdot\Theta$, гдѣ Θ есть наименьшее кратное всѣхъ k знаменателей Бернулліевыхъ чиселъ $B_1\,,B_2\,,\ldots B_k$.

Получимъ:

$$a\Theta S_{2k}(N)=\Theta N^{2k}b+\frac{\Theta}{2}N^{2k}a+$$

$$+\frac{(2k+1)2k}{1.2}N^{2k-2}bB_1\Theta-\frac{(2k+1)\ldots(2k-2)}{1.2.3.4}N^{2k-4}bB_2\Theta+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k-2}\frac{2k.(2k-1)}{1.2.3}aN^3B_{k-1}\Theta+(-1)^{k-1}B_k\Theta Na.$$

Въ правой части этого равенства все числа цѣлыя и потому, разсматривая его, какъ сравненіе по модулю N^3, найдемъ:

$$a.\Theta.S_{2k}(N)\equiv(-1)^{k-2}\frac{2k.(2k-1)}{1.2.3}aN^3B_{k-1}\Theta+(-1)^{k-1}B_k.\Theta.a.N,(\mathrm{mod.}\,N^3).$$

Умножаемъ обѣ части сравненія на 2.3, тогда будемъ имѣть:

$$2.3.a\Theta S_{2k}(N)\equiv(-1)^{k-1}2.3.a.N\Theta B_k\,,\ (\mathrm{mod.}\,N^3).$$

Такъ какъ a число простое съ N, то обѣ части сравненія сокращаемъ на a;

$$2.3.\Theta.S_{2k}(N)\equiv(-1)^{k-1}2.3.N\Theta B_k\,,\ (\mathrm{mod.}\,N^3).$$

Пусть

$$\Theta=\Theta'.\Theta_k.$$

Замѣтимъ, что по теоремѣ Штаудта Θ_k всегда дѣлится на 2.3, а потому, Θ' не дѣлится на 2.3, такъ какъ Θ есть наименьшее кратное k знаменателей $\Theta_1,\Theta_2\ldots\Theta_k$.

Такимъ образомъ:

$$2.3.\Theta'.\Theta_k.S_{2k}(N)\equiv(-1)^{k-1}2.3.\Theta'.N.P_k\,,\ (\mathrm{mod.}\,N^3).$$

Число $2.3.\Theta'$ есть произведеніе нѣкоторыхъ простыхъ чиселъ, входящихъ въ него множителями не болѣе разу, и потому, хотя между ними и найдутся дѣлители числа N, но во всякомъ случаѣ:

$$(-1)^{k-1} N.P_k \equiv \Theta_k . S_{2k}(N), \text{ (mod. } N^2).$$

При доказательствѣ теоремы мы предполагали, что k болѣе единицы, но легко видѣть, что теорема справедлива и для $k=1$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$S_2(N) = \frac{N^3}{3} + \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{6} N.$$

Умножаемъ обѣ части равенства на 6 и разсматриваемъ, какъ сравненіе по модулю N^2; найдемъ:

$$6.S_2(N) \equiv N, \text{ (mod. } N^2).$$

Но $P_1 = 1$, $\Theta_1 = 6$, $k = 1$ и предыдущее сравненіе можно такъ переписать:

$$(-1)^{1-1} N.P_1 \equiv \Theta_1 . S_2 . (N), \text{ (mod. } N^2).$$

§ 6. Лемма X.

Если a и N цѣлыя положительныя числа взаимно простыя, то имѣетъ мѣсто, при $m > 1$, сравненіе:

$$(a^m - 1) S_m(N) \equiv m a^{m-1} N \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{m-1} E \frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N^2),$$

$E\frac{ai}{N}$ есть цѣлая часть дроби $\frac{ai}{N}$.

Доказательство.

Возьмемъ рядъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= N.E\frac{a}{N} + r_1, \\ 2a &= N.E\frac{2a}{N} + r_2, \\ &\dots\dots\dots \\ (N-1)a &= N.E\frac{(N-1)a}{N} + r_{N-1}. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (B)$$

Числа r_1, $r_2 \ldots r_{N-1}$ всѣ меньше N и всѣ между собой различны, а потому, r_1, $r_2 \ldots r_{N-1}$ представляютъ рядъ чиселъ: $1, 2, \ldots (N-1)$, только иначе расположенныхъ.

Равенства (B) перепишемъ иначе:

$$a - NE\frac{a}{N} = r_1,$$

$$2a - NE\frac{2a}{N} = r_2,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(N-1)a - NE\frac{(N-1)a}{N} = r_{N-1},$$

и возвысимъ обѣ части всѣхъ этихъ равенствъ въ степень m.

$$a^m - mNa^{m-1}E\frac{a}{N} + \ldots = r_1^m,$$

$$2^m a^m - mNa^{m-1}2^{m-1}E\frac{2a}{N} + \ldots = r_2^m,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(N-1)^m a^m - mNa^{m-1}(N-1)^{m-1}E\frac{(N-1)a}{N} + \ldots = r_{N-1}^m.$$

Равенства эти разсматриваемъ, какъ сравненія по модулю N^2:

$$a^m - mNa^{m-1}E\frac{a}{N} \equiv r_1^m, \ (\text{mod. } N^2),$$

$$2^m a^m - mNa^{m-1}2^{m-1}E\frac{2a}{N} \equiv r_2^m, \ (\text{mod. } N^2),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(N-1)^m a^m - mNa^{m-1}(N-1)^{m-1}E\frac{(N-1)a}{N} \equiv r_{N-1}^m, \ (\text{mod. } N^2).$$

Складывая всѣ эти сравненія почленно, найдемъ:

$$a^m . S_m(N-1) - ma^{m-1}N\sum_{i=1}^{i=N-1} i^{m-1}E\frac{ai}{N} \equiv S_m(N-1), \ (\text{mod. } N^2),$$

или

$$(a^m - 1)S_m(N-1) \equiv ma^{m-1} N \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N^2).$$

Если $m > 1$, то будетъ имѣть мѣсто также сравненіе:

$$(a^m - 1)S_m(N) \equiv ma^{m-1} N \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N^2).$$

§ 7. Теорема.

При произвольныхъ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ a и N:

$$(-1)^{m-1} P_m(a^{2m} - 1) \equiv 2ma^{2m-1} \Theta_m \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N),$$

гдѣ $B_m = \dfrac{P_m}{\Theta_m}$ дробь не сократимая.

Доказательство.

По теоремѣ § 5:

$$(-1)^{m-1} P_m N \equiv \Theta_m S_{2m}(N), \text{ (mod.} N^2).$$

По леммѣ X-й:

$$(a^{2m} - 1)S_{2m}(N) \equiv 2ma^{2m-1} N \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N^2).$$

Умножаемъ обѣ части перваго сравненія на $(a^{2m} - 1)$, второго на Θ_m и вычитаемъ полученныя сравненія почленно. Найдемъ:

$$(-1)^{m-1} P_m(a^{2m} - 1)N \equiv 2ma^{2m-1} N \Theta_m \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N^2).$$

Или, сокращая на N, окончательно:

$$(-1)^{m-1} P_m(a^{2m} - 1) \equiv 2ma^{2m-1} \Theta_m \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N).$$

Слѣдствіе I.

Пусть въ предыдущемъ сравненіи $N = m$. Тогда необходимо, чтобы

$$P_m(a^{2m} - 1) \equiv 0\,, \text{ (mod. } m), \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

a есть произвольное цѣлое положительное число простое съ m.

Пусть $k=p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_l^\lambda$ какой-нибудь дѣлитель числа m и пусть $p_1, p_2, \ldots p_l$ такія простыя числа, что $2m$ не дѣлится на p_1-1, $p_2-1, \ldots p_l-1$.

Пусть a_1 первообразный корень простого числа p_1. Въ такомъ случаѣ, не можетъ имѣть мѣста сравненіе

$$a_1^{2m}-1\equiv 0, \ (\text{mod.}\, p_1).$$

Поэтому, на основаніи сравненія (*):

$$P_m\equiv 0, \ (\text{mod.}\, p_1^\alpha).$$

Если возьмемъ другое простое число p_2, то выберемъ другой первообразный корень a_2 и точно также докажемъ, что

$$P_m\equiv 0, \ (\text{mod.}\, p_2^\beta)$$

и т. д. Наконецъ

$$P_m\equiv 0, \ (\text{mod.}\, p_l^\lambda).$$

Изъ этихъ сравненій слѣдуетъ, что P_m дѣлится на $p_1^\alpha p_2^\beta \cdots p_l^\lambda$ т. е. на k.

Примѣръ. $m=25$.

Пусть $k=5^2$, $2m=50$.

50 не дѣлится на $5-1$ и потому P_{25} должно дѣлиться на 25.

Дѣйствительно, изъ таблицъ Бернулліевыхъ чиселъ проф. Adams'a: $P_{25}=4950572052410796482124775 25$, число дѣлящееся на 25.

Замѣчаніе.

Тѣ условія, которымъ должны удовлетворять числа $p_1, p_2, \ldots p_l$, простые дѣлители m, прямо указываютъ, на основаніи теоремы Штаудта (§ 4), что они не должны дѣлить знаменателя m-го Бернулліева числа.

Слѣдствіе II.

Пусть $n=m+k\ \dfrac{\varphi(N)}{2}$.

Символъ $\varphi(N)$ обозначаетъ, сколько въ ряду чиселъ $1, 2, 3\ldots N-1$ простыхъ съ N.

Если $N=p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_l^\lambda$, то $\varphi(N)=p_1^\alpha p_2^\beta \cdots p_l^\lambda \dfrac{p_1-1}{p_1}\cdot\dfrac{p_2-1}{p_2}\cdots\dfrac{p_l-1}{p_l}$.

Примѣняя теорему § 7, найдемъ:

$$(-1)^{n-1}(a^{2n}-1)P_n \equiv 2na^{2n-1}\Theta_n \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2n-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N).$$

По теоремѣ Эйлера, при a простомъ съ N, имѣетъ мѣсто сравненіе

$$a^{2n-1} \equiv a^{2m-1}, \text{ (mod. } N).$$

Замѣтимъ, что это же сравненіе будетъ имѣть мѣсто и при a не простомъ съ N, при слѣдующемъ условіи:

Наибольшій изъ показателей степеней $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ въ $N = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_l^{\lambda}$ не долженъ быть больше $2m-1$.

Предполагая, что это условіе выполнено, будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2n-1} E\frac{ai}{N} \equiv \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N).$$

Поэтому, умножая обѣ части сравненія:

$$(-1)^{m-1}P_m(a^{2m}-1) \equiv 2ma^{2m-1}\Theta_m \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2m-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N),$$

на $n\dfrac{\Theta_n}{2.3}$, а сравненія

$$(-1)^{n-1}P_n(a^{2n}-1) \equiv 2na^{2n-1}\Theta_n \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2n-1} E\frac{ai}{N}, \text{ (mod. } N)$$

на $m\dfrac{\Theta_m}{2.3}$, и вычитая ихъ почленно, найдемъ:

$$(-1)^{n-1} m\frac{\Theta_m}{2.3} P_n(a^{2n}-1) \equiv (-1)^{m-1} n\frac{\Theta_n}{2.3} P_m(a^{2m}-1), \text{ (mod. } N).$$

Замѣтимъ, что

$$a^{2m}-1 \equiv a^{2n}-1, \text{ (mod. } N).$$

Если $p_1, p_2, \ldots p_l$, простые дѣлители N, таковы, что $2m$ не дѣлится на $p_1-1, p_2-1, \ldots p_l-1$, то легко убѣдиться указаннымъ уже выше способомъ, что

$$(-1)^{n-1}\frac{m.\Theta_m.P_n}{2.3} \equiv (-1)^{m-1}\frac{n.\Theta_n.P_m}{2.3}, \text{ (mod. } N); \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

$$n = m + \frac{k\varphi(N)}{2}; \; N = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_l^{\lambda};$$

$$\varphi(N) = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_l^{\lambda} . \frac{p_1 - 1}{p_1} . \frac{p_2 - 1}{p_2} \ldots \frac{p_l - 1}{p_l}$$

k есть произвольное цѣлое положительное число; $2m-1$ должно быть больше или равно наивысшему изъ показателей степеней $\alpha, \beta, \ldots \lambda$.

Послѣднее предложеніе представляетъ тотъ интересъ, что изслѣдованіе очень большихъ Бернулліевыхъ чиселъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, сводитъ къ рѣшенію довольно простыхъ сравненій.

Примѣръ.

Какія двѣ послѣднія цыфры въ числителѣ 43-го Бернулліева числа?

Рѣшеніе.

Пусть $N = 200 = 2^3.5^2$; $\varphi(N) = 2^2.5.4.1 = 80$; $m = 3$;

$$n = 3 + \frac{k.80}{2} = 3 + k.40;$$

$$n = 43, \text{ при } k = 1.$$

Въ данномъ случаѣ $\alpha = 3$, $\beta = 2$ и $2m - 1 > 3$.
Поэтому:

$$(-1)^{42}3.\frac{\Theta_3}{2.3}.P_{43}(a^{86}-1) \equiv (-1)^2 43.\frac{\Theta_{43}}{2.3}.P_3(a^6-1), \text{ (mod. } 200).$$

Въ § 4 мы уже опредѣлили: $P_3 = 1$, $\Theta_3 = 42$. Найдемъ Θ_{43}.
Дѣлители 43 суть 1 и 43.
Число $2.43 + 1 = 87$ не простое и потому, $\Theta_{43} = 2.3$.
Итакъ:

$$3.\frac{42}{2.3}.P_{43}(a^{86}-1) \equiv 43.\frac{6}{2.3}.(a^6-1), \text{ (mod. } 200).$$

Число a простое съ 200 и потому должно быть нечетнымъ.
$a^6 - 1$ и $a^{86} - 1$ дѣлятся на 4, но не дѣлятся на 5, и такъ какъ

$$a^6 - 1 \equiv a^{86} - 1, \text{ (mod. } 200),$$

то, сокращая обѣ части предыдущаго сравненія на $a^6 - 1$, получимъ:

$$3.7.P_{43} \equiv 43\,,\ (\mathrm{mod.}\ 50)$$

или

$$21.P_{43} \equiv -7\,,\ (\mathrm{mod.}\ 50)\,,$$

$$3.P_{43} \equiv -1\,,\ (\mathrm{mod.}\ 50)\,,$$

$$P_{43} \equiv 33\,,\ (\mathrm{mod.}\ 50).$$

По этому двѣ послѣднія цыфры P_{43} должны быть либо 33, либо 83. Дѣйствительно, изъ таблицъ профессора Adams'а:

$$P_{43} = \{660\ 71461\ 94176\ 78653\ 57384\ 78474\ 26261\ 49627\ 78306$$
$$86653\ 38893\ 17619\ 96983\}.$$

Число P_{43} имѣетъ двѣ послѣднія цыфры: 83.

Слѣдствіе III.

Изъ сравненія (**) слѣдуетъ, что, при

$$N = P_m = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_l^{\lambda}\,,$$

$$(-1)^{n-1} \frac{m.\Theta_m}{2.3} . P_n \equiv 0\,,\ (\mathrm{mod.}\ P_m).$$

Θ_m не можетъ имѣть дѣлителей общихъ съ P_m и потому:

$$(-1)^{n-1} . m . P_n \equiv 0\,,\ (\mathrm{mod.}\ P_m).$$

Примѣръ.

$$m = 6\,,\quad P_6 = 691.$$

691 есть число простое и потому,

$$6.P_{6+k\frac{691-1}{2}} \equiv 0\,,\ (\mathrm{mod.}\ 691)\,,$$

т. е. всѣ числа вида

$$P_{6+345.k}$$

дѣлятся на 691.

Если $k = 1$, то получимъ, что P_{351} должно дѣлиться на 691.

Таблицы Бернулліевыхъ чиселъ профессора Adams'а доведены имъ только до 62-го, а потому повѣрить эту теорему на самомъ дѣлѣ мы не имѣемъ возможности.

§ 8. Слѣдствіе IV.

Формула, выведенная въ § 7:

$$(-1)^{m-1} P_m (a^{2m} - 1) \equiv 2ma^{2m-1}\, \Theta_m \sum_{i=1}^{i=N-1} i^{2m-1} E\frac{ai}{N}\,,\ (\mathrm{mod.}\ N)\,,$$

при $m=1$, даетъ рѣшеніе сравненія первой степени при a простомъ съ N:

$$ax \equiv 1\,,\ (\mathrm{mod.}\ N).$$

Въ самомъ дѣлѣ, $P_1=1$, $\Theta_1=6$ и потому

$$a^2-1 \equiv 12a \sum_{i=1}^{i=N-1} iE\frac{ai}{N}\,,\ (\mathrm{mod.}\ N)$$

или

$$a\left(a-12\sum_{i=1}^{i=N-1} iE\frac{ai}{N}\right) \equiv 1\,,\ (\mathrm{mod.}\ N).$$

Очевидно, что

$$x \equiv a-12\sum_{i=1}^{i=N-1} iE\frac{ai}{N}\,,\ (\mathrm{mod.}\ N)$$

будетъ рѣшеніемъ сравненія

$$ax \equiv 1\,,\ (\mathrm{mod.\ N}).$$

Примѣръ.

Рѣшить сравненіе:

$$5x \equiv 1\,,\ (\mathrm{mod.}\ 13).$$

$$\sum_{i=1}^{i=12} iE\frac{5i}{13} = 1.0+2.0+3.1+4.1+5.1+6.2+7.2+8.3+$$
$$+9.3+10.3+11.4+12.4=211.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{i=12} iE\frac{5i}{13} \equiv 3\,,\ (\mathrm{mod.}\ 13)$$

и

$$x \equiv 5-12.3 \equiv 5+3 \equiv 8\,,\ (\mathrm{mod.}\ 13).$$

$x \equiv 8$, дѣйствительно, есть рѣшеніе сравненія

$$5x \equiv 1\,.\ (\mathrm{mod.}\ 13).$$

Формулу

$$x \equiv a-12\sum_{i=1}^{i=N-1} iE\frac{ai}{N}\,,\ (\mathrm{mod.}\ N)$$

можно преобразовать въ другую, болѣе удобную для вычисленій:

$$x \equiv -2a + 3 + 6 \sum_{i=1}^{i=a-1} \left(E\frac{Ni}{a}\right)^2, \text{ (mod. } N),$$

но мы не считаемъ нужнымъ на этомъ останавливаться.

Прилагая ее къ предыдущему примѣру, найдемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \left(E\frac{13i}{5}\right)^2 = 2^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2 = 178;$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \left(E\frac{13i}{5}\right)^2 \equiv 9, \text{ (mod. } 13).$$

Поэтому:

$$x \equiv -2.5 + 3 + 6.9 \equiv 8, \text{ (mod. } 13).$$

Петербургъ.
5 Октября 1889 года.

Фототипія Шереръ, Набгольцъ и К° въ Москвѣ

ВИКТОРЪ ЯКОВЛЕВИЧЪ БУНЯКОВСКІЙ

Викторъ Яковлевичъ Буняковскій.

Некрологическій очеркъ.

К. А. Андреева.

30-го ноября 1889 года русскій ученый міръ понесъ незамѣнимую утрату. Въ этотъ день скончался старѣйшій изъ нашихъ математиковъ, почетный вицепрезидентъ Императорской Академіи Наукъ, Викторъ Яковлевичъ Буняковскій.

Долгая жизнь знаменитаго ученаго была наполнена такимъ множествомъ высокихъ заслугъ передъ лицомъ всего просвѣщеннаго русскаго общества и, вмѣстѣ съ тѣмъ, представляетъ такой высокій примѣръ нравственной чистоты и любви къ людямъ, что подробное жизнеописаніе и обзоръ трудовъ его было бы чрезвычайно назидательнымъ, ободряющимъ душу и привлекательнымъ чтеніемъ далеко не для однихъ спеціалистовъ. Задача составленія такого жизнеописанія есть, однако, дѣло будущаго и притомъ посильное лишь людямъ, хорошо и долго знавшимъ покойнаго и глубокимъ знатокамъ, какъ самыхъ трудовъ его, такъ и тѣхъ областей науки, къ которымъ они относятся.

Но пока не воздвигнутъ памятникъ, соотвѣтствующій заслугамъ знаменитаго ученаго, не лишнимъ будетъ скромный вѣнокъ на его еще свѣжую могилу.

Харьковское Математическое Общество имѣло высокую честь считать покойнаго Виктора Яковлевича въ числѣ своихъ почетныхъ членовъ; да будетъ же краткое воспоминаніе о немъ, занесенное на страницы издаваемаго Обществомъ журнала, его скромнымъ вѣнкомъ, залогомъ благоговѣнія передъ памятью покойнаго и признательности за уроки, преподанныя намъ примѣромъ его жизни и результатами его трудовъ.

В. Я. Буняковскій родился 3-го Декабря 1804 года въ городѣ Барѣ Подольской губерніи. Первоначальное образованіе онъ получилъ въ Москвѣ, въ домѣ графа А. П. Тормасова, а затѣмъ вмѣстѣ съ сыномъ графа былъ отправленъ за границу въ 1820 году.

За границей онъ пробылъ 7 лѣтъ. Сперва жилъ въ Кобургѣ, гдѣ бралъ частные уроки, затѣмъ переселился въ Лозанну, гдѣ слушалъ лекціи въ Лозаннской академіи. Послѣдніе два года онъ провелъ въ Парижѣ, слушая лекціи въ Сорбоннѣ и Collége de France.

Что эти семь лѣтъ, проведенные за границей, были полны для него непрестаннаго труда, можно заключить изъ того, что въ теченіе ихъ 16-лѣтній юноша превратился въ серьезнаго ученаго, обладающаго обширными знаніями и тонкимъ искусствомъ въ научныхъ пріемахъ.

Время пребыванія Буняковскаго въ Парижѣ было, правда, такимъ, когда всякій сколько нибудь склонный къ занятіямъ математикою молодой умъ не могъ не увлечься этою наукою. Фурье, Лапласъ, Біо, Коши, Пуассонъ, Араго, Амперъ, Лакруа, Лежандръ читали свои удивительныя лекціи, издавали, одинъ за другимъ, свои безсмертные труды, и всякій, кто только могъ вкусить отъ сладости этой обильной умственной трапезы, по необходимости становился въ ряды математиковъ и послѣдователей этихъ великихъ ученыхъ.

Буняковскій, благодаря своимъ дарованіямъ и трудолюбію, занялъ въ этихъ рядахъ одно изъ первыхъ мѣстъ и притомъ необыкновенно рѣшительно и быстро. Въ теченіе 1824 и 1825 годовъ онъ получилъ послѣдовательно, по приговору тѣхъ же знаменитыхъ ученыхъ, степени баккалавра, лиценціата и доктора.

19-е Мая 1825 года, когда Викторъ Яковлевичъ защищалъ публично передъ парижскимъ факультетомъ наукъ (Faculté des Sciences) свою докторскую диссертацію (thèses), есть, такимъ образомъ, начало его научно-литературной дѣятельности, не прерывавшейся болѣе полустолѣтія.

Въ 1826 году, по прибытіи изъ за границы въ Петербургъ, Викторъ Яковлевичъ посвятилъ себя педагогической дѣятельности, занявъ мѣсто преподавателя математики сперва въ 1-мъ кадетскомъ корпусѣ, а потомъ въ только что учрежденныхъ офицерскихъ классахъ морского вѣдомства. Кромѣ того въ началѣ своей карьеры онъ былъ въ теченіе 10 лѣтъ наставникомъ-наблюдателемъ въ пажескомъ корпусѣ. Преподаваніе же въ кадетскомъ корпусѣ было имъ оставлено уже въ 1831 г.

Въ 1828 году, будучи 24 лѣтъ отъ роду, В. Я. Буняковскій былъ избранъ Академіею Наукъ адъюнктомъ по чистой математикѣ, а черезъ два года экстра-ординарнымъ академикомъ. Съ того времени начинается его усиленная ученая дѣятельность. Почти каждый годъ въ изданіяхъ Академіи Наукъ появляется по нѣсколько его научныхъ мемуаровъ.

Въ 1836 году Академія возвела его въ званіе ординарнаго академика.

Съ 1846 года В. Я. Буняковскій принималъ участіе въ преподаваніи въ Петербурскомъ университетѣ. Вотъ что говорится объ этомъ участіи въ „Исторической Запискѣ“ о Петербургскомъ университетѣ, составленной профессоромъ В. В. Григорьевымъ.

„Поступивъ въ университетъ съ званіемъ ординарнаго профессора, Буняковскій принялъ на себя первоначально чтеніе Аналитической Механики по Пуассону и Остроградскому (до 1848—49 г.), Дифференціальнаго и Интегральнаго исчисленія преимущественно по Коши, и Теоріи Вѣроятностей по собственному объ этомъ предметѣ сочиненію; впослѣдствіи, съ 1849—50 года, вмѣсто Теоріи Вѣроятностей читалъ въ иные годы Интегрированіе Дифференціальныхъ Уравненій, Способъ Варіацій и Исчисленіе Конечныхъ Разностей“.

„Лекціи знаменитаго академика нашего, говорится далѣе въ той же запискѣ, отличались въ высшей степени отчетливостью и изяществомъ изложенія. Самыя трудныя и съ перваго взгляда сухія истины высшаго математическаго анализа облекались имъ въ такія привлекательныя формы, излагались такимъ прекраснымъ языкомъ, съ такою изумительною ясностью, что приковывали къ себѣ вниманіе слушателей, даже не обладавшихъ особенною сосредоточенностью“.

„Въ 1859 году, чувствуя ослабленіе здоровья и желая сосредоточиться въ однихъ кабинетныхъ занятіяхъ, В. Я. Буняковскій оставилъ университетъ, который при этомъ случаѣ, выразилъ уваженіе свое къ заслугамъ удалившагося профессора единогласнымъ избраніемъ его своимъ почетнымъ членомъ“.

Подобнымъ-же избраніемъ почтилъ В. Я. Буняковскаго Московскій университетъ еще двумя годами ранѣе.

Преподавательская дѣятельность В. Я. Буняковскаго въ университетѣ продолжалась, такимъ образомъ, всего 13 лѣтъ. Значительно большую долю своего времени и труда посвятилъ онъ преподаванію математики въ высшихъ учебныхъ учрежденіяхъ морского вѣдомства.

Слушатели бывшихъ морскихъ офицерскихъ классовъ и затѣмъ академическаго курса морскихъ наукъ имѣли счастіе пользоваться его яснымъ и увлекательнымъ изложеніемъ въ теченіе 37 лѣтъ, съ самаго учрежденія офицерскихъ классовъ въ 1827 году до 1864 года. Что такое продолжительное служеніе В. Я. Буняковскаго высшему образованію моряковъ было дѣйствительно для нихъ счастіемъ, мы видимъ изъ торжественнаго признанія ихъ же высокихъ представителей, заявленнаго въ день пятидесятилѣтняго юбилея нашего знаменитаго ученаго въ 1875 году.

Нѣкоторое время В. Я. Буняковскій былъ профессоромъ математики въ Горномъ институтѣ и въ Институтѣ путей сообщенія, гдѣ оставилъ по себѣ также свѣтлыя и благодарныя воспоминанія.

Вотъ тѣ крупныя вѣхи на жизненномъ пути В. Я. Буняковскаго, которыми отмѣчаются наиболѣе видные пункты его научной и педагогической дѣятельности. По этому пути знаменитый ученый шелъ неуклонно въ томъ направленіи, которое указывалось ему его талантами, его добросердечіемъ и его честностью, шелъ и сѣялъ изъ сокровищницы своего ума и сердца золотыя сѣмена науки то въ академическія ученыя изданія, предоставляя другимъ потрудиться надъ дальнѣйшимъ ихъ развитіемъ, то въ свѣжую почву воспріимчивыхъ умовъ учащейся молодежи.

Нужно замѣтить еще, что одною изъ выдающихся сторонъ дѣятельности В. Я. Буняковскаго было извлеченіе изъ имъ же самимъ посѣянныхъ благъ науки пользы общественной и государственной. Мы разумѣемъ тѣ многочисленныя примѣненія теоріи вѣроятностей, этой любимой имъ по преимуществу науки, которымъ онъ посвятилъ значительную часть своей жизни.

Цѣлый рядъ строго научныхъ сочиненій В. Я. Буняковскаго посвященъ имъ изслѣдованіямъ о народонаселеніи Россіи, о законахъ смертности, о средней продолжительности жизни для людей различныхъ возрастовъ и тому подобнымъ антропобіологическимъ вопросамъ. Своими популярными сочиненіями и статьями, помѣщенными имъ въ разныхъ общераспространенныхъ журналахъ, онъ старался укоренить въ обществѣ правильныя сужденія о предметахъ, связанныхъ съ надеждами или опасеніями въ будущемъ, а также разъяснить законность или незаконность различныхъ игръ и лотерей.

При введеніи у насъ всеобщей воинской повинности имъ были сдѣланы вычисленія, основывающіяся на законахъ вѣроятностей, для опредѣленія числа лицъ, кои могутъ быть призываемы для отбыванія этой повинности.

Наиболѣе осязательную практическую пользу принесли труды В. Я. Буняковскаго, содѣйствовавшіе учрежденію эмеритальныхъ кассъ. Большое число сочиненій и вычисленій, частію напечатанныхъ, частію же оставшихся въ рукописяхъ, было посвящено имъ этому благодѣтельному учрежденію. Главныя изъ работъ этого рода были произведены для учрежденія эмеритальныхъ кассъ морского вѣдомства и напечатаны въ Морскомъ Сборникѣ (1858 г.). Результаты этихъ строго научныхъ изслѣдованій составили надежное основаніе, на которомъ это учрежденіе существуетъ болѣе 30 лѣтъ и принесло не мало благодѣянія многимъ сотнямъ несчастныхъ.

В. Я. Буняковскій принималъ также болѣе или менѣе близкое участіе въ теоретическихъ работахъ по учрежденію или по повѣркѣ дѣйствій нѣкоторыхъ другихъ эмеритальныхъ кассъ, какъ-то: военно-сухопутнаго вѣдомства, учебныхъ заведеній министерства народнаго просвѣщенія, таможеннаго вѣдомства, Московскаго епархіальнаго духовенства и проч.

Мало по малу свѣтлая жизнь В. Я. Буняковскаго, тихо протекавшая въ кругу семейномъ и въ средѣ сослуживцевъ, въ которыхъ онъ возбуждалъ только симпатіи и уваженіе, жизнь, наполнявшаяся непрерывнымъ трудомъ на пользу человѣчеству, достигла того своего момента, когда для облагодѣтельствованнаго общества стало обязательнымъ подвести итоги полученныхъ благодѣяній и воздать долгъ справедливой признательности и благодарности. Наступило 19-е мая 1875 г., когда исполнилось 50 лѣтъ съ начала научной дѣятельности почтеннаго ученаго.

Справедливость требуетъ замѣтить, что этотъ долгъ признательности былъ заплаченъ какъ нельзя полнѣе со стороны всѣхъ слоевъ русскаго общества, къ которымъ дѣятельность В. Я. Буняковскаго имѣла болѣе или менѣе близкое прикосновеніе, чрезъ что юбилей старѣйшаго представителя русскихъ математиковъ сдѣлался настоящимъ торжествомъ русскаго научнаго сознанія.

Прежде всего въ этотъ день юбиляръ получилъ щедрыя награды отъ Государя въ воздаяніе „за замѣчательные труды, способствовавшіе успѣхамъ математики".

Затѣмъ въ его честь была выбита медаль, и составленъ изъ добровольныхъ пожертвованій его многочисленныхъ почитателей капиталъ для учрежденія при Академіи, на вѣчныя времена, преміи его имени за лучшія сочиненія по математикѣ.

Университеты Казанскій и Харьковскій избрали его къ этому дню въ свои почетные члены и прислали ему свои поздравленія и адресы *).

Самыя признательныя привѣтствія принесены были ему отъ представителей Академіи, флота, многихъ ученыхъ и учебныхъ учрежденій и обществъ, прочитаны ихъ адресы, а также поздравительныя письма отдѣльныхъ лицъ.

Всѣ эти привѣтствія, а также задушевныя рѣчи, говорившіяся въ этотъ день на торжественномъ обѣдѣ, устроенномъ его почитателями, были проникнуты однимъ общимъ духомъ высокаго уваженія и удивленія къ его талантамъ и учености и дружескихъ симпатій, къ которымъ располагали высокія качества его характера.

Прошло еще десять лѣтъ. Силы нѣкогда неутомимаго дѣятеля стали ослабѣвать. Перенести глубокія впечатлѣнія и нравственное напряженіе, неизбѣжныя для виновника всякаго торжественнаго празднества, было бы вредно для здоровья Виктора Яковлевича, а потому отъ мысли, возникшей было въ средѣ его почитателей, отпраздновать 60-лѣтіе его научно-литературной дѣятельности, пришлось отказаться.

Три года спустя ближайшіе сослуживцы и друзья В. Я. Буняковскаго нашли, однако, возможнымъ выразить еще разъ признаніе его

*) В. Я. Буняковскій былъ также почетнымъ членомъ университетовъ Кіевскаго и Новороссійскаго, избравшихъ его въ это званіе нѣсколько позже: Кіевскій въ 1876, а Новороссійскій въ 1878 году.

высокихъ заслугъ чествованіемъ въ самомъ тѣсномъ кругу 60-лѣтія его служенія наукѣ въ качествѣ члена Академіи.

Будучи точнымъ и усерднымъ исполнителемъ всякаго долга въ теченіе своей многолѣтней жизни, В. Я. Буняковскій не захотѣлъ и подъ конецъ ея быть лишь номинальнымъ исполнителемъ обязанностей, связанныхъ съ высокимъ официальнымъ положеніемъ. Поэтому за нѣсколько мѣсяцевъ до своей кончины, чувствуя упадокъ физическихъ силъ, онъ попросилъ уволить его отъ званія вице-президента Академіи Наукъ, которое носилъ въ теченіе 25 лѣтъ (съ 1864 года).

Избравши на этотъ высокій постъ другого своего сочлена, Академія провозгласила В. Я. Буняковскаго своимъ почетнымъ вице-президентомъ.

Преклонный возрастъ высокопочтеннаго математика, принесшій ему утомленіе физическое, не умалилъ, однако, его силъ умственныхъ и нравственныхъ, закаленныхъ, такъ сказать, долгимъ методическимъ трудомъ. Послѣ своего 50-лѣтняго юбилея, перейдя на 8-е десятилѣтіе жизни, В. Я. Буняковскій принесъ еще не малую дань наукѣ, какъ своими вкладами въ ученыя академическія изданія, такъ и своимъ участіемъ во внутренней жизни и самоуправленіи нашей первенствующей ученой коллегіи. До самаго послѣдняго дня своей жизни онъ оставался на ногахъ, сохранялъ свѣжесть ума и теплоту сердца и перешелъ въ лучшій міръ почти безболѣзненно.

Что же оставилъ въ наслѣдіе потомству этотъ представитель науки, столь щедро вознагражденный при жизни признательностью и всѣми возможными проявленіями уваженія своихъ современниковъ?

Въ 1883 году по распоряженію Академіи Наукъ былъ напечатанъ списокъ математическихъ сочиненій В. Я. Буняковскаго, имъ самимъ составленный *). Списокъ этотъ содержитъ 108 названій различныхъ его трудовъ. Нѣкоторыя изъ входящихъ въ него произведеній относятся къ практическимъ примѣненіямъ математики, о которыхъ мы упоминали выше. Но значительное большинство суть чисто научные труды, относящіеся притомъ къ самымъ различнымъ отдѣламъ математики.

Не имѣя возможности входить въ настоящей замѣткѣ въ разсмотрѣніе содержанія научныхъ произведеній В. Я. Буняковскаго, ограничимся хотя краткимъ обзоромъ названнаго списка.

Во главѣ этого списка находятся двѣ работы, составившія докторскую диссертацію и изданныя за границей (1825). Одна изъ нихъ по содержанію относится къ аналитической механикѣ, другая къ математической физикѣ.

Всѣ остальныя сочиненія расположены по отдѣламъ.

Въ отдѣлѣ Ариѳметики обозначены два учебника. Затѣмъ слѣдуетъ отдѣлъ Теоріи Чиселъ, содержащій 36 нумеровъ. Это все суть научные

*) „Liste des travaux mathématiques de Victor Bouniakowsky etc".—St.-Pétersbourg, 1883.

мемуары, напечатанные въ изданіяхъ Академіи въ различные годы, начиная съ 1829 и по 1882.

Къ Алгебрѣ относятся 7 сочиненій. Изъ нихъ одно только, самое первое, (1828) помѣщено въ иностранномъ журналѣ Crelle, всѣ же остальныя въ изданіяхъ Академіи.

Вопросамъ Геометріи посвящены 10 произведеній и 11 Дифференціальному и Интегральному исчисленіямъ. Изъ геометрическихъ вопросовъ наибольшее вниманіе В. Я. Буняковскаго привлекалъ вопросъ о параллельныхъ линіяхъ. Къ этому предмету онъ возвращался въ теченіе своей жизни нѣсколько разъ. Первое сочиненіе по этому предмету напечатано въ Мемуарахъ академіи въ 1843 г.; послѣднее въ Московскомъ Математическомъ Сборникѣ въ 1872 г.

Отдѣлъ, озаглавленный: Теорія Вѣроятностей и Антропобіологія, включаетъ 21 сочиненіе весьма различнаго характера. Здѣсь находятся и маленькія статьи, и очень большіе трактаты, и изслѣдованія теоретическія, и практическія приложенія.

Самое важное изъ сочиненій, относящихся къ этому отдѣлу, и въ то же время самый крупный вкладъ В. Я. Буняковскаго въ науку, есть безспорно его: „Основанія Математической Теоріи Вѣроятностей“, изданныя въ 1846 году.

По внѣшности это большой томъ въ 4-ю долю листа, включающій почти 500 страницъ; по содержанію—самое полное изложеніе науки о вѣроятностяхъ въ ея соотвѣтствующемъ тому времени состояніи. Кромѣ чрезвычайно тщательной разработки всѣхъ теоретическихъ вопросовъ составляющихъ, такъ сказать, зерно науки, книга содержитъ исторію возникновенія и постепеннаго развитія науки, а также множество ея приложеній, какъ-то: къ вопросамъ о человѣческой жизни, къ вспомогательнымъ кассамъ и страховымъ учрежденіямъ, къ опредѣленію правдоподобія свидѣтельствъ и преданій, къ задачамъ судопроизводства, къ опредѣленію погрѣшностей при наблюденіяхъ, къ вычисленію вѣроятныхъ потерь въ войскѣ во время сраженія и т. под.

Составленіе такого сочиненія потребовало, конечно, отъ автора многолѣтняго труда на изученіе литературы предмета и, по самому своему характеру, должно содержать не мало заимствованій изъ трудовъ предшественниковъ, созидателей науки. Но даже эти заимствованія являются въ книгѣ въ такомъ переработанномъ видѣ, съ такими существенными упрощеніями и обширными дополненіями, что почти каждая строчка книги носитъ печать самостоятельности автора и есть плодъ не только его обширной эрудиціи, но и глубокаго оригинальнаго мышленія.

Кромѣ всего сказаннаго „Основанія Математической Теоріи Вѣроятностей“ содержатъ еще десять примѣчаній. Это суть небольшія математическія статьи изъ теоріи конечныхъ разностей и интегральнаго исчисленія, присоединенныя къ книгѣ съ цѣлью, какъ говорится въ предисловіи, избавить нѣкоторыхъ читателей отъ труда пріискивать въ другихъ трактатахъ или мемуарахъ объясненія разныхъ теорій, часто встрѣчающихся въ исчисленіи вѣроятностей. Каждая изъ этихъ статей имѣетъ также самостоятельный интересъ, какъ образчикъ прекраснаго математическаго изложенія, не оставляющій желать ничего лучшаго въ смыслѣ простоты, ясности и убѣдительности сужденій.

Выше было сказано, что В. Я. Буняковскій дебютировалъ въ наукѣ сочиненіемъ по аналитической механикѣ. Къ этому отдѣлу точныхъ наукъ онъ возвращался въ послѣдующей своей дѣятельности сравнительно рѣдко. Въ спискѣ его сочиненій, подъ рубрикою Раціональная и прикладная Механика, мы встрѣчаемъ только четыре мемуара, изъ которыхъ два содержатъ описаніе изобрѣтеннаго имъ планиметра.

Въ послѣдній отдѣлъ списка, подъ заглавіемъ Смѣсь, включены всѣ сочиненія и труды, не подходящіе по содержанію ни подъ одну изъ предыдущихъ рубрикъ, или же сочиненія популярныя. Самое важное изъ сочиненій, здѣсь упоминающихся, составляетъ также одну изъ крупныхъ заслугъ В. Я. Буняковскаго. Это его „Лексиконъ чистой и прикладной Математики“, изданный въ 1839 году. Слова этого лексикона расположены по французскому алфавиту и сопровождаются русскимъ переводомъ и объясненіемъ значенія каждаго термина на русскомъ же языкѣ. Объясненія содержатъ значительныя подробности, дающія очень полное понятіе о каждомъ предметѣ.

Къ сожалѣнію словарь этотъ доведенъ авторомъ только до буквы *E*. Но и въ этихъ предѣлахъ онъ составляетъ большой томъ въ 4-ю долю листа и содержитъ 474 страницы и 8 таблицъ чертежей.

Важность заслуги В. Я. Буняковскаго, принесенной этимъ сочиненіемъ, заключается въ томъ, что оно значительно содѣйствовало установленію у насъ математическихъ терминовъ, выраженій и оборотовъ рѣчи. До Буняковскаго русскихъ математическихъ сочиненій было очень мало, а по нѣкоторымъ отраслямъ науки, какъ напр. по теоріи вѣроятностей, не было вовсе ни оригинальныхъ произведеній, ни переводовъ. Не существовало, слѣдовательно, и номенклатуры предметовъ, входящихъ въ эти науки.

Въ настоящее время „Лексиконъ“ Буняковскаго рѣдко приходится видѣть въ рукахъ математиковъ, и библіотечная пыль рѣдко стряхивается съ этой полезной книги. Между тѣмъ, смѣло можно утверждать, что всякій начинающій математикъ, заглянувши въ эту книгу хотя бы изъ поверхностнаго любопытства, получитъ отъ того несомнѣнную для себя пользу.

В. Я. Буняковскій принималъ также дѣятельное участіе въ составленіи статей математическаго содержанія для Энциклопедическаго Лексикона Плюшара, начало котораго относится къ 1835 году, а также завѣдывалъ по математическимъ наукамъ редакціею Энциклопедическаго Словаря Гершельмана (1861—1863). Въ пяти изданныхъ томахъ второго изъ этихъ изданій онъ помѣстилъ много собственныхъ статей, изъ которыхъ нѣкоторыя довольно обширны, какъ напр. объясненіе словъ: Анализъ, Ариѳметика и проч.

Въ качествѣ рецензента сочиненій, удостаиваемыхъ Академіей премій и наградъ, Буняковскому приходилось много разъ представлять отзывы объ этихъ сочиненіяхъ. Многіе изъ этихъ отзывовъ представляютъ сами по себѣ серьезныя математическія работы.

Какъ ни поверхностенъ предыдущій перечень произведеній В. Я. Буняковскаго, онъ достаточно свидѣтельствуетъ объ обширности труда и богатствѣ умственныхъ силъ, имъ посвященныхъ. Нужно замѣтить, однако, что и самое подробное разсмотрѣніе сочиненій В. Я. Буняковскаго не дастъ еще достаточной мѣры для оцѣнки его значенія, какъ ученаго.

Заслуги ученаго передъ обществомъ опредѣляются, какъ извѣстно, не числомъ или размѣрами его сочиненій и даже не глубиною вложенной въ нихъ мудрости, а большей или меньшей плодотворностью всей его дѣятельности, т. е. тѣми послѣдствіями, которыя проистекаютъ изъ этой дѣятельности въ смыслѣ научнаго прогресса. Въ этомъ отношеніи заслуги В. Я. Буняковскаго передъ отечествомъ всѣми достаточно признаны и всегда будутъ признаваемы.

Современники и потомки цѣнили и будутъ цѣнить въ его лицѣ живую научную силу, благодаря которой создалась у насъ цѣлая семья русскихъ математиковъ, преданныхъ высокимъ интересамъ своей науки и вдохновленныхъ тою же любовью къ истинѣ и точнымъ знаніямъ, которая широкою волною разлита во всѣхъ его произведеніяхъ. Въ этой семьѣ В. Я. Буняковскому принадлежитъ роль патріарха.

Отношенія къ В. Я. Буняковскому его современниковъ и признаніе ими его высокихъ заслугъ лучше всего выразились въ привѣтственныхъ адресахъ и поздравленіяхъ, принесенныхъ ему въ день его 50-лѣтняго юбилея. Такъ какъ въ этихъ поздравленіяхъ заключается приговоръ судей, наиболѣе призванныхъ и компетентныхъ, то не считаемъ лишнимъ привести изъ нихъ нѣкоторыя мѣста *).

Въ привѣтствіи отъ имени Академіи Наукъ говорится, что первенствующая ученая коллегія чествуетъ въ лицѣ своего вице-президента „заслуги ученаго, обогатившаго своими изслѣдованіями различныя отрасли математическихъ наукъ, имѣвшаго цѣлью, при многихъ изъ своихъ изысканій, практическую пользу государства и общества, и способствовавшаго, чрезъ свою педагогическую дѣятельность, распространенію математическихъ знаній въ Россіи“.

*) См. „Описаніе празднованія докторскаго юбилея вице-президента Императорской Академіи Наукъ, академика, тайнаго совѣтника, В. Я. Буняковскаго, 19 мая 1875 г.“— С.П.Б. 1876.

Привѣтствуя юбиляра отъ имени Горнаго института академикъ Н. И. Кокшаровъ говорилъ:

„Подвизаясь на избранномъ вами поприщѣ, вы, вмѣстѣ съ нѣкоторыми маститыми математиками нашими, упрочили математическую школу въ Россіи, положили начало Математическому Словарю,... установили номенклатуру науки, обогатили изданія Академіи самыми разнообразными мемуарами, приложили ученіе о вѣроятностяхъ къ общественнымъ вопросамъ первостепенной важности, стараясь, такимъ образомъ, примѣнять науку къ пользамъ человѣчества“.

Болѣе полную характеристику ученыхъ заслугъ В. Я. Буняковскаго заключаютъ въ себѣ адресы отъ Московскаго Университета и Московскаго Математическаго Общества. Въ первомъ говорится:

„Въ теченіе полувѣка математическое образованіе въ Россіи быстро подвигалось впередъ, и труды нашихъ математиковъ, одинъ за другимъ, стали занимать видныя мѣста въ математической литературѣ Европы. Вы постоянно и неутомимо стояли въ числѣ вождей этого движенія впередъ: вашими изслѣдованіями обогащая сокровищницу анализа, вы прилагали его выводы къ разнообразнымъ явленіямъ въ жизни дорогого отечества; вашимъ преподаваніемъ вы разливали знаніе и любовь къ нему въ молодыхъ поколѣніяхъ; вы съ теплымъ сердечнымъ сочувствіемъ всегда готовы были поддержать и ободрить всякаго, кто въ трудныхъ математическихъ изысканіяхъ шелъ къ вамъ за совѣтомъ и помощью“.

Московское Математическое Общество привѣтствовало В. Я. Буняковскаго, какъ первокласснаго ученаго, представителя математическихъ наукъ у насъ въ Россіи и человѣка, всѣмъ извѣстнаго высокими качествами своего характера.

„Вашъ юбилей, говорится въ этомъ привѣтствіи, не есть одно торжество для вашихъ друзей и почитателей; онъ есть общее празднество отечественной науки. Начало вашей научной дѣятельности есть и начало новаго періода въ развитіи нашего математическаго образованія, когда отъ слѣпого подражанія чужому авторитету оно перешло къ самостоятельной жизни“.... „Ваша научная дѣятельность въ области математики отличается тою оригинальностью и плодовитостью, которыя высоко ставятъ васъ въ средѣ европейскихъ математиковъ. Вы первый изъ русскихъ ученыхъ работали плодотворно и самостоятельно въ области теоріи чиселъ и соперничали въ своихъ изслѣдованіяхъ съ извѣстными европейскими геометрами. Вы обогатили литературу классическимъ сочиненіемъ по теоріи вѣроятностей. Этимъ сочиненіемъ вы водворили эту науку у насъ и не переставали оставаться ея представителемъ до настоящаго времени“.... „Вы содѣйствовали научному разрѣшенію многихъ вопросовъ русской статистики. Вамъ принадлежитъ главная заслуга научной разработки задачъ объ русскихъ эмеритальныхъ кассахъ. Вашимъ прекраснымъ математическимъ лексикономъ вы способствовали установленiю русской математической терминологiи и дали богатый матерiалъ для многосторонняго историческаго изученiя различныхъ вопросовъ нашей науки"…. „Ваше изящное литературное изложенiе служитъ живымъ выраженiемъ тѣхъ нравственныхъ качествъ, которыми вы всегда привлекали вашихъ почитателей. Вашъ литературный стиль отличался всегда ясностью и простотою. Ваши высокiя научныя заслуги и нравственныя достоинства дѣлаютъ ваше имя дорогимъ для всякаго русскаго образованнаго человѣка".

Особенно удачно объясняетъ значенiе трудовъ В. Я. Буняковскаго и связь ихъ съ произведенiями иностранныхъ свѣтилъ науки нашъ извѣстный ученый Н. В. Ханыковъ, ревностный любитель математики, жившiй долгое время за границей и сблизившiйся съ учеными знаменитостями запада.

„Вы наслѣдовали, говоритъ онъ въ своемъ поздравительномъ письмѣ, отъ доблестнаго вашего наставника Коши многосторонность изслѣдованiй, но, наученные его примѣромъ, вы не довольствовались, такъ сказать, отдѣлкою вчернѣ вашихъ изысканiй и, кромѣ яснаго изложенiя многихъ отраслей науки цѣлому поколѣнiю благодарныхъ вамъ учениковъ, вы обогатили математическую литературу многими произведенiями, отличающимися своимъ изяществомъ и законченностью. Вамъ же безспорно принадлежитъ честь первой тщательной разработки въ нашемъ отечествѣ отрасли, насажденной въ немъ съ такою любовью и скромностью безсмертнымъ Эйлеромъ и другомъ его Гольдбахомъ. Подобно имъ, въ тиши кабинета, и не гоняясь за рукоплесканiями современниковъ, удѣляемыми по преимуществу работающимъ въ модныхъ направленiяхъ науки, вы постоянно воздѣлывали теорiю чиселъ, не входившую даже тогда въ программы преподаванiя, и многiя ваши изслѣдованiя уже признаны классическими и излагаются здѣсь *) въ публичныхъ курсахъ".

„Заслуги ваши на поприщѣ установленiя русскаго математическаго языка извѣстны всѣмъ русскимъ математикамъ и давно оцѣнены по справедливости; въ этомъ отношенiи изданiя вашего Математическаго Словаря и Теорiи Вѣроятностей, по которой Гаусъ и Бiенеме выучились по-русски, будутъ всегдашними свидѣтелями не только обширности вашей математической эрудицiи и ясности изложенiя, но вмѣстѣ съ тѣмъ и тонкаго филологическаго такта, такъ рѣдко сопровождающаго проницательныя и глубокiя способности геометровъ".

Изъ приведенныхъ цитатъ достаточно ясно, сколь единодушны признанiя важности того, что сдѣлано В. Я. Буняковскимъ для науки. Столь же единодушно, но только изъ болѣе разнообразныхъ сферъ и съ

*) Письмо прислано изъ Парижа.

большею, такъ сказать, горячностью воздаются хвалы его высокимъ нравственнымъ качествамъ. Въ этомъ отношенiи обликъ маститаго ученаго выразительнѣе всего обрисованъ въ рѣчи академика А. В. Никитенко, произнесенной на томъ же торжествѣ.

Воздавши должныя похвалы дѣятельности юбиляра на поприщѣ науки и ея приложенiй, ораторъ продолжаетъ:

„Для чести ума человѣческаго довольно, если мы въ состоянiи указать на примѣры превосходства его въ рѣшенiи тѣхъ или другихъ трудныхъ вопросовъ, предлагаемыхъ жизнью. Но этого не довольно для полноты человѣческаго достоинства. Есть нѣчто до того требуемое этимъ достоинствомъ, что безъ него самые превознесенные дары ума, гдѣ бы они ни являлись—въ наукѣ, въ искусствѣ-ли, въ государственной и практической дѣятельности—обратятся только въ укоръ человѣку и способны болѣе унизить его, чѣмъ возвеличить. Это нѣчто—*нравственный характеръ*, въ которомъ всѣ высшiя силы, присущiя нашей природѣ, находятъ свое средоточiе и довершенiе, достигаютъ своего апогея и возводятъ дѣйствительнаго человѣка въ лучшее и чистѣйшее созданiе на землѣ. Стараясь по возможности очертить образъ, въ какомъ являлись вы всегда въ нашей средѣ, мы разумѣемъ *васъ всего*, а не одни превосходныя умственныя и ученыя качества; вмѣстѣ съ ними мы разумѣемъ ваше благородное, честное, вселюбящее сердце, вашу готовность воздать подобающую честь всякому благому дѣлу и начинанiю, вашу кроткую, истинно человѣческую снисходительность къ недостаткамъ и ошибкамъ ближнихъ, вашу, наконецъ, постоянную неукоризненную вѣрность долгу, чуждую личныхъ эгоистическихъ поползновенiй,—словомъ, вашъ нравственный характеръ. И не въ отдѣльныхъ, такъ сказать, разбросанныхъ, какъ бы случайныхъ чертахъ онъ обозначился передъ нами; нѣтъ! вы олицетворили собою цѣлую, стройную художественную систему жизни, коей господствующее начало, основная идея есть—*добро для всѣхъ и о всемъ*".

При такихъ качествахъ души В. Я. Буняковскiй, не только въ отношенiяхъ къ другимъ, но и въ своихъ внутреннихъ стремленiяхъ и личной дѣятельности, не могъ быть исключительнымъ. Сердце его всегда было отзывчиво на все прекрасное и возвышенное.

Въ той же рѣчи академика А. В. Никитенко говорится между прочимъ:

„Ваша строгая спецiальность не мѣшала вамъ питать горячее сочувствiе ко всему истинному и прекрасному, ко всякому проявленiю таланта, въ какой бы умственной средѣ они не возникали, не исключая и среды эстетической".

Въ области художественной особенную любовь В. Я. Буняковскаго привлекала изящная литература, на алтарь которой онъ и самъ въ свои молодые годы возложилъ нѣсколько приношенiй.

Выше мы упоминали, что для чествованія В. Я. Буняковскаго въ день его 50-лѣтняго юбилея былъ составленъ по подпискѣ капиталъ. Въ подпискѣ этой принимали участіе преимущественно лица ученаго и учебнаго сословія и чины флота; всего около 400 лицъ. Небольшая часть капитала была употреблена на изготовленіе медалей, другая же, значительно большая, послужила фондомъ для учрежденія при Академіи Наукъ преміи имени В. Я. Буняковскаго за лучшія сочиненія по математикѣ.

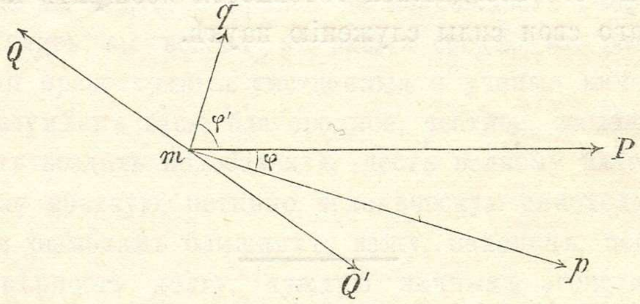
Члены семейства В. Я. Буняковскаго, его супруга и дѣти, пожелали присоединить къ этому фонду свое довольно значительное приношеніе.

Такимъ образомъ, семья русскихъ людей науки, соединившись, въ своихъ симпатіяхъ и чувствѣ признательности къ своему старѣйшему сочлену, съ его родною семьею, воздвигла ему еще при его жизни достойный великаго ученаго памятникъ. Памятникъ этотъ не только обезсмертитъ его имя, которому и безъ того принадлежитъ выдающееся мѣсто въ исторіи науки, но и будетъ служить непрерывнымъ продолженіемъ его плодотворной дѣятельности въ одномъ изъ наилучшихъ ея направленій—его всегдашней готовности поощрять и ободрять всякаго, отдающаго свои силы служенію наукѣ.

По вопросу о сложеніи силъ.

Х. С. Головина.

1. Положимъ, что на данную точку m дѣйствуетъ сила $2p'$, по направленію данной прямой mP, (фиг. 1-я) и еще двѣ силы p', направленныя по другой данной прямой QQ' въ противоположныя стороны.



Фиг. 1-я.

Такъ какъ двѣ послѣднія силы взаимно уравновѣшиваются, то общая равнодѣйствующая всей системы силъ приводится къ силѣ $2p'$, направленной по прямой mP. Но та же система силъ можетъ быть замѣнена двумя взаимно перпендикулярными силами p и q, причемъ p будетъ равнодѣйствующей двухъ равныхъ силъ p', направленныхъ по прямымъ mP и mQ, а q равнодѣйствующей двухъ такихъ же силъ p', направленныхъ по mP и mQ'.

Обозначая углы, составляемые прямою mP съ направленіями силъ p и q, черезъ φ и $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, можемъ написать

$$p = 2p'f(\varphi) \quad \text{и} \quad q = 2p'f(\varphi').$$

Сила $2p'$, очевидно, будетъ равнодѣйствующей двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ p и q; обозначимъ ея величину черезъ r, т. е. положимъ

$$2p' = r.$$

Тогда будетъ

$$p = rf(\varphi) \qquad \text{и} \qquad q = rf(\varphi').$$

Положимъ, что къ точкѣ m приложена вторая система такихъ-же силъ p и q, но расположенная симметрически съ первой относительно направленія mP равнодѣйствующей силы r; тогда общая равнодѣйствующая четырехъ силъ будетъ $2r$ и направится также по прямой mP.

Такъ какъ послѣднія силы попарно равны и направлены подъ равными углами (φ и φ') къ своей равнодѣйствующей, то можно написать

$$r = pf(\varphi) + qf(\varphi') = r\{[f(\varphi)]^2 + [f(\varphi')]^2\}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$[f(\varphi)]^2 + [f(\varphi')]^2 = 1$$

и

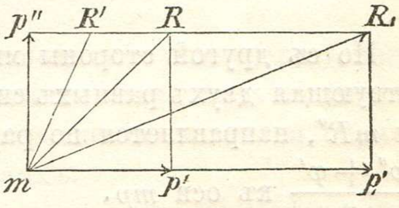
$$p^2 + q^2 = r^2.$$

Уголъ φ можетъ имѣть произвольную величину, а, слѣдовательно, и величины силъ p и q могутъ быть какія угодно.

Такимъ образомъ найдено, что величина равнодѣйствующей r двухъ взаимно-перпендикулярныхъ, но имѣющихъ какую угодно величину, силъ p и q опредѣляется длиною діагонали параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ, изображающихъ эти силы.

Конечно, пока нельзя утверждать, что и направленіе равнодѣйствующей опредѣляется тою же діагональю; но не трудно указать частный случай, въ которомъ это будетъ имѣть мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, если величины двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ будутъ равны между собою ($q = p$), то ихъ равнодѣйствующая направится по равнодѣлящей прямого угла и, слѣдовательно, совпадетъ съ діагональю сказаннаго параллелограмма, который обращается тогда въ квадратъ.

2. Положимъ теперь, что къ точкѣ m приложена кромѣ сказанныхъ силъ p и p, дѣйствующихъ по направленіямъ mp' и mp'', (фиг. 2-я) еще сила, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ одной изъ данныхъ силъ mp', а величина r равна величинѣ равнодѣйствующей этихъ силъ.



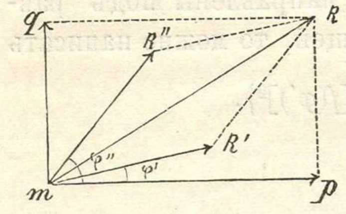
Фиг. 2-я.

Тогда общая равнодѣйствующая направится по равнодѣлящей угла Rmp' и, слѣдовательно, отрѣжетъ на линіи $p''R$ отрѣзокъ $RR_1 = r$. Поэтому и для двухъ взаимно-перпендикулярныхъ силъ p и $p + r$ равнодѣйствующая опредѣляется, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ силахъ. Можно сказать, что всякая сила, направленная по прямой mR_1, разлагает-

*

ся на составляющія по взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ mp' и mp'', слѣдуя правилу параллелограмма силъ, или, иначе, что составляющія эти будутъ представлять собою проекціи силы на соотвѣтствующія направленія.

Не трудно показать, что тѣже заключенія будутъ имѣть мѣсто и для направленія mR', дѣлящаго пополамъ уголъ $p''mR$, а также для направленій равнодѣлящихъ угловъ $p'mR_1$ и $p''mR'$ и т. д. для безконечно большого числа направленій равнодѣйствующей силы.



Фиг. 3-я.

3. Пусть два направленія mR' и mR'' (фиг. 3-я) обладаютъ сказаннымъ свойствомъ относительно осей mp и mq, и положимъ, что по этимъ направленіямъ на точку m дѣйствуютъ двѣ силы равной величины r'.

Каждая изъ этихъ послѣднихъ силъ можетъ быть замѣнена ея составляющими по направленіямъ осей; для силы, направленной по mR', эти составляющія будутъ:

$$p' = r'\cos\varphi' \quad \text{и} \quad q' = r'\sin\varphi',$$

а для силы, направленной по mR'':

$$p'' = r'\cos\varphi'' \quad \text{и} \quad q'' = r'\sin\varphi''.$$

Силы, дѣйствующія вдоль одной прямой, складываются алгебраически и потому можно сказать, что двѣ данныя силы r' замѣняются двумя же взаимно-перпендикулярными силами

$$p = r'(\cos\varphi' + \cos\varphi'') \quad \text{и} \quad q = r'(\sin\varphi' + \sin\varphi'').$$

Величина равнодѣйствующей послѣднихъ силъ, какъ показано выше, будетъ

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = r'\sqrt{2 + 2\cos(\varphi'' - \varphi')} = 2r'\cos\left(\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}\right).$$

Но съ другой стороны мы знаемъ, что та же сила r, какъ равнодѣйствующая двухъ равныхъ силъ r', дѣйствующихъ по направленіямъ mR' и mR'', направляется по равнодѣлящей угла $R'mR''$, т. е. подъ угломъ $\frac{\varphi'' + \varphi'}{2}$ къ оси mp.

Проекція равнодѣйствующей r на эту ось будетъ

$$r\cos\frac{\varphi'' + \varphi'}{2} = 2r'\cos\frac{\varphi'' + \varphi'}{2}\cos\frac{\varphi'' - \varphi'}{2} = r'(\cos\varphi' + \cos\varphi'').$$

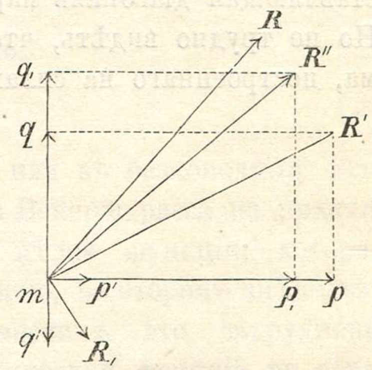
Слѣдовательно будетъ

$$r\cos\frac{\varphi'' + \varphi'}{2} = p,$$

т. е. проекція силы r на ось mp будетъ представлять въ тоже время составляющую этой силы по направленію сказанной оси.

Поэтому, если правило параллелограмма силъ справедливо для двухъ направленій mR' и mR'', то оно будетъ справедливо и для направленія mR, раздѣляющаго пополамъ уголъ между этими двумя направленіями.

4. Подраздѣляя послѣдовательно пополамъ углы между различными направленіями, для которыхъ доказано правило сложенія и разложенія силъ, придемъ къ заключенію, что правило это будетъ справедливо для безконечно большаго числа направленій, непрерывно слѣдующихъ одно за другимъ, т. е. будетъ справедливо для всякаго, произвольно выбраннаго, направленія. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что для нѣкотораго направленія mR силы r (фиг. 4-я) правило параллелограмма не имѣетъ мѣста; тогда направленіе mR' діагонали параллелограмма, построеннаго на составляющихъ p и q силы $r = mR$, должно отличаться отъ направленія самой силы mR, а величина этой діагонали будетъ $mR' = r = \sqrt{p^2 + q^2}$.



Фиг. 4-я.

По доказанному выше всегда можно выбрать такое направленіе mR'', лежащее между mR и mR', для котораго правило параллелограмма будетъ справедливо и, слѣдовательно, составляющія силы r, дѣйствующей по mR'', будутъ проекціями этой силы на оси mp и mq; при этомъ необходимо будетъ $p_1 < p$ и $q_1 > q$. Силу mR можно разсматривать какъ равнодѣйствующую силъ mR'' и mR_1, при чемъ составляющія силы mR_1 по осямъ будутъ

$$mp' = p - p_1 \quad \text{и} \quad mq' = -(q_1 - q).$$

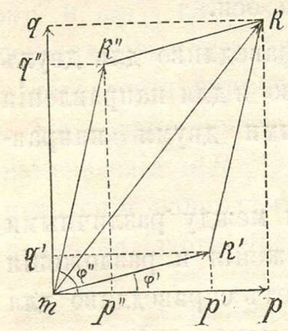
Равнодѣйствующая mR оказывается лежащею внѣ угла, образуемаго ея составляющими mR'' и mR_1, что невозможно; стало быть направленіе силы mR не можетъ отличаться отъ направленія діагонали параллелограмма, построеннаго на ея составляющихъ.

Такимъ образомъ можно считать доказаннымъ, что равнодѣйствующая двухъ какихъ угодно взаимно-перпендикулярныхъ силъ опредѣляется, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, діагональю параллелограмма, построеннаго на силахъ составляющихъ.

5. Послѣдній выводъ не трудно распространить и на силы, уголъ между которыми будетъ какой угодно, отличающійся отъ прямого.

Пусть даны двѣ такія силы r' и r'', наклоненныя подъ углами φ' и φ'' къ оси mp (фиг. 5-я).

Составляющія (или проекціи) силы r' по осямъ mp и mq будутъ



Фиг. 5-я.

$$p' = r'\cos\varphi' \quad \text{и} \quad q' = r'\sin\varphi'.$$

Составляющія по тѣмъ же осямъ силы r'' будутъ

$$p'' = r''\cos\varphi'' \quad \text{и} \quad q'' = r''\sin\varphi''.$$

Полагая

$$p = r'\cos\varphi' + r''\cos\varphi'' \quad \text{и} \quad q = r'\sin\varphi' + r''\sin\varphi'',$$

можемъ, по предыдущему, сказать, что силы p и q (взаимно-перпендикулярныя) замѣняютъ собою данныя силы r' и r''; равнодѣйствующая тѣхъ и другихъ силъ будетъ таже сила r, представляющая діагональ параллелограмма, построеннаго на силахъ p и q. Но не трудно видѣть, что она же будетъ діагональю параллелограмма, построеннаго на силахъ r' и r''.

Разложенiе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцiй на частныя дроби и въ безконечныя произведенiя.

М. А. Тихомандрицкаго.

Разложенiе функцiй на частныя дроби или въ безконечныя произведенiя по теоремамъ Миттагъ-Леффлера и Вейерштрасса на практикѣ встрѣчаетъ затрудненiе въ опредѣленiи цѣлой функцiи, которая представляется въ первомъ случаѣ придаточною, во второмъ внѣшнимъ множителемъ. Для функцiй двоякоперiодическихъ это затрудненiе устраняется теоремою, что если двоякоперiодическая функцiя не обращается въ безконечность внутри своего параллелограмма перiодовъ, то она есть постоянная; для функцiй съ однимъ перiодомъ такой теоремы нѣтъ, и надобно поэтому опереться на что нибудь другое при выполненiи этого разложенiя. Г. Букрѣевъ *) употребляетъ съ этою цѣлью методъ Коши; но намъ кажется, что это можно сдѣлать на основанiи другихъ теоремъ, болѣе элементарныхъ. Разсмотрѣнiе производныхъ значительно облегчаетъ эти изслѣдованiя. Хотя главный предметъ этой статьи будутъ составлять эллиптическiя функцiи, но какъ двойные ряды частныхъ дробей или двойныя произведенiя, въ которыя разлагаются эти функцiи, могутъ быть преобразованы въ простые ряды и произведенiя при помощи аналогичныхъ разложенiй тригонометрическихъ функцiй, то мы и начнемъ съ этихъ послѣднихъ наши разложенiя; однако самого преобразованiя мы не будемъ здѣсь дѣлать, такъ какъ это можно найти въ книгѣ: *Biermann*. Theorie der analytischen Functionen. Leipzig. 1887. S. 336 u. f.

---

*) *Б. Букрѣевъ*. О разложенiи трансцендентныхъ функцiй на частныя дроби. Кiевъ, 1887 года.

1. Функція

$$\operatorname{cosec}^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

комплексной перемѣнной $z = x + yi$ есть однозначная, конечная и непрерывная на всей плоскости, за исключеніемъ точекъ

$$z = k\pi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ k цѣлое число, положительное, нуль или отрицательное—въ которыхъ она обращается въ ∞^2, и которыя потому суть ея полюсы, — и точки

$$z = \infty, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

которая для нея существенно-особенная, ибо въ ней она можетъ принимать безчисленное множество значеній. Разсмотримъ поближе функцію вблизи тѣхъ и другихъ.

Если во (2) примемъ $k = 0$, то будемъ имѣть точку

$$z = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

вблизи ея функція будетъ разлагаться въ рядъ такого вида:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosec}^2 z &= \frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right)^2} = \\ &= \frac{1}{z^2}\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)\right]^{-2} = \\ &= \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{z^2}{3} + z^4\,\mathfrak{P}(z^2)\right] = \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + z^2\,\mathfrak{P}(z^2); \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

отсюда получимъ:

$$\text{пред.}\left(\operatorname{cosec}^2 z - \frac{1}{z^2}\right)_{z=0} = \frac{1}{3}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Но функція $\operatorname{cosec}^2 z$ есть періодическая и періодъ ея есть π; слѣдовательно, если

$$z' + k\pi = z, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

то будетъ

$$\operatorname{cosec}^2 z' = \operatorname{cosec}^2 z; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

вычитая отсюда тождество:

$$\frac{1}{(z'-k\pi)^2}=\frac{1}{z^2}, \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

и полагая затѣмъ $z=0$, слѣдовательно $z'=k\pi$, получимъ:

$$\text{пред.}\left[\operatorname{cosec}^2 z'-\frac{1}{(z'-k\pi)^2}\right]_{z'=k\pi}=\text{пред.}\left[\operatorname{cosec}^2 z-\frac{1}{z^2}\right]_{z=0}=\frac{1}{3}. \ (10)$$

Переходя теперь къ точкѣ $z=\infty$, мы, при помощи соотношеній между показательными и тригонометрическими функціями, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec}^2 z &= \frac{1}{\sin^2 z}=-\frac{4}{\left[e^{(x+yi)i}-e^{-(x+yi)i}\right]^2}=\\ &=-\frac{4}{\left[\left(e^{-y}-e^{+y}\right)\cos x+i\left(e^{-y}+e^{+y}\right)\sin x\right]^2};\end{aligned}\right\} \ldots \ldots (11)$$

модуль знаменателя этого выраженія равенъ

$$\left.\begin{aligned}\left(e^{-y}-e^{+y}\right)^2\cos^2 x+\left(e^{-y}+e^{+y}\right)^2\sin^2 x=\\ =e^{-2y}+e^{+2y}-2\cos 2x;\end{aligned}\right\} \ldots \ldots (12)$$

съ увеличеніемъ x и y до ∞ послѣдній членъ будетъ колебаться въ конечныхъ предѣлахъ -2 и $+2$, тогда какъ изъ первыхъ двухъ, (смотря по знаку y), одинъ будетъ стремиться къ нулю, а другой рости до ∞; слѣдовательно вся сумма будетъ рости до ∞, и потому модуль $\operatorname{cosec}^2 z$ будетъ стремиться къ нулю. Это же будетъ и при x конечномъ, а $y=\infty$.

Наименьшее значеніе функціи

$$\varphi(y)=\frac{e^{-2y}+e^{+2y}}{2}, \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

будетъ при $y=0$, какъ извѣстно, и будетъ $=1$; а потому при $y>0$ будетъ

$$\varphi(y)>1; \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

слѣдовательно выраженіе (12) при y конечномъ и $x=\infty$ будетъ конечно и отлично отъ нуля; а потому и модуль ($\operatorname{cosec}^2 z$) будетъ конечная величина; если же $y=0$, то выраженіе (12) принимаетъ видъ:

$$2(1-\cos 2x)=2^2\sin^2 x, \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

и слѣдовательно

$$\text{мод. } \operatorname{cosec}^2 z = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

а это будетъ обращаться въ ∞^2 при $x = k\pi$, однако такъ, по (10), что будетъ

$$\text{пред. } \left(\operatorname{cosec}^2 x - \frac{1}{(x-k\pi)^2}\right)_{x=0} = \frac{1}{3}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

какъ велико бы ни было цѣлое число $|k|$.

2. Составимъ теперь выраженіе:

$$f(z) = \operatorname{cosec}^2 z - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{(z-k\pi)^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ рядъ, какъ извѣстно, есть безусловно-сходящійся; это слѣдовательно будетъ аналитическая функція; она будетъ періодическая функція съ періодомъ π, ибо первый членъ уже имѣетъ этотъ періодъ, а въ рядѣ отъ измѣненія z на $z+\pi$ всѣ члены подвинутся на одинъ рангъ влѣво, отъ чего сумма не измѣнится по безконечности ея предѣловъ. При z конечномъ и отличномъ отъ $l\pi$, функція $f(z)$ будетъ конечна и непрерывна; но тоже будетъ и при $z = l\pi$. Такъ какъ

$$f(z + l\pi) = f(z), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

то достаточно разсмотрѣть случай $l = 0$. Въ этомъ случаѣ представимъ функцію $f(z)$ такимъ образомъ:

$$f(z) = \operatorname{cosec}^2 z - \frac{1}{z^2} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{(z-k\pi)^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

гдѣ значекъ у суммы напоминаетъ, что k не должно уже полагать $=0$; полагая здѣсь $z=0$, по (6) пред. §, получимъ:

$$f(0) = \frac{1}{3} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{(k\pi)^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

что есть величина конечная, ибо сумма, сюда входящая, представляетъ безусловно сходящійся рядъ, какъ и сумма въ (3).

Если $z = x + yi$, гдѣ y конеченъ, но не $=0$, а x стремится къ ∞, то $\operatorname{cosec}^2 z$ будетъ конечная величина, тогда какъ сумма въ (1) будетъ стремиться къ нулю, ибо каждый членъ ея отдѣльно стремится къ 0^2; если x и y оба стремятся къ ∞, то оба члена въ выраженіи (1) порознь стремятся къ нулю, какъ относительно перваго мы видѣли въ пред. §, а относительно второго прямо видно, ибо каждый членъ стремится къ 0^2. Если же $y=0$, а x стремится къ ∞, то всё-таки выраженіе (1) будетъ стремиться къ конечной величинѣ на основаніи (17), ибо остальные члены дадутъ конечную сумму. Стало быть и тутъ постоянно безконечности второго члена нашего выраженія компенсируютъ безконечности перваго. Слѣдовательно $f(z)$ вездѣ конечна; но функція, вездѣ на всей неограниченой плоскости (z) однозначная, конечная и непрерывная, есть постоянная; слѣдовательно:

$$f(z)=C=f(0)\,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

но какъ при $z=x+\infty i$ (x какое угодно), мы видѣли, $f(z)=0$, то $C=0$; слѣдовательно:

$$f(z)=f(0)=0\,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

отсюда во первыхъ:

$$\operatorname{cosec}^2 z=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{(z-k\pi)^2}\,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

во вторыхъ:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{(k\pi)^2}=\frac{1}{3}\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

или

$$\sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2}=\frac{\pi^3}{6}\,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

равенство (7) представляетъ искомое разложеніе $\operatorname{cosec}^2 z$.

3. Оно безусловно-сходящееся, а потому можетъ быть интегрировано отъ z_0 до z по пути непроходящему чрезъ $z=l\pi$; помножая на $-dz$ и интегрируя, получимъ, такъ какъ

$$\int_{z_0}^{z} -\operatorname{cosec}^2 z\,dz=\int_{z_0}^{z} -\frac{dz}{\sin^2 z}=\operatorname{cotg} z-\operatorname{cotg} z_0\,, \quad \ldots \ldots (1)$$

слѣдующее:

$$\operatorname{cotg} z-\operatorname{cotg} z_0=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \left\{\frac{1}{z-k\pi}-\frac{1}{z_0-k\pi}\right\} \quad \ldots \ldots (2)$$

или

$$\operatorname{cotg} z=\operatorname{cotg} z_0-\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left\{\frac{1}{z-k\pi}-\frac{1}{z_0-k\pi}\right\} \ldots (3)$$

Но по извѣстнымъ правиламъ найдемъ:

$$\text{пред.}\left(\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}\right)_{z=0} = 0\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

слѣдовательно: въ (3) можно положить $z_0 = 0$, и мы получимъ

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}\left\{\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Полагая въ (3) $z_0 = \frac{\pi}{2}$, и $\frac{\pi}{2} - z$ вмѣсто z, получимъ:

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}\left\{\frac{1}{-z - (2k-1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k-1)\frac{\pi}{2}}\right\} \quad . \; . \quad (6)$$

или, такъ какъ $-k$ пробѣгаетъ тѣже значенія, что и $+k$:

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}\left\{\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2} - z} - \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}; \quad . \; . \quad (7)$$

или, подводя первыя два члена подъ знакъ $\sum$, такъ какъ они отвѣчаютъ предположенію $k = 0$, и отбрасывая поэтому значекъ ($'$):

$$\operatorname{tg} z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{k}\left\{\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2} - z} - \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

4. Перенося членъ $\frac{1}{z}$ въ (5) пред. § налѣво, получимъ функцію

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}\left\{\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

которая при $z = 0$ по доказанному въ томъ § обращается въ нуль, слѣдовательно конечна; и какъ во второй части рядъ безусловно-сходящійся, то можно (1) интегрировать отъ 0; сдѣлавъ это, получимъ, такъ какъ:

$$\int_0^z\left(\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}\right)dz = \int_0^z\left(\frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z}\right)dz = \log\left(\frac{\sin z}{z}\right)_0^z = \log\frac{\sin z}{z}\,, \quad . \quad (2)$$

$$\left[\text{ибо}\left(\log\frac{\sin z}{z}\right)_{z=0}=\log\left(\frac{\sin z}{z}\right)_{z=0}=\log 1=0\right]\ldots\ldots(3)$$

слѣдующее:

$$\log\frac{\sin z}{z}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left\{\log\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)+\frac{z}{k\pi}\right\};\ \ldots\ldots\ (4)$$

и переходя отъ log къ числу и умножая на z:

$$\sin z=z\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)e^{\frac{z}{k\pi}}\ \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Помножая (8) пред. § на $-dz$ и интегрируя отъ 0, (такъ какъ обѣ части конечны для $z=0$) и имѣя въ виду, что

$$\int_0^z -\operatorname{tg} z dz=\int_0^z\frac{d\cos z}{\cos z}=\Big(\log\cos z\Big)_0^z=\log\cos z,\ \ldots\ (6)$$

(такъ какъ $\log\cos 0=\log 1=0$), мы получимъ:

$$\log\cos z=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left\{\log\left(1-\frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}\ \ldots\ (7)$$

и переходя отъ log къ числу:

$$\cos z=\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_k\left(1-\frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right)e^{\frac{z}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}}\ \ldots\ldots\ (8)$$

5. Что касается до $\operatorname{cosec} z$ и $\sec z$, то разложенiе перваго легко получается изъ найденнаго, а второго найдется, перемѣняя въ первомъ z на $\frac{\pi}{2}-z$. Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right\};\ \ldots\ldots\ (1)$$

вставляя сюда разложенiя $\operatorname{cotg}\frac{z}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ по формуламъ (5) и (8) пред. §, будемъ имѣть:

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}\left\{\frac{2}{z-2k\pi} + \frac{2}{2k\pi}\right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{k}\left\{\frac{2}{z-(2k+1)\pi} + \frac{2}{(2k+1)\pi}\right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}\left\{\frac{1}{z-2k\pi} + \frac{1}{2k\pi}\right\} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}\left\{\frac{1}{z-(2k+1)\pi} + \frac{1}{(2k+1)\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}(-1)^k\left\{\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right\};$$

итакъ

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}(-1)^k\left\{\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right\}. \quad \ldots\ldots (2)$$

Перемѣняя здѣсь z на $z - \frac{\pi}{2}$, получимъ:

$$-\sec z = \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}(-1)^k\left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi}\right\}; \quad \ldots (3)$$

полагая здѣсь $z = 0$, мы получимъ, умножая всё на -1:

$$1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}(-1)^k\left\{\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{k\pi}\right\}; \quad \ldots\ldots (4)$$

складывая это съ (3), получимъ

$$1 - \sec z = \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{k}(-1)^k\left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}; \quad (5)$$

подводя всё направо подъ одну сумму, получимъ:

$$1 - \sec z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{k}\left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}, \quad \ldots\ldots (6)$$

откуда будемъ имѣть:

$$\sec z = 1 + \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{k+1}\left\{\frac{1}{z-(2k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right\}; \quad \ldots (7)$$

что представляетъ разложеніе $\sec z$ по теоремѣ Миттагъ-Леффлера.

6. Переходимъ теперь къ эллиптическимъ функціямъ Вейерштрасса, и для облегченія пониманія дальнѣйшаго, напомнимъ ихъ опредѣленія и нѣкоторыя свойства.

Четная функція $\wp(u)$, опредѣляемая дифференціальнымъ уравненіемъ

$$\wp'(u) = -\sqrt{4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

и условіемъ обращаться въ ∞ при $u = 0$, слѣдовательно представляющаяся обратною интегралу

$$u = \int_s^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_2}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$s = \wp(u), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \wp(u + 2\omega) &= \wp(u); \\ \wp(u + 2\omega') &= \wp(u), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

выражающимъ ея двоякую періодичность.

Здѣсь, обозначая чрезъ e_1, e_2, e_3 корни полинома

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

стоящаго подъ знакомъ радикала въ интегралѣ (2), величины ω и ω', а также

$$\omega'' = \omega + \omega' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

опредѣляются интегралами:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} \\ \omega'' &= \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} \\ \omega' &= \int_{e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

при чемъ предполагается, что

$$\Re(e_1) \geqq \Re(e_2) \geqq \Re(e_3), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

обозначая знакомъ $\Re(e)$ вещественную часть e. Подобно равенствамъ (4) имѣется равенство:

$$\wp(u + 2\omega'') = \wp(u), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

которое однако въ силу (6) есть слѣдствіе (4), равно какъ и другое, болѣе общее:

$$\wp(u+2\tilde{\omega})=\wp(u)\,, \qquad (10)$$

гдѣ

$$\tilde{\omega}=m\omega+n\omega'\,, \qquad (11)$$

при m и n цѣлыхъ числахъ, положительныхъ или отрицательныхъ. Полагая въ (10)

$$u=0\,,$$

согласно опредѣленію функціи $\wp(u)$, будемъ имѣть:

$$\wp(2\tilde{\omega})=\wp(0)=\infty. \qquad (12)$$

Построивъ точки $+\omega$, $-\omega$; также $+\omega'$, $-\omega'$, проведемъ чрезъ первыя прямыя, параллельныя направленію ω', чрезъ вторыя прямыя, параллельныя направленію ω; мы получимъ первый паралелограмъ періодовъ функціи $\wp(u)$: въ центрѣ его функція $\wp(u)$ обращается въ ∞^2; во всѣхъ же прочихъ точкахъ конечна, однозначна и непрерывна. Проведя прямыя, параллельныя сторонамъ этого перваго паралелограмма въ такихъ же соотвѣтственно направленіяхъ и на такихъ же разстояніяхъ одна отъ другой, мы разобьемъ всю плоскость (u) на равныя первому паралелограммы, въ которыхъ картина значеній функціи $\wp(u)$ будетъ повторяться; въ частности, какъ то говоритъ (12), въ центрахъ ихъ функція $\wp(u)$ будетъ $=\infty^2$.

7. Вблизи значенія $u=0$, функція $\wp(u)$ разлагается въ такой рядъ:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+u^2\mathfrak{P}(u^2)\,, \qquad (1)$$

гдѣ $\mathfrak{P}(z)$ есть рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣнной z. Изъ (1) имѣемъ:

$$\text{пред.}\left\{u^2\wp(u)\right\}_{u=0}=+1. \qquad (2)$$

$$\text{пред.}\left\{\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right\}_{u=0}=0. \qquad (3)$$

Полагая въ (10) $u+2\tilde{\omega}=u'$, получимъ:

$$\wp(u')=\wp(u)\,; \qquad (4)$$

помножая это на $(u'-2\tilde{\omega})^2=u^2$, и полагая затѣмъ $u=0$, слѣдовательно $u'=2\tilde{\omega}$, по (2) будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})^2\wp(u')\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=\text{пред.}\left\{u^2\wp(u)\right\}_{u=0}=+1;\ldots\ldots(5)$$

точно также, вычитая изъ (4)

$$\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}=\frac{1}{u^2},$$

и полагая $u=0$, мы получимъ по (3):

$$\text{пред.}\left\{\wp(u')-\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=\text{пред.}\left\{\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right\}_{u=0}=0.\ \ .\ .\ (6)$$

8. Производныя отъ $\wp(u)$ будутъ имѣть тѣже періоды и тѣже безконечности, но только порядковъ на единицу увеличивающихся съ порядкомъ производной. Дифференцируя (1) пред. §, будемъ имѣть:

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+u\mathfrak{P}_1(u^2),\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

гдѣ $\mathfrak{P}_1(u^2)$ обозначаетъ рядъ расположенный по положительнымъ степенямъ u^2. Полагая здѣсь $u=u'-2\tilde{\omega}$, мы будемъ имѣть:

$$\wp'(u'-2\tilde{\omega})=\wp'(u')=-\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}+(u'-2\tilde{\omega})\mathfrak{P}_1(u'-2\tilde{\omega}),\ .\ (2)$$

откуда получимъ:

$$\text{пред.}\left[\wp'(u')+\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}\right]_{u'=2\tilde{\omega}}=0.\ \ldots\ldots(3)$$

9. Напомнивъ это, составимъ выраженіе:

$$f(u)=\wp'(u)+\sum_{m,n\ -\infty}^{+\infty}\frac{2}{(u-w)^3},\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

гдѣ

$$w=2m\omega+2n\omega',\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

при m и n пробѣгающихъ независимо одно отъ другого весь рядъ цѣлыхъ чиселъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Двойной безконечный рядъ во второй части (1) есть безусловно-сходящійся рядъ {см. Jordan. Cours d'Analyse de l'Ecole polytechique T. I. § 177 и слѣд. p. 160. Paris Gauthier-Villars. 1882 г.}, и потому представляетъ однозначную, конечную и непрерывную функцію, которая только въ точкахъ

$$u=2\tilde{\omega},$$

обращается въ ∞^3; но въ силу (3) § 10 функція $f'(u)$ не будетъ обращаться въ безконечность, какъ увидимъ далѣе. Функція $f'(u)$ имѣетъ тѣже періоды, какъ и функція $\wp(u)$; дѣйствительно $\wp'(u)$ имѣетъ тѣже періоды, и рядъ тоже, ибо, при перемѣнѣ u на $u+2\omega$, m переходитъ въ $m-1$, которое пробѣгаетъ, при измѣненіи m отъ $-\infty$ до $+\infty$, тотъ же рядъ значеній, какъ и m; точно также перемѣна u на $u+2\omega'$ измѣняетъ n на $n-1$ съ такими же послѣдствіями: въ результатѣ является только передвиженіе всѣхъ членовъ ряда на одинъ рангъ по направленію къ $-\infty$. Итакъ функція $f'(u)$ удовлетворяетъ слѣдующимъ двумъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} f'(u+2\omega) &= f'(u) \\ f'(u+2\omega') &= f'(u) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

а слѣдовательно и болѣе общему, изъ нихъ выводимому:

$$f'(u+2\bar{\omega}) = f'(u). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Функція $f'(u)$ такимъ образомъ есть двояко-періодическая функція, которая внутри своего параллелограмма періодовъ нигдѣ не обращается въ безконечность, какъ было уже замѣчено. На основаніи (5) достаточно провѣрить это для перваго параллелограмма, для котораго представимъ её такъ:

$$f'(u) = \wp'(u) + \frac{2}{u^3} + \sum_{m,n \atop -\infty}^{+\infty}{}' \frac{2}{(u-\omega)^3}, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

гдѣ знакъ ($'$) у суммы показываетъ, что комбинація ($m=0$, $n=0$) значеній m и n должна быть исключена изъ числа тѣхъ, на которыя распространяется $\sum$; полагая теперь $u=0$, по (3) § (10) (для $m=0$, $n=0$), будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left(\wp'(u) + \frac{2}{u^3}\right)_{u=0} = 0; \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

въ суммѣ же

$$-\sum_{m,n \atop -\infty}^{+\infty}{}' \frac{2}{\omega^3}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

въ которую обратится сумма въ (6) при $u=0$, всѣ члены по два сократятся между собою, [именно членъ ($m=\mu$, $n=\nu$) съ членомъ ($m=-\mu$, $n=-\nu$)]. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\text{пред.}\, f'(u)_{u=0} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Итакъ дѣйствительно въ точкахъ, въ которыхъ выраженіе (1) могло бы обращаться въ ∞, оно имѣетъ конечную величину; слѣдовательно оно есть постоянное, и именно нуль по (9); т. е.

$$f(u) = \wp'(u) + \frac{2}{u^3} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{2}{(u-w)^3} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

откуда находимъ:

$$\wp'(u) + \frac{2}{u^3} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \frac{-2}{(u-w)^3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Сумма второй части есть безусловно-сходящійся рядъ, обращающійся въ нуль при $u = 0$, равно какъ и лѣвая часть по (7), а потому это равенство можетъ быть интегрировано отъ $u = 0$ до u; сдѣлавъ это, получимъ:

$$\wp(u) - \frac{1}{u^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\};$$

отсюда получается такое разложеніе функціи $\wp(u)$ на частныя дроби, отвѣчающія ея безконечностямъ, разложеніе по теоремѣ Миттагъ-Леффлера:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ опять рядъ будетъ безусловно-сходящійся.

10. Нетрудно вывести двоякую періодичность функціи $\wp(u)$ изъ этого ея разложенія. Перемѣняя u одинъ разъ на $u + \omega$, другой на $u - \omega$, и вычитая послѣдній результатъ изъ перваго, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\wp(u+\omega) - \wp(u-\omega) = \frac{1}{(u+\omega)^2} - \frac{1}{(u-\omega)^2} + \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{ \frac{1}{[u-(w-\omega)]^2} - \frac{1}{[u-(w+\omega)]^2} \right\}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

первый членъ получается изъ стоящаго подъ знакомъ суммы чрезъ положеніе $m = 0$ и $n = 0$; а потому внеся его подъ этотъ знакъ и отбрасывая слѣдовательно значекъ ($'$), будемъ имѣть:

*

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+\omega)-\wp(u-\omega)&=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{[u-(w-\omega)]^2}-\frac{1}{[u-(w+\omega)]^2}\right\}=\\ &=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{[u-(2m-1)\omega-2n\omega']^2}-\frac{1}{[u-(2m+1)\omega-2n\omega']^2}\right\}=0\,,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ибо $2m+1$ получается изъ $2m-1$ чрезъ перемѣну m на $m+1$, слѣдовательно вторые члены, съ $(-)$, будутъ не что иное, какъ первые, передвинутые на одинъ рангъ въ сторону къ $+\infty$. Итакъ

$$\wp(u+\omega)-\wp(u-\omega)=0\,; \quad \dots\dots \quad (3)$$

отсюда, перемѣняя u на $u+\omega$:

$$\wp(u+2\omega)=\wp(u)\,. \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Точно также выведется равенство:

$$\wp(u+2\omega')=\wp(u)\,, \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

и слѣдовательно и

$$\wp(u+2\omega'')=\wp(u)\,, \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

такъ какъ

$$\omega''=\omega+\omega'\,,$$

и болѣе общее

$$\wp(u+2\varpi)=\wp(u)\,. \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

11. Вычитая равенство (12) § 10 изъ тождества

$$c=c\,,$$

получимъ

$$c-\wp(u)=c-\frac{1}{u^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{-1}{(u-w)^2}+\frac{1}{w^2}\right\} \quad \dots \quad (1)$$

такъ какъ рядъ направо есть безусловно-сходящійся, то его можно интегрировать, и какъ резидю каждаго члена $=0$, то путь интегрированія подчиняется только одному условію—не проходить чрезъ точки:

$$u=2\varpi\,, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

когда интегралъ теряетъ смыслъ. Мы, помноживъ обѣ части равенства на $\frac{1}{2}\,du$, проинтегрируемъ его отъ $-u$ до $+u$ по пути, подчиненному только этому условію; чрезъ это получимъ функцію, которую означимъ чрезъ $\zeta(u)$, разложенную на частныя дроби:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)&=\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\left(c-\wp(u)\right)du=\\&=cu+\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{u+w}+\frac{2u}{w^2}\right\};\end{aligned}\right\}\quad . \ . \ . \ (3)$$

это равенство содержитъ заразъ и опредѣленіе функціи $\zeta(u)$ интеграломъ, и ея разложеніе на частныя дроби, которое однако еще не окончательное, на которомъ мы остановимся. Легко видѣть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{u+w}+\frac{2u}{w^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\left[\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right]+\left[\frac{1}{u+w}-\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u+w}-\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}=$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\};$$

гдѣ мы раздѣлили сумму второй строки на двѣ въ третьей, ибо каждая изъ нихъ есть безусловно-сходящаяся (*Jordan*, l. c.); вторая же при этомъ оказалась равною первой, ибо выводится изъ нея чрезъ перемѣну m и n на $-m$ и $-n$, но какъ первыя, такъ и вторыя пробѣгаютъ весь рядъ цѣлыхъ чиселъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, вторыя только въ обратномъ порядкѣ, когда m и n пробѣгаютъ этотъ рядъ чиселъ. На основаніи этого (3) окончательно такъ перепишется:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u)&=\frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}\left(c-\wp(u)\right)du=\\&=cu+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\},\end{aligned}\right\}\quad . \ . \ . \ . \ (4)$$

гдѣ мы имѣемъ разложеніе функціи $\zeta(u)$ на частныя дроби, отвѣчающія ея безконечностямъ по теоремѣ Миттагъ-Леффлера. Опредѣленіе функціи $\zeta(u)$ опредѣленнымъ интеграломъ было найдено впервые нами; (Вейерштрассъ её опредѣляетъ иначе); оно имѣетъ то достоинство, что изъ формы интеграла прямо видна нечетность функціи; ибо если въ предѣлахъ поставить $-u$ вмѣсто u, то нижній станетъ верхнимъ, а верхній нижнимъ, слѣдовательно будетъ

$$\zeta(-u) = -\zeta(u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

по извѣстному свойству опредѣленныхъ интеграловъ мѣнять знакъ отъ перестановки предѣловъ верхняго съ нижнимъ. Изъ этого опредѣленія видна и однозначность функціи $\zeta(u)$, ибо residu функціи $[c - \wp(u)]$ равенъ нулю. Это-же явствуетъ и изъ разложенія функціи на частныя дроби. Относительно нечетности: если перемѣнимъ въ этомъ разложеніи m на $-m$, n на $-n$, то каждый членъ перейдетъ въ другой, для котораго m и n, имѣютъ противоположные знаки, чѣмъ въ этомъ членѣ.

Полагая здѣсь $u = \omega$, ω', ω'' получимъ три формулы, которыя можно обнять въ одной слѣдующей:

$$\left.\begin{aligned} \eta^{(i)} = \zeta(\omega^{(i)}) &= \frac{1}{2}\int_{-\omega^{(i)}}^{+\omega^{(i)}} \Big(c - \wp(u)\Big) du = \\ &= c\omega^{(i)} + \frac{1}{\omega^{(i)}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{\frac{-1}{w - \omega^{(i)}} + \frac{1}{w} + \frac{\omega^{(i)}}{w^2}\right\}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

если условиться, что

$$\left.\begin{aligned} \omega^{(1)} &= \omega; \quad \omega^{(2)} = \omega''; \quad \omega^{(3)} = \omega', \\ \eta^{(1)} &= \eta; \quad \eta^{(2)} = \eta''; \quad \eta^{(3)} = \eta'. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Эти величины η, η', η'' суть модули періодичности (которая второго рода) функціи $\zeta(u)$: при измѣненіи u на $u + 2\omega^{(i)}$ функція $\zeta(u)$ получаетъ конечное приращеніе $2\eta^{(i)}$; т. е.

$$\zeta(u + 2\omega^{(i)}) = \zeta(u) + 2\eta^{(i)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Это можно вывести изъ обоихъ опредѣленій функціи $\zeta(u)$, какъ съ помощію опредѣленнаго интеграла, такъ и съ помощію разложенія ея на частныя дроби, какъ то мы покажемъ въ слѣдующихъ §§.

12. Вычтя равенство (3) § 11 изъ тождества:

$$c - c = 0,$$

получимъ:

$$c - \wp(u + \omega) - (c - \wp(u - \omega)) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (1)$$

помножая это равенство на du и интегрируя отъ 0 по пути, непроходящему чрезъ полюсы функціи $\wp(u)$, т. е. точки 2ϖ, мы получимъ:

$$\int_0^u [c-\wp(u+\omega)]du - \int_0^u [c-\wp(u-\omega)]du = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

или

$$\int_\omega^{u+\omega} [c-\wp(v)]dv - \int_{-\omega}^{u-\omega} [c-\wp(v)]dv = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Если положимъ:

$$\int_{u_0}^u [c-\wp(u)]du + C = Z(u)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

какъ опредѣленіе функціи $Z(u)$, то (3) можно такъ представить:

$$Z(u+\omega) - Z(\omega) - Z(u-\omega) + Z(-\omega) = 0\,,$$

или

$$Z(u+\omega) - Z(u-\omega) = Z(\omega) - Z(-\omega). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Это равенство будетъ имѣть мѣсто при всякомъ C; но каково-бы ни было u_0, всегда можно C выбрать такъ, что $Z(u)$ обратится въ нашу нечетную функцію $\zeta(u)$. Дѣйствительно, тогда должно быть:

$$Z(-u) = -Z(u)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

или

$$\int_{u_0}^{-u} (c-\wp(u))\,du + C = -\left(\int_{u_0}^u (c-\wp(u))du + C\right); \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

откуда

$$C = -\frac{1}{2}\left(\int_{u_0}^{-u} (c-\wp(u))du + \int_{u_0}^u (c-\wp(u))du\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

или

$$C = \frac{1}{2}\left(-\int_{u_0}^{-u} (c-\wp(u))du + \int_u^{u_0} (c-\wp(u))du\right); \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

перемѣняя u на $-u$ въ первомъ интегралѣ, мы получимъ:

$$C = \frac{1}{2}\left\{\int_{-u_0}^u [c-\wp(u)]du + \int_u^{u_0} [c-\wp(u)]du\right\} = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{+u_0} [c-\wp(u)]du. \; (10)$$

Внося это въ (4), будемъ имѣть: нечетная функція

$$\left.\begin{aligned} Z(u) &= \int_{u_0}^{u}[c-\wp(u)]du+\frac{1}{2}\int_{-u_0}^{+u_0}[c-\wp(u)]du= \\ &= \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u}[c-\wp(u)]du+\frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u}[c-\wp(u)]du; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . (11)$$

мѣняя въ первомъ интегралѣ u на $-u$, мы получимъ: нечетная функція

$$\left.\begin{aligned} Z(u) &= -\frac{1}{2}\int_{-u_0}^{-u}[c-\wp(u)]du+\frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u}[c-\wp(u)]du= \\ &= \frac{1}{2}\int_{-u}^{+u}[c-\wp(u)]du=\zeta(u), \end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

т. е. это и будетъ наша $\zeta(u)$. Слѣдовательно и для $\zeta(u)$ будетъ имѣть мѣсто равенство (5); но какъ по нечетности этой функціи:

$$\zeta(-\omega)=-\zeta(\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (13)$$

и $\zeta(\omega)=\eta$, то оно приметъ для нея такой видъ:

$$\zeta(u+\omega)-\zeta(u-\omega)=2\eta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (14)$$

откуда, мѣняя u на $u+\omega$:

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Точно также найдемъ и слѣдующія равенства:

$$\zeta(u+2\omega')=\zeta(u)+2\eta'; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (16)$$

$$\zeta(u+2\omega'')=\zeta(u)+2\eta''. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (17)$$

Если въ (16) перемѣнить u на $u+2\omega$, и принять во вниманіе, что $\omega+\omega'=\omega''$, то мы будемъ имѣть по (15):

$$\zeta(u+2\omega'')=\zeta(u)+2\eta+2\eta'; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (18)$$

сличая это съ (17), въ виду однозначности функціи $\zeta(u)$ находимъ

$$\eta''=\eta+\eta'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

13. Чтобы вывести тоже съ помощію разложенія на частныя дроби, перемѣнимъ въ (4) § 12 u на $u\pm\omega$; получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta(u\pm\omega)=c(u\pm\omega)+\frac{1}{u\pm\omega}+\\&+\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left\{\frac{1}{u-(w\mp\omega)}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\};\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(1)$$

полагая здѣсь $u=0$, получимъ по (6) § 12:

$$\pm\eta=\pm c\omega\pm\frac{1}{\omega}+\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left\{-\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{1}{w}\pm\frac{\omega}{w^2}\right\};\quad\ldots\ldots(2)$$

вычитая это изъ предыдущаго, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta(u\pm\omega)\mp\eta=cu+\frac{1}{u\pm\omega}\mp\frac{1}{\omega}+\\&+\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left\{\frac{1}{u-(w\mp\omega)}+\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{u}{w^2}\right\};\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(3)$$

придавая и отнимая въ скобкахъ $\{\}$ по $\dfrac{u}{(w\mp\omega)^2}$, мы можемъ этому разложенію дать такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta(u\mp\omega)\mp\eta=cu+\frac{1}{u\pm\omega}\mp\frac{1}{\omega}+\\&+\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left\{\frac{1}{u-(w\mp\omega)}+\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{u}{(w\mp\omega)^2}\right\}-\\&-u\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left\{\frac{1}{(w\mp\omega)^2}-\frac{1}{w^2}\right\},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(4)$$

гдѣ мы могли отдѣлить послѣднюю сумму отъ первой, ибо обѣ безусловно-сходящіяся. Придавая и отнимая $\dfrac{u}{\omega^2}$, мы можемъ, внося членъ:

$$\frac{1}{u\pm\omega}\mp\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}$$

подъ знакъ $\sum'$ и отбрасывая значекъ ($'$) у $\sum$, такъ какъ этотъ членъ получается изъ общаго члена суммы, полагая $m=0$, $n=0$, дать такой видъ этому равенству:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u\pm\omega)\mp\eta&=u\left(c-\frac{1}{\omega^2}-\sum_{m,n}{\vphantom{\sum}}_{-\infty}^{+\infty}{}'\left\{\frac{1}{(w\mp\omega)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}\right)+\\&+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{u-(w\mp\omega)}+\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{u}{(w\mp\omega)^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (5)$$

Но полагая въ (12) § 10 $u=\pm\omega$ и имѣя въ виду (7) § 8, мы будемъ имѣть:

$$e_1=\wp(\pm\omega)=\frac{1}{\omega^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{(w\mp\omega)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}; \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

на основаніи этого (5) замѣнится такимъ:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(u\pm\omega)\mp\eta&=u(c-e_1)+\\+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}&\left\{\frac{1}{u-(w\mp\omega)}+\frac{1}{w\mp\omega}+\frac{u}{(w\mp\omega)^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Здѣсь $w\mp\omega=(2m\mp1)\omega+2n\omega$; но какъ $2m+1$ пробѣгаетъ тотъ же рядъ нечетныхъ цѣлыхъ чиселъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, какъ и $2m-1$, то вторая часть можетъ быть написана съ однимъ какимъ нибудь знакомъ, напр. съ верхнимъ, и мы будемъ имѣть тогда:

$$\zeta(u\pm\omega)\mp\eta=u(c-e_1)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w_1}+\frac{1}{w_1}+\frac{u}{w_1{}^2}\right\} \quad . \; . \quad (8)$$

гдѣ

$$w_1=w-\omega=(2m-1)\,\omega+2n\omega'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Изъ (8) слѣдуетъ, что

$$\zeta(u+\omega)-\eta=\zeta(u-\omega)+\eta\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

откуда легко получимъ:

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Точь въ точь такимъ-же путемъ придемъ къ слѣдующимъ формуламъ:

$$\zeta(u\pm\omega')\mp\eta'=u(c-e_3)+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n}\left\{\frac{1}{u-w_3}+\frac{1}{w_3}+\frac{u}{w_3{}^2}\right\}, \quad . \quad (12)$$

гдѣ

$$w_3 = 2m\omega + (2n-1)\omega', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

и

$$\zeta(u \pm \omega'') \mp \eta'' = u(c - e_2) + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \left\{ \frac{1}{u - w_2} + \frac{1}{w_2} + \frac{u}{w_2{}^2} \right\}, \quad . \quad . \quad (14)$$

гдѣ

$$w_2 = (2m-1)\omega + (2n-1)\omega', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

и ихъ слѣдствіямъ:

$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\zeta(u + 2\omega'') = \zeta(u) + 2\eta''. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Равенства (12), (16) и (17), изъ которыхъ послѣднее есть слѣдствіе первыхъ двухъ, показываютъ измѣненіе $\zeta(u)$ при переходѣ u въ соотвѣтственную точку одного изъ сосѣднихъ параллелограмовъ періодовъ функціи $\wp(u)$. Изъ (11) и (16) легко получается болѣе общая:

$$\zeta(u + 2\tilde{\omega}) = \zeta(u) + 2\tilde{\eta}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

гдѣ

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

и

$$\tilde{\eta} = m\eta + n\eta'.$$

Формулы (8), (12) и (14) даютъ разложеніе на частныя дроби по теоремѣ Миттагъ-Леффлера функцій, получающихся изъ $\zeta(u)$ чрезъ измѣненіе u на одинъ изъ полуперіодовъ.

14. Всѣ эти разложенія, сейчасъ упомянутыя, равно какъ и разложеніе функціи $\zeta(u)$, [(4) § 11], суть безусловно-сходящіяся, а потому могутъ быть интегрированы; это дастъ результаты фундаментальнаго значенія въ теоріи эллиптическихъ функцій. Начнемъ съ функціи $\zeta(u)$. Помножая (4) § 12 на du и интегрируя отъ u_0 до u по пути, непроходящему чрезъ полюсы $\zeta(u)$, получимъ новую функцію, которую означимъ чрезъ $Y_0(u)$, и ея разложеніе въ рядъ:

$$\left. \begin{aligned} Y_0(u) &= \int_{u_0}^{u} \zeta(u)du = \\ &= \frac{1}{2}\, c\,(u^2 - u_0{}^2) + \log u - \log u_0 + \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n} \left\{ \log(u - w) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2} - \right. \\ &\left. - \left(\log(u_0 - w) + \frac{u_0}{w} + \frac{1}{2}\frac{u_0{}^2}{w^2} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

или, придавая и отнимая $\log(-w)$ въ скобкахъ $\{\}$:

$$\left.\begin{aligned} Y_0(u) = \int_{u_0}^{u} \zeta(u)du = \frac{1}{2}\, c\,(u^2 - u_0{}^2) + \log u - \log u_0 + \\ + \sum_{m,n}{}^{'}{}_{-\infty}^{+\infty} \left\{\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right\} - \\ - \sum_{m,n}{}^{'}{}_{-\infty}^{+\infty} \left\{\log\left(1 - \frac{u_0}{w}\right) + \frac{u_0}{w} + \frac{1}{2}\frac{u_0{}^2}{w^2}\right\}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ мы могли выдѣлить въ особую сумму зависящее отъ u_0 на томъ основаніи, что обѣ суммы безусловно-сходящіяся. Дѣйствительно, по формулѣ Маклореня имѣемъ:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3\,\frac{(1-\theta)^2}{1+\theta x}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

перемѣняя x на $-x$ и перенося первыя два члена налѣво, будемъ имѣть:

$$\log(1-x) + x + \frac{x^2}{2} = -\,x^3\,\frac{(1-\theta)^2}{1-\theta x}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

полагая здѣсь $x = \frac{u}{w}$, получимъ:

$$\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2} = -\left(\frac{u}{w}\right)^3 \frac{(1-\theta)^2}{1 - \theta\,\frac{u}{w}}\,; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

модуль этого выраженія будетъ:

$$< \left(\frac{\text{мод.}\,u}{\sqrt{(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2}}\right)^3 \frac{1}{1 - \dfrac{\text{мод.}\,u}{\sqrt{(2ma+2ma')^2+(2mb+2nb')^2}}}\,;(6)$$

(если $\omega = a + b\sqrt{-1}$, $\omega' = a' + b'\sqrt{-1}$), или

$$< \frac{L}{[(2ma+2na')^2 + (2mb+2nb')^2]^{\frac{3}{2}}}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ L такая конечная величина, что

$$\frac{(\text{мод. } u)^3}{1-\dfrac{(\text{мод. } u)}{\sqrt{(2ma+2na')^2+(2mb+2nb')^2}}} < L, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (8)$$

что всегда будетъ возможно сдѣлать, такъ какъ лѣвая часть конечная для всякихъ цѣлыхъ значеній m и n, если только u не совпадаетъ ни съ одною изъ точекъ 2ϖ, что мы и не можемъ предположить; а отсюда по Jordan (l. c.) выведемъ сходимость ряда модулей членовъ нашего ряда:

$$\sum_{m,n}{}' {}_{-\infty}^{+\infty} \left\{\log\left(1-\frac{u}{w}\right)+\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right\}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

а слѣдовательно и безусловную сходимость этого ряда.—На основаніи этого мы можемъ собрать въ одно цѣлое всѣ члены, содержащіе u_0, и положивъ по придачѣ къ обѣимъ частямъ (2) по c' и перенесеніи зависящаго отъ u_0 налѣво:

$$C_1 = \frac{c}{2} u_0{}^2 + c' + \log u_0 + \sum_{m,n}{}' {}_{-\infty}^{+\infty} \left\{\log\left(1-\frac{u_0}{w}\right)+\frac{u_0}{w}+\frac{1}{2}\frac{u_0{}^2}{w^2}\right\}, \;.\;. \quad (10)$$

мы будемъ имѣть новую функцію $Y(u)$, отличающуюся на эту постоянную отъ $Y_0(u)$, разложенную въ рядъ такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} Y(u) = Y_0(u) + C_1 = \frac{c}{2}u^2 + c' + \log u + \\ + \sum_{m,n}{}' {}_{-\infty}^{+\infty} \left\{\log\left(1-\frac{u}{w}\right)+\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad (11)$$

Изъ обоихъ опредѣленій $Y_0(u)$, а слѣдовательно и $Y(u)$, вытекаетъ безчисленная многозначность этой функціи: такъ какъ резидю функціи $\zeta(u)$ есть 1, то $Y(u)$ имѣетъ безчисленное множество значеній, разнящихся на $2k\pi i$, гдѣ k цѣлое число, положительное или отрицательное; это слѣдуетъ и изъ разложенія (11), ибо $\log z$ многозначная функція, безчисленное множество значеній которой для каждаго значенія аргумента разнятся между собою на $2k\pi i$. Эта функція логариѳмически обращается въ безконечность въ точкахъ $u = 2\varpi$.

15. Если теперь мы возьмемъ обѣ части равенства (11) предыдущаго § показателемъ числа e (основанія Неперовыхъ логариѳмовъ), то получимъ однозначную функцію, ибо

$$e^{2k\pi i} = 1, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

и вездѣ конечную и непрерывную, которую означимъ чрезъ $\Theta(u)$, разложенную на множители, отвѣчающіе ея нулямъ:

$$\Theta(u)=e^{Y(u)}=e^{\frac{c}{2}u^2+c'}u\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \quad \ldots \ldots (2)$$

гдѣ

$$w=2m\omega+2n\omega'. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Эта функція нечетная, какъ то вытекаетъ изъ разложенія (2): перемѣна u на $-u$ измѣнитъ только знакъ одного множителя; остальные множители въ произведеніи перейдутъ попарно одинъ въ другой: множитель $(m=\mu,\ n=\nu)$ перейдетъ въ множитель $(m=-\mu,\ u=-\nu)$ и наоборотъ. Тоже самое можно вывести и изъ свойствъ функціи $Y_0(u)$, опредѣляемой интеграломъ (1) § 15, отъ которой $Y(u)$ разнится на постоянную C_1[(11) предыдущаго §]. Построимъ эллипсъ, для котораго вершинами большой оси были-бы точки $-u$ и $+u$, и который не заключалъ бы внутри себя никакого полюса, кромѣ одного $u=0$, который будетъ центромъ этого эллипса (назовемъ его E). Тогда интегралъ, взятый по эллипсу въ положительномъ направленіи, отъ функціи $\zeta(u)$ будетъ $=2\pi i$:

$$\int_{(E)}\zeta(u)du=2\pi i, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

ибо эллипсъ можетъ быть стянутъ въ одну точку—его центръ, не переходя чрезъ полюсы функціи $\zeta(u)$.—Интегралъ отъ $-u$ до $+u$ отъ этой функціи будетъ $=+\pi i$ или $-\pi i$, смотря потому, по которой части эллипса будетъ идти интегрированіе, по той-ли, относительно которой центръ лежитъ слѣва, или по той, относительно которой онъ лежитъ справа. Дѣйствительно, элементы интеграла

$$\int\zeta(u)du,$$

въ каждыхъ двухъ точкахъ эллипса, симметричныхъ относительно его центра, равны, и потому интегралъ по правой сторонѣ

$$\int_{-u}^{+u}(\text{п})\ \zeta(u)du=\int_{+u}^{-u}(\text{л})\ \zeta(u)du, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

— интегралу по лѣвой сторонѣ; а такъ какъ полный интегралъ, т. е. по всему элипсу, $=2\pi i$, то половина его

$$\int_{-u}^{+u}(\text{п})\ \zeta(u)du=\pi i. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Если интегрированіе идетъ въ отрицательномъ направленіи, т. е. такъ что центръ справа, то будетъ:

$$\int_{-u}^{+u}(\text{л})\,\zeta(u)du = -\pi i\,, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (7)$$

какъ половина интеграла, который теперь $=-2\pi i$. Соединимъ теперь точку u_0 съ какой либо точкой u_1 нашего эллипса линіей, непроходящей ни черезъ который изъ полюсовъ функціи $\zeta(u)$, и отъ этой точки пойдемъ уже по нашему эллипсу разъ къ одной, разъ къ другой его вершинѣ: полученныя значенія интеграловъ:

$$Y_0(-u)=\int_{u_0}^{-u}\zeta(u)du \quad \text{и} \quad Y_0(u)=\int_{u_0}^{u}\zeta(u)du\,, \; . \; . \; . \qquad (8)$$

будутъ различаться лишь въ этихъ послѣднихъ частяхъ пути интегрированія, и мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} Y_0(-u)-Y_0(+u) &= \int_{u_1}^{-u}\zeta(u)du-\int_{u_1}^{u}\zeta(u)du= \\ &= -\int_{-u}^{u_1}\zeta(u)du-\int_{u_1}^{+u}\zeta(u)du=-\int_{-u}^{+u}\zeta(u)du\,; \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \qquad (9)$$

а этотъ интегралъ будетъ $=+\pi i$ или $-\pi i$, смотря потому, гдѣ лежитъ точка u_1, на лѣвой или на правой половинѣ элипса; слѣдовательно:

$$Y_0(-u)=Y_0(u)\mp\pi i. \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (10)$$

Если мы возьмемъ пути интегрированія отличные отъ описанныхъ, то получимъ для нашихъ интеграловъ другія значенія, отличающіяся отъ написанныхъ здѣсь на кратное $2\pi i$; слѣдовательно вообще будетъ:

$$Y_0(-u)=Y_0(+u)+(2k\mp1)\pi i\,, \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad (11)$$

гдѣ уже пути интегрированія какіе угодно, только непроходящіе черезъ полюсы функціи $\zeta(u)$. Отсюда, взявъ обѣ части (10) показателемъ числа e, получимъ:

$$e^{Y_0(-u)}=e^{Y_0(+u)+(2k\mp1)\pi i}=-e^{Y_0(+u)}\,, \qquad \ldots \ldots \qquad (12)$$

[такъ какъ

$$e^{(2k\mp1)\pi i}=-1]\,, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (13)$$

или

$$\Theta(-u)=-\Theta(u)\,, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (14)$$

что и доказываетъ нечетность функціи $\Theta(u)$.— Формула (2) даетъ безусловно-сходящееся разложеніе этой функціи на простые множители, отвѣчающіе ея корнямъ. Эта формула найдена Вейерштрассомъ для частного вида этихъ функцій, когда $c=0$ и $c'=0$; этотъ частный видъ Θ— функцій онъ обозначаетъ чрезъ $\mathfrak{S}(u)$, такъ что слѣд.

$$\mathfrak{S}(u)=u\prod_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \ldots \ldots \quad (15)$$

гдѣ

$$w=2m\omega+2n\omega' \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Общая $\Theta(u)$ тогда такъ выразится чрезъ $\mathfrak{S}(u)$ по (2) настоящаго §:

$$\Theta(u)=e^{\frac{c}{2}u^2+c'}\mathfrak{S}(u) \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Отсюда можно выразить и $\mathfrak{S}(u)$ чрезъ $\Theta(u)$.

16. Формулы (8), (12) и (14) § 13 можно обнять въ одной слѣдующей:

$$\zeta(u\pm\omega^{(i)})\mp\eta^{(i)}=u(c-e_i)+\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}\left\{\frac{1}{u-w_i}+\frac{1}{w_i}+\frac{u}{w_i^2}\right\}, \ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$w_i=2m\omega+2n\omega'-\omega^{(i)}, \ldots \ldots \ldots (2)$$

когда будемъ принимать $i=1, 2, 3$, помня соглашеніе (7) § 13. Такъ какъ входящій сюда рядъ есть безусловно-сходящійся, и при $u=0$ обращается въ нуль, какъ и лѣвая часть, то можно интегрировать равенство (1) отъ 0 до u, и мы тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^u\zeta(u\pm\omega^{(i)})du\mp\eta^{(i)}u=\frac{u^2}{2}(c-e_i)+\\&+\sum_{m,n}{}^{+\infty}_{-\infty}\left\{\log\left(1-\frac{u}{w_i}\right)+\frac{u}{w_i}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}\right\}.\end{aligned}\right\} \ldots \quad (3)$$

Но

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^u\zeta(u\pm\omega^{(i)})du=\int_{\pm\omega^{(i)}}^{u\pm\omega^{(i)}}\zeta(u)du=\\&=Y(u\pm\omega^{(i)})-Y(\pm\omega^{(i)});\end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

внося это въ предыдущее, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &Y(u \pm \omega^{(i)}) - Y(\pm \omega^{(i)}) \mp \eta^{(i)} u = \frac{u^2}{2}(c - e_i) + \\ &+ \sum_{m,n}^{+\infty}{}_{-\infty} \left\{ \log\left(1 - \frac{u}{w^{(i)}}\right) + \frac{u}{w^{(i)}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^{(i)2}} \right\}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Беря обѣ части равенства показателями числа e и обозначая имѣющуюся получиться налѣво функцію чрезъ $\Theta_i(u) : \Theta'(0)$, мы получимъ такое равенство:

$$\frac{\Theta_i(u)}{\Theta'(0)} = \frac{\Theta(u \pm \omega^{(i)}) e^{\mp \eta^{(i)} u}}{\Theta(\pm \omega^{(i)})} = e^{(c-e_i)\frac{u^2}{2}} \prod_{m,n}{}_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{w^{(i)}}\right) e^{\frac{u}{w^{(i)}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^{(i)2}}}, \quad . \quad (6)$$

заключающее какъ опредѣленіе новой функціи (*союзной* съ главною Θ — функціей), такъ и ея разложеніе на множители, отвѣчающіе ея нулямъ:

$$u = 2m\omega + 2n\omega' - \omega^{(i)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Отсюда между прочимъ получимъ:

$$\frac{\Theta(u + \omega^{(i)}) e^{-\eta^{(i)} u}}{\Theta(\omega^{(i)})} = \frac{\Theta(u - \omega^{(i)}) e^{+\eta^{(i)} u}}{\Theta(-\omega^{(i)})}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

откуда умножая на $\Theta(\omega^{(i)})$ и имѣя въ виду нечетность $\Theta(u)$, получимъ:

$$\Theta(u + \omega^{(i)}) e^{-\eta^{(i)} u} = -\Theta(u - \omega^{(i)}) e^{+\eta^{(i)} u}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

откуда легко получимъ мѣняя u на $u + \omega^{(i)}$:

$$\Theta(u + 2\omega^{(i)}) = -e^{2\eta^{(i)}(u + \omega^{(i)})} \Theta(u). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Эти уравненія, изъ которыхъ впрочемъ только два независимыхъ, именно:

$$\Theta(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u + \omega)} \Theta(u); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\Theta(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u + \omega')} \Theta(u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

имѣютъ фундаментальное значеніе въ теоріи Θ-функцій: они показываютъ какъ измѣняется ея значеніе при переходѣ въ соотвѣтственную точку того или другого изъ смежныхъ паралелограмовъ періодовъ функціи $\wp(u)$.— Такъ какъ $\sigma(u)$ есть частный видъ Θ-функцій, то и она удовлетворяетъ подобнымъ уравненіямъ. въ которыхъ однако η и η' имѣютъ другія значенія, именно:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= \eta - c\omega\,; \\ \eta'_0 &= \eta' - c\omega'\,; \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (13)$$

такъ что

$$\mathfrak{S}(u + 2\omega) = -e^{2\eta_0(u+\omega)}\,\mathfrak{S}(u)\,; \dots\dots (14)$$

$$\mathfrak{S}(u + 2\omega') = -e^{2\eta'_0(u+\omega)}\,\mathfrak{S}(u). \dots\dots\dots (15)$$

Вейерштрассъ, разсматривая только эту функцію, обозначаетъ чрезъ η и η', то что мы обозначаемъ чрезъ η_0 и η'_0.

17. Эти уравненія можно обобщить. Перемѣняя въ (11) предыдущаго § u на $u + 2\omega$, и повторяя эту операцію $m - 1$ разъ, по перемноженіи полученныхъ результатовъ и сокращеніи, получимъ:

$$\Theta(u + 2m\omega) = (-1)^m e^{2\eta\left(mu + \sum\limits_1^m (2k-1)\omega\right)}\,\Theta(u)\,; \dots\dots (1)$$

по

$$\sum_1^m (2k - 1) = \frac{1 + 2m - 1}{1}\,m = m^2\,; \dots\dots (2)$$

потому (1) окончательно такъ напишется:

$$\Theta(u + 2m\omega) = (-1)^m e^{2m\eta(u+m\omega)}\,\Theta(u)\,; \dots\dots (3)$$

точно также изъ (12) получимъ:

$$\Theta(u + 2n\omega') = (-1)^n e^{2n\eta'(u+n\omega')}\,\Theta(u). \dots\dots\dots (4)$$

Если въ послѣднемъ равенствѣ перемѣнить u на $u + 2m\omega$, то съ помощію (3) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta(u + 2m\omega + 2n\omega') = \\ &= (-1)^{m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')+2mn(\omega\eta'-\omega'\eta)}\,\Theta(u)\,, \end{aligned}\right\} \dots (5)$$

или полагая

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega' \dots\dots\dots\dots (6)$$

$$\tilde{\eta} = m\eta + n\eta' \dots\dots\dots\dots (7)$$

и

$$\varepsilon = e^{(\omega\eta'-\omega'\eta)} \dots\dots\dots\dots (8)$$

короче:

$$\Theta(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n}\varepsilon^{mn} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\,\Theta(u). \dots\dots\dots (9)$$

Чтобы найти чему $=\omega\eta'-\omega'\eta$, проинтегрируемъ функцію $\zeta(u)$, которая внутри перваго паралелограмма періодовъ функціи $\wp(u)$ обращается въ безконечность, и при томъ перваго порядка, только въ его центрѣ $(u=0)$, по периметру этого паралелограмма въ положительномъ направленіи; тогда, такъ какъ этотъ путь можетъ быть стянутъ въ одну точку, именно центръ, не переходя черезъ полюсы функціи $\zeta(u)$, величина этого интеграла будетъ $=2\pi i$; но съ другой стороны его можно разбить на четыре части по сторонамъ этого паралелограмма. Въ случаѣ, когда

$$\text{аргументъ } \omega' > \text{аргумента } \omega\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

что можно выразить по Вейерштрассу и такъ: если вещественная часть отношенія $\frac{\omega'}{\omega i}$:

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

мы будемъ имѣть по предыдущему такое равенство:

$$\int_{-\omega-\omega'}^{+\omega-\omega'}\zeta(u)du+\int_{+\omega-\omega'}^{+\omega+\omega'}\zeta(u)du+\int_{+\omega+\omega'}^{-\omega+\omega'}\zeta(u)du+\int_{-\omega+\omega'}^{-\omega-\omega'}\zeta(u)du=2\pi i\,, \quad (12)$$

или

$$\int_{-\omega}^{+\omega}[\zeta(u-\omega')-\zeta(u+\omega')]du+\int_{-\omega}^{+\omega'}[\zeta(u+\omega)-\zeta(u-\omega)]du=2\pi i\,. \quad . \quad (13)$$

но по (10) § 13 имѣемъ:

$$\zeta(u+\omega)-\zeta(u-\omega)=2\eta\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

точно также изъ (16) легко получимъ:

$$\zeta(u+\omega')-\zeta(u-\omega')=2\eta'\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

на основаніи этого предыдущее такъ представится:

$$-2\eta'\int_{-\omega}^{+\omega}du+2\eta\int_{-\omega'}^{+\omega'}du=2\pi i \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

или

$$-2\eta'.2\omega+2\eta.2\omega'=2\pi i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

откуда

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi}{2}i\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

*

Въ случаѣ

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) < 0\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

принятый нами въ (12) порядокъ обхода сторонъ отвѣчалъ бы отрицательному направленію интегрированія; слѣдовательно вторая часть была бы $= -2\pi i$, а слѣдовательно и въ (18) нужно было бы поставить знакъ — предъ $\frac{\pi}{2} i$. Итакъ вообше

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm\frac{\pi}{2} i\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

гдѣ верхній знакъ берется въ случаѣ (11), нижній въ случаѣ (19). Отсюда

$$2(\eta\omega' - \eta'\omega) = \pm\pi i\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

и слѣдовательно

$$\varepsilon = e^{2(\eta'\omega - \eta\omega')} = e^{\mp\pi i} = -1\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

а потому (9) принимаетъ окончательно такой видъ:

$$\Theta(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\Theta(u)\,. \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Отсюда, полагая $c = 0$ и $c' = 0$, получимъ соотвѣтствующую формулу для $\sigma(u)$:

$$\sigma(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\tilde{\eta}_0(u+\tilde{\omega})}\sigma(u)\,, \quad \ldots \quad (24)$$

гдѣ

$$\tilde{\eta}_0 = m\eta_0 + n\eta'_0\,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

18. Союзныя $\Theta_i(u)$ суть тѣ функціи, чрезъ которыя вмѣстѣ съ основною $\Theta(u)$ выражаются функціи $\sqrt{\wp(u) - e_i}$, какъ то было нами показано въ статьѣ нашей: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale". 2. Note, помѣщенной въ XXV томѣ Mathematischer Annalen, или въ статьѣ: „Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ", помѣщенной въ III книжкѣ Сообщеній и протоколовъ Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ за 1884 годъ. Тамъ мы получили такую формулу:

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} = C\frac{\Theta(u - \omega^{(i)})e^{\eta^{(i)}u}}{\Theta(u)}\,; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

помножая обѣ части этого равенства на u и полагая затѣмъ $u=0$, получимъ:

$$\text{пред.}\left[u\sqrt{\wp(u)-e_i}\right]_{u=0}=C\,\frac{\Theta(-\omega^{(i)})}{\Theta'(0)}\,;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

[ибо пред. $\left(\dfrac{\Theta(u)}{u}\right)_{u=0}=\Theta'(0)$, такъ какъ $\Theta(0)=0$]; но

$$\text{пред.}\left[u\sqrt{\wp(u)-e_i}\right]_{u=0}=\text{пред.}\left[\sqrt{u^2\wp(u)-u^2e_i}\right]_{u=0}=+1\,;\ .\ (3)$$

слѣдовательно

$$C=-\frac{\Theta'(0)}{\Theta(\omega^{(i)})}\,;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

внося это въ (1), получимъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=-\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u-\omega^{(i)})\,e^{\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})\,\Theta(u)}\,;\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

но по (6) § 16:

$$-\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u-\omega^{(i)})\,e^{\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}=\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u+\omega^{(i)})\,e^{-\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}=\Theta_i(u),\ .\ .\ .\ (6)$$

а потому окончательно:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)}\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

Такъ какъ для функціи $\sigma(u)$ по (14) § 16:

$$\text{пред.}\left(\frac{\sigma(u)}{u}\right)_{u=0}=\sigma'(0)=1\,,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

то (6), опредѣляющее въ этомъ случаѣ союзную $\sigma_i(u)$, принимаетъ болѣе простой видъ:

$$\pm\frac{\sigma(u\pm\omega^{(i)})\,e^{\mp\eta_0^{(i)}}}{\sigma(\omega^{(i)})}=\sigma_i(u)\,;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

формула же (7) сохраняетъ свой видъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

[Союзныя $\mathfrak{S}_i(u)$ получаются изъ $\Theta_i(u)$, полагая $c=0$ и $c'=0$, подобно тому, какъ и $\mathfrak{S}(u)$ изъ $\Theta(u)$.] Изъ (2) § 15, видно, что

$$\Theta'(0)=e^{c'}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

если принять $c'=0$, то подобно (7) будетъ

$$\overline{\Theta}(0)=1\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

означая чрезъ $\overline{\Theta}(u)$ функцію, получающуюся изъ $\Theta(u)$ чрезъ положеніе $c'=0$; тогда (6) замѣнится такимъ:

$$\pm\frac{\overline{\Theta}(u\pm\omega^{(i)})e^{\mp\eta^{(i)}u}}{\overline{\Theta}(\omega^{(i)})}=\overline{\Theta}_i(u)\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

— равенство совершенно подобное (8), однако $\overline{\Theta}(u)$ будетъ отличаться отъ $\mathfrak{S}(u)$ множителемъ $e^{\frac{c}{2}u^2}$. — Очевидно, что между $\Theta(u)$ и $\overline{\Theta}(u)$ и ихъ союзными, соотвѣтственно, будутъ имѣть мѣсто такія соотношенія:

$$\Theta(u)=e^{c'}\,\overline{\Theta}(u)=\Theta'(0)\overline{\Theta}(u)\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\Theta_i(u)=e^{c'}\,\overline{\Theta}_i(u)=\Theta'(0)\overline{\Theta}_i(u)\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

если внести это въ (7), то множитель $\Theta'(0)$ сократится, и мы будемъ имѣть:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\overline{\Theta}_i(u)}{\overline{\Theta}(u)}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

откуда видно, что мы могли бы съ самаго начала принять $c'=0$, (или лучше не вводить его) если только эту цѣль имѣть въ виду.

19. Функція $\Theta_i(u)$ удовлетворяетъ подобнымъ же функціональнымъ уравненіямъ, какъ и основная $\Theta(u)$. Перемѣняя въ равенствѣ опредѣляющемъ эту функцію (6) § 16 (или пред.):

$$\Theta_i(u)=\pm\frac{\Theta'(0)\Theta(u\pm\omega^{(i)})e^{\mp\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

u на $u+2\bar{\omega}$, мы будемъ имѣть:

$$\Theta_i(u+2\bar{\omega})=\pm\frac{\Theta'(0)\Theta(u\pm\omega^{(i)}+2\bar{\omega})}{\Theta(\omega^{(i)})}\,e^{\mp\eta^{(i)}(u+2\bar{\omega})}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

но перемѣняя въ (23) § 18 u на $u \pm \omega^{(i)}$, будемъ имѣть:

$$\Theta(u \pm \omega^{(i)} + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn}\,\Theta(u \pm \omega^{(i)})e^{2\tilde{\eta}(u \pm \omega^{(i)} + \omega)}; \quad . \quad . \quad (3)$$

внося это въ (2), получимъ:

$$\Theta_i(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn}\,\frac{\Theta'(0)\,\Theta(u \pm \omega^{(i)})e^{\mp\eta^{(i)}u}}{\Theta(\omega^{(i)})}\,e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\tilde{\varepsilon}_i, \quad . \quad . \quad (4)$$

— гдѣ

$$\tilde{\varepsilon}_i = e^{\pm(\tilde{\eta}\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\tilde{\omega})}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

или по (1):

$$\Theta_i(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{m+n+mn}\,\tilde{\varepsilon}_i\,\Theta_i(u)e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Но

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega' \quad \text{и} \quad \tilde{\eta} = m\eta + n\eta'; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

слѣдовательно

$$\tilde{\eta}\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\tilde{\omega} = m(\eta\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\omega) + n(\eta'\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\omega'); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

если теперь $i = 1$, то это приведется къ

$$n(\eta'\omega - \eta\omega') = \pm n\frac{\pi}{2}i; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

если $i = 2$, то къ такому:

$$\left.\begin{aligned} & m(\eta(\omega + \omega') - \omega(\eta + \eta')) + n(\eta'(\omega + \omega') - \omega'(\eta + \eta')) = \\ & = m(\eta\omega' - \omega\eta') + n(\eta'\omega - \eta\omega') = (m-n)(\eta'\omega - \omega'\eta) = \\ & \qquad = \pm(n-m)\frac{\pi}{2}i; \end{aligned}\right\} . \quad (10)$$

если $i = 3$, то оно приведется къ

$$m(\eta\omega' - \omega\eta') = \mp\frac{\pi}{2}i; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

слѣдовательно въ первомъ случаѣ будетъ

$$\tilde{\varepsilon}_1 = e^{\pm n\pi i} = (-1)^n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

во второмъ

$$\tilde{\varepsilon}_2 = e^{\pm(n-m)\pi i} = (-1)^{m-n} = (-1)^{m+n}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

въ послѣднемъ

$$\tilde{\varepsilon}_3 = e^{\pm m\pi i} = (-1)^m ; \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

слѣдовательно (6) приметъ окончательно такой видъ:

$$\Theta_i(u + 2\tilde{\omega}) = \varepsilon_i e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})} \Theta_i(u) , \ldots \ldots \quad (15)$$

гдѣ ε_i имѣетъ такія значенія для $i = 1 , 2 , 3$:

$$\varepsilon_1 = (-1)^{m(n+1)} ; \quad \varepsilon_2 = (-1)^{mn} ; \quad \varepsilon_3 = (-1)^{(m+1)n} \ldots \quad (16)$$

Полагая въ (1) $u = \mp \omega^{(i)}$, получимъ:

$$\Theta_i(\mp \omega^{(i)}) = 0 ; \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

дѣлая тоже въ (14), будемъ имѣть:

$$\Theta_i(2\tilde{\omega} \mp \omega^{(i)}) = \varepsilon_i e^{2\tilde{\eta}(\tilde{\omega} \mp \omega^{(i)})} \Theta_i(\mp \omega^{i}) = 0 , \ldots \ldots \quad (18)$$

т. е.

$$\Theta_i(2\tilde{\omega} \mp \omega^{(i)}) = 0 ; \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

полагая здѣсь $i = 1 , 2 , 3$, будемъ имѣть:

$$\Theta_1((2m-1)\omega + 2n\omega') = 0 , \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

$$\Theta_2((2m-1)\omega + (2n-1)\omega') = 0 , \ldots \ldots \quad (21)$$

$$\Theta_3(2m\omega + (2n-1)\omega') = 0 , \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

тогда какъ изъ (23) § 17 слѣдуетъ, что

$$\Theta(2m\omega + 2n\omega') = 0 \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Равенство (1), опредѣляющее $\Theta_i(u)$ можетъ быть еще такъ написано:

$$\Theta_i(u) = \frac{\Theta'(0)\,\Theta(\omega^{(i)} \pm u) e^{\mp \eta^{(i)} u}}{\Theta(\omega^{(i)})} , \ldots \ldots \quad (24)$$

откуда прямо видна четность этой функціи. Если здѣсь положимъ $u = 0$, то получимъ:

$$\Theta_i(0) = \Theta'(0) , \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

что полезно замѣтить. Отсюда слѣдуетъ по (12) § 18, что

$$\overline{\Theta}_i(0) = \overline{\Theta}'(0) = +1 , \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

и въ частности [то (8) того же §]:

$$\mathfrak{S}_i(0) = \mathfrak{S}'(0) = +1 \,. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

20. Если въ общей формулѣ (15) предыдущаго § принять $\tilde{\omega} = \omega^{(j)}$ то получимъ:

$$\Theta_i(u + 2\omega^{(j)}) = \pm e^{2\eta^{(j)}(u+\omega^{(j)})}\Theta_i(u) \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ нужно взять знакъ $+$ или $-$, смотря потому будетъ-ли j не $= i$, или $= i$, ибо въ (4) предыдущаго § множитель

$$(-1)^{m+n+mn} = -1 \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

когда одно изъ m и n равно нулю, а другое $= 1$, или ни одно не равно нулю (случай $i = 2$), а оба $= 1$; множитель же

$$\varepsilon = e^{\pm 2(\eta^{(j)}\omega^{(i)} - \eta^{(i)}\omega^{(j)})} = \pm 1 \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

смотря потому будетъ-ли $j = i$ или не $= i$. Отсюда получаемъ на основанiи (7) § 17:

$$\sqrt{\wp(u + 2\omega_j) - e} = \pm\sqrt{\wp(u) - e_i} \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

гдѣ нужно взять $+$, когда $j = i$, и $-$, когда j не $= i$; слѣдовательно функцiя

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

будемъ имѣть перiодами $2\omega_i$ и $4\omega_j$.

Итакъ эта функцiя [(5)] есть однозначная, непрерывная и конечная за исключенiемъ точекъ

$$u = 2m\omega + 2n\omega' \,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

гдѣ она обращается въ ∞^1, двоякоперiодическая съ перiодами $2\omega_i$ и $4\omega_j$, и нулями въ точкахъ

$$u = \omega_i + 2m\omega + 2n\omega' \,. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Будучи дробнаго характера, она должна допускать разложенiе на частныя дроби по теоремѣ Миттагъ-Леффлера, аналогическое разложенiю функцiи $\zeta(u)$, ибо обращается въ ∞^1 въ тѣхъ же точкахъ какъ и эта послѣдняя. Однако прямое построенiе этого разложенiя представляетъ затрудненіе, которое легко обходится, если станемъ искать разложеніе на частныя дроби ея производной второго порядка, подобно тому, какъ то нами было сдѣлано, можно сказать, для функціи $\zeta(u)$, [ибо

$$c - \wp(u) = \frac{d^2\zeta(u)}{du^2}\Bigg] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

21. Чтобы имѣть дѣло съ хорошо опредѣленнымъ предметомъ (pour fixer les idées), примемъ $i = 1$; тогда наша функція будетъ

$$\sqrt{\wp(u) - e_1} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

изъ (4) предыдущаго § будетъ слѣдовать что

$$\sqrt{\wp(u + 2\omega) - e_1} = \sqrt{\wp(u) - e_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\sqrt{\wp(u + 2\omega') - e_1} = -\sqrt{\wp(u) - e_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

т. е. что періодами ея будутъ 2ω и $4\omega'$. Вообще будетъ:

$$\sqrt{\wp(u + 2\bar{\omega}) - e_1} = (-1)^n \sqrt{\wp(u) - e_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ $\bar{\omega}$ имѣетъ прежнее значеніе. Нулями этой функціи будутъ значенія

$$u = (2m + 1)\omega + 2n\omega', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

безконечностями [перваго порядка притомъ]

$$u = 2m\omega + 2n\omega'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Производныя ея будутъ имѣть тѣже періоды и тѣже безконечности повышающихся на единицу порядковъ съ таковымъ же повышеніемъ порядка производной. Дифференцируя, будемъ имѣть:

$$\left(\sqrt{\wp(u) - e_1}\right)' = \frac{\wp'(u)}{2\sqrt{\wp(u) - e_1}} = -\sqrt{\wp(u) - e_2}\cdot\sqrt{\wp(u) - e_3}; \quad . \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'' &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\sqrt{\wp(u)-e_2}}+\frac{\sqrt{\wp(u)-e_2}}{\sqrt{\wp(u)-e_3}}\right\}\wp'(u) = \\
&= -\frac{1}{2}\left\{2\wp(u)-e_2-e_3\right\}\frac{\wp'(u)}{\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3}} = \\
&= \left\{2\wp(u)-e_2-e_3\right\}\sqrt{\wp(u)-e_1}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\sqrt{\wp(u)-e_2}\right)''' &= 2\sqrt{\wp(u)-e_1}\,\wp'(u)+\left\{2\wp(u)-e_2-e_3\right\}\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)' = \\
&= -\left\{6\wp(u)-4e_1-e_2-e_3\right\}\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3} = \\
&= -3\left\{2\wp(u)-e_1\right\}\sqrt{\wp(u)-e_2}\,\sqrt{\wp(u)-e_3}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ибо $e_1+e_2+e_3=0$. Итд.

22. Мы имѣемъ вблизи $u=0$ такого вида разложенie по степенямъ u для функціи $\wp(u)$:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+u^2\mathfrak{P}(u^2)\,;\ ^{*)}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

отсюда

$$\wp(u)-e_1=\frac{1}{u^2}-e_1+u^2\mathfrak{P}(u^2)\,,\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{\wp(u)-e_1} &= \frac{1}{u}\left\{1-e_1u^2+u^4\mathfrak{P}(u^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{u}\left\{1+\frac{e_1}{2}u^2+u^4\mathfrak{P}_1(u^2)\right\} = \\
&= \frac{1}{u}+\frac{e_1}{2}u+u^3\mathfrak{P}_1(u^2)\,;
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (3)$$

дифференцируя это разъ, другой, третій, получимъ:

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)' = -\frac{1}{u^2}+\frac{e_2}{2}+u^2\mathfrak{P}_2(u^2)\,,\ \ldots\ldots\ (4)$$

---

*) Гдѣ $\mathfrak{P}(z)$ обозначаетъ рядъ, расположенный по возрастающимъ положительнымъ степенямъ z, какъ и раньше было уже. Подобное же значеніе имѣютъ дальше $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ и т. д.

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_2}\right)'' = \frac{2}{u^3} + u\mathfrak{P}_3(u^2)\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_3}\right)''' = -\frac{6}{u^4} + \mathfrak{P}_4(u^2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Изъ (3), (4), (5) находимъ:

$$\text{пред.}\left[u\sqrt{\wp(u)-e_1}\right]_{u=0} = +1\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\text{пред.}\left[u^2\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'\right]_{u=0} = -1\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\text{пред.}\left[u^3\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''\right]_{u=0} = +2\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

далѣе:

$$\text{пред.}\left\{\sqrt{\wp(u)-e_1} - \frac{1}{u}\right\}_{u=0} = 0\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)' + \frac{1}{u^2}\right\}_{u=0} = \frac{e_1}{2}. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u)-e_2}\right)'' - \frac{2}{u^3}\right\}_{u=0} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Полагая въ (4) предыдущаго §:

$$u + 2\tilde{\omega} = u', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

будемъ имѣть:

$$\sqrt{\wp(u')-e_1} = (-1)^n\sqrt{\wp(u)-e_1}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

помножая на $u' - 2\omega = u$, и полагая $u = 0$ будемъ имѣть:

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})\sqrt{\wp(u')-e_1}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}} = (-1)^n\,\text{пред.}\left\{u\sqrt{\wp(u)-e_1}\right\}_{u=0}, \quad (15)$$

т. е. по (7):

$$\text{пред.}\left\{(u'-2\tilde{\omega})\sqrt{\wp(u')-e_1}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}} = (-1)^n. \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Далѣе по (14) для u очень малыхъ, слѣдовательно u' очень близкихъ къ $2\tilde{\omega}$, будемъ имѣть изъ (3), (4) и (5) вводя туда $u'-2\tilde{\omega}$ вмѣсто u:

$$\sqrt{\wp(u')-e_1}=(-1)^n\left\{\frac{1}{u'-2\tilde{\omega}}+\frac{e_1}{2}(u'-2\tilde{\omega})+(u'-2\tilde{\omega})^2\mathfrak{P}_1((u'-2\tilde{\omega})^2)\right\};\quad(17)$$

$$\left(\sqrt{\wp(u')-e_1}\right)'=(-1)^n\left\{-\frac{1}{(u'-2\tilde{\omega})^2}+\frac{e_1}{2}+(u'-2\tilde{\omega})^2\mathfrak{P}_2((u'-2\tilde{\omega})^2)\right\};\quad(18)$$

$$\left(\sqrt{\wp(u')-e_1}\right)''=(-1)^n\left\{\frac{2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}+(u'-2\tilde{\omega})\mathfrak{P}_3((u'-2\tilde{\omega})^2)\right\};\quad\ldots\quad(19)$$

отсюда получимъ перенося первые члены налѣво и полагая $u'=2\tilde{\omega}$, что

$$\text{пред.}\left\{\sqrt{\wp(u')-e_1}-\frac{(-1)^n}{u'-2\tilde{\omega}}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=0,\quad\ldots\ldots\quad(20)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u')-e^1}\right)'+\frac{(-1)^n}{(u'-2\tilde{\omega})^2}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=\frac{e_1}{2};\quad\ldots\ldots\quad(21)$$

$$\text{пред.}\left\{\left(\sqrt{\wp(u')-e_1}\right)''-\frac{(-1)^n2}{(u'-2\tilde{\omega})^3}\right\}_{u'=2\tilde{\omega}}=0.\quad\ldots\ldots\quad(22)$$

23. Составимъ теперь функцію:

$$f(u)=\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''-\sum_{m,n\atop -\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3},\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

гдѣ по прежнему

$$w=2m\omega+2n\omega'.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Входящая сюда сумма

$$\sum_{m,n\atop -\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

есть рядъ безусловно-сходящійся [рядъ изъ модулей его членовъ тотъ же самый, какъ и для ряда, входящаго въ (1) § 11], а потому представляетъ аналитическую функцію, которая есть двоякоперіодическая съ періодами 2ω и $4\omega'$, ибо перемѣна u на $u+2\omega$ переводитъ всѣ члены въ предшествующіе съ ихъ знаками, а перемѣна u на $u+2\omega'$ переводимъ ихъ въ предшествующіе, взятые съ противнымъ знакомъ;

такъ какъ и первый членъ въ (1) обладаетъ по предыдущему § тѣми же свойствами, то будетъ:

$$f(u+2\omega)=f(u);\ \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$f(u+2\omega')=-f(u),\ \ldots\ldots\ldots (5)$$

откуда слѣдуетъ, что $f(u)$ имѣетъ періодами 2ω и $4\omega'$. Ея параллелограмъ періодовъ будетъ состоять изъ двухъ параллелограмовъ періодовъ функціи $\wp(u)$, рядомъ взятыхъ по направленію ω', при чемъ во второмъ изъ нихъ по (5) значенія $f(u)$ будутъ отличаться знакомъ отъ значеній въ соотвѣтственныхъ точкахъ перваго. Въ центрѣ перваго параллелограмма функціи $\wp(u)$, т. е. въ точкѣ $u=0$, будетъ

$$f(0)=0;\ \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

дѣйствительно, (1) можно такъ представить:

$$f(u)=\left[\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''-\frac{2}{u^3}\right]-\sum_{m,n}{}'_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3}.\ \ldots (7)$$

гдѣ значекъ (′) указываетъ на то, что изъ суммы исключенъ членъ, для котораго $m=0$ и $n=0$ заразъ; полагая въ (7) $u=0$, по (12) предыдущаго § будемъ имѣть:

$$f(0)=\sum_{m,n}{}'_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{w^3};\ \ldots\ldots\ldots (8)$$

въ этой суммѣ члены $(m=\mu,\ n=\nu)$ и $(m=-\mu,\ n=-\nu)$ взаимно сокращаются, и мы получимъ (6). Итакъ $f(u)$ есть однозначная, конечная и непрерывная двоякопеpіодическая функція во всѣхъ точкахъ внутри своего параллелограмма періодовъ; но такая двоякоперіодическая функція есть постоянное C, которая по (6) равна нулю. Слѣдовательно вмѣсто (1) мы теперь получаемъ такое:

$$0=\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''-\sum_{m,n}{}_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3},\ \ldots\ldots (9)$$

откуда

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''=\sum_{m,n}{}_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3}.\ \ldots\ldots (10)$$

Перенося членъ $(m=0,\ n=0)$ налѣво, мы будемъ имѣть:

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)''-\frac{2}{u^3}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^n\frac{2}{(u-w)^3},\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

гдѣ правая часть остается безусловно-сходящимся рядомъ и для $u=0$, но и лѣвая по (12) предыдущаго § есть конечная величина, именно 0; а потому это равенство можно интегрировать отъ 0, и мы получимъ, имѣя въ виду (11) предыдущаго §, слѣдующее:

$$\left(\sqrt{\wp(u)-e_1}\right)'+\frac{1}{u^2}-\frac{e_1}{2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^n\left\{\frac{-1}{(u-w)^2}+\frac{1}{w^2}\right\}.\;.\;(12)$$

Полученный здѣсь направо рядъ есть опять безусловно-сходящійся, а потому можетъ быть опять интегрированъ и опять отъ 0, (ибо по (11) предыдущаго § лѣвая часть $=0$ для $u=0$). Итакъ интегрируя, и замѣчая, что по (3) и (10) предыдущаго § лѣвая часть обратится въ нуль для нижняго предѣла интеграла $u=0$, мы получимъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1}-\frac{1}{u}-\frac{e_1}{2}u=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^n\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\},\;.\;(13)$$

откуда найдемъ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1}=\frac{e_1}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^n\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}.\;.\;(14)$$

Точно также получится:

$$\sqrt{\wp(u)-e_3}=\frac{e_3}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{m,n}(-1)^m\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}.\;.\;(15)$$

Для функціи $\sqrt{\wp(u)-e_2}$ имѣемъ, такъ какъ ω и ω' отвѣчаютъ значеніямъ $i=1$, и $i=3$, отличнымъ оба отъ 2, слѣдующіе два равенства:

$$\sqrt{\wp(u+2\omega)-e_2}=-\sqrt{\wp(u)-e_2}\,;\;.\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

$$\sqrt{\wp(u+2\omega')-e_2}=-\sqrt{\wp(u)-e_2}\,;\;.\;.\;.\;.\;.\;(17)$$

откуда получится и болѣе общее:

$$\sqrt{\wp(u+2\bar{\omega})-e_2}=(-1)^{m+n}\sqrt{\wp(u)-e_2}\,;\;.\;.\;.\;.\;(18)$$

на основанiи этого тѣмъ же путемъ придемъ къ такому разложенiю этой функцiи на частныя дроби:

$$\sqrt{\wp(u)-e_2}=\frac{e_2}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{m+n}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}. \quad (19)$$

Послѣднiя три разложенiя заключаются всѣ въ слѣдующей формулѣ:

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{e_i}{2}u+\frac{1}{u}+\sum_{m,n}{}'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{\lambda}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\}, \quad (20)$$

гдѣ $\lambda=n$, $m+n$, m, смотря потому, будетъ ли $i=1, 2, 3$.

Такимъ же точно образомъ можно получить разложенiе на частныя дроби и функцiй

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\sin\operatorname{am}\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k\right)=\frac{\mathfrak{S}(u)}{\mathfrak{S}_3(u)}=\frac{\Theta(u)}{\Theta_3(u)}, \quad (21)$$

$$\cos\operatorname{am}\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k\right)=\frac{\mathfrak{S}_1(u)}{\mathfrak{S}_3(u)}=\frac{\Theta_1(u)}{\Theta_3(u)}; \quad (22)$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u,k\right)=\frac{\mathfrak{S}_2(u)}{\mathfrak{S}_3(u)}=\frac{\Theta_2(u)}{\Theta_3(u)}, \quad (23)$$

гдѣ

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \quad (24)$$

что будетъ сдѣлано въ приготовляемой нами къ печати: „Теорiи эллиптическихъ функцiй“.

7-го iюня 1890 г.

О движеніи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Пусть въ безпредѣльной массѣ несжимаемой жидкости, текущей съ потенціаломъ скоростей, движется тяжелое твердое тѣло, масса котораго M. Обозначимъ черезъ M_1 массу вытѣсненной тѣломъ жидкости и черезъ g ускореніе силы тяжести. На тѣло дѣйствуютъ двѣ силы: сила тяжести, приложенная въ центрѣ тяжести тѣла, и сила, опредѣляемая по закону Архимеда, приложенная въ центрѣ тяжести объема и направленная въ сторону, противоположную дѣйствію силы тяжести.

Величины этихъ силъ будутъ соотвѣтственно:

$$Mg \quad \text{и} \quad M_1 g.$$

Предполагая M и M_1 неравными и тѣло неоднороднымъ, примемъ за начало координатныхъ осей, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, точку приложенія равнодѣйствующей этихъ параллельно-противоположныхъ силъ. Введемъ кромѣ того систему неподвижныхъ координатъ, направивъ ось ζ'овъ по направленію вышеупомянутой равнодѣйствующей.

Пусть косинусы угловъ, составляемыхъ осями x, y, z, неизмѣнно связанными съ тѣломъ, съ неподвижными ξ, η, ζ будутъ соотвѣтственно обозначаемы:

$$\begin{array}{lll} \text{для } x, y, z \text{ съ } \xi & \text{чрезъ} & \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \\ \text{— } x, y, z \text{ съ } \eta & \text{—} & \beta_1, \beta_2, \beta_3; \\ \text{— } x, y, z \text{ съ } \zeta & \text{—} & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3. \end{array}$$

При этомъ проекціи вектора дѣйствующей силы на оси x, y, z будутъ соотвѣтственно:

$$(M-M_1)g\gamma_1\,,\quad (M-M_1)g\gamma_2\,,\quad (M-M_1)g\gamma_3\,.$$

Положивъ $(M-M_1)g=m$, представимъ ихъ въ видѣ:

$$m\gamma_1\,,\quad m\gamma_2\,,\quad m\gamma_3\,.$$

Моментъ-же силъ относительно этихъ осей равенъ нулю.

Назвавъ координаты начала осей x, y, z по отношенію къ неподвижнымъ осямъ черезъ α, β, γ и обозначивъ черезъ u, v, w, p, q, r проекціи скорости начала координатъ и угловой скорости твердаго тѣла на оси, неизмѣнно съ нимъ связанныя, получимъ, по Кирхгофу, *) для опредѣленія этихъ шести величинъ слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)&=r\frac{\partial T}{\partial v}-q\frac{\partial T}{\partial w}+m\gamma_1\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)&=p\frac{\partial T}{\partial w}-r\frac{\partial T}{\partial u}+m\gamma_2\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)&=q\frac{\partial T}{\partial u}-p\frac{\partial T}{\partial v}+m\gamma_3\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)&=w\frac{\partial T}{\partial v}-v\frac{\partial T}{\partial w}+r\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial r}\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)&=u\frac{\partial T}{\partial w}-w\frac{\partial T}{\partial u}+p\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial p}\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)&=v\frac{\partial T}{\partial u}-u\frac{\partial T}{\partial v}+q\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial q}\,,
\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\;.\quad (1)$$

гдѣ T однородная квадратичная функція шести перемѣнныхъ u, v, w, p, q, r, всѣ дискриминанты которой положительны.

Вводя, по Клебшу **), новыя перемѣнныя, связанныя съ прежними соотношеніями:

---

*) Kirchhoff. Vorles. ü. Math. Physik. S. 237.

**) Clebsch. Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann. Bd. III., S. 241.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial T}{\partial u}, & y_1 &= \frac{\partial T}{\partial p}, \\ x_2 &= \frac{\partial T}{\partial v}, & y_2 &= \frac{\partial T}{\partial q}, \\ x_3 &= \frac{\partial T}{\partial w}, & y_3 &= \frac{\partial T}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

преобразуемъ систему (1) къ виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial y_2} + m\gamma_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial y_3} + m\gamma_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial y_1} + m\gamma_3, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_2}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial T}{\partial y_3}, \\ \frac{dy_3}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Что же касается величинъ α, β, γ и косинусовъ угловъ подвижныхъ осей съ неподвижными, то они опредѣлятся при помощи слѣдующей системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0, \\ &\frac{d}{dt}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0, \\ &\frac{d}{dt}(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) = m; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\gamma_1\beta-\beta_1\gamma)x_1+(\gamma_2\beta-\beta_2\gamma)x_2+(\gamma_3\beta-\beta_3\gamma)x_3\\ +\alpha_1 y_1+\quad\alpha_2 y_2+\quad\alpha_3 y_3\end{matrix}\right\}=m\beta\,,\\
&\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}\alpha_1\gamma-\gamma_1\alpha)x_1+(\alpha_2\gamma-\gamma_2\alpha)x_2+(\alpha_3\gamma-\gamma_3\alpha)x_3\\ +\beta_1 y_1+\quad\beta_2 y_2+\quad\beta_3 y_3\end{matrix}\right\}=-m\alpha\,,\\
&\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\beta_1\alpha-\alpha_1\beta)x_1+(\beta_2\alpha-\alpha_2\beta)x_2+(\beta_3\alpha-\alpha_3\beta)x_3\\ +\gamma_1 y_1+\quad\gamma_2 y_2+\quad\gamma_3 y_3\end{matrix}\right\}=0.
\end{aligned}\right\}\;. \quad (6)$$

Уравненія (5) даютъ непосредственно:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3&=A_1\,,\\
\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3&=A\,,\\
\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\gamma_3 x_3&=m(t+\tau)\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

гдѣ A_1, A, τ произвольныя постоянныя.

Нисколько не уменьшая общности вопроса можемъ положить $A_1=0$, для чего стоитъ только повернуть систему неподвижныхъ координатныхъ осей вокругъ оси ζ'овъ на соотвѣтствующій уголъ, и $\tau=0$, замѣтивъ, что начало счета временъ вполнѣ произвольно. Вслѣдствіе этого уравненія (7) представятся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3&=0\,,\\
\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3&=A\,,\\
\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\gamma_3 x_3&=mt.
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7_1)$$

Послѣднее же изъ уравненій (6) даетъ

$$\left\{\begin{matrix}(\beta_1\alpha-\alpha_1\beta)x_1+(\beta_2\alpha-\alpha_2\beta)x_2+(\beta_3\alpha-\alpha_3\beta)x_3\\ +\gamma_1 y_1+\quad\gamma_2 y_2+\quad\gamma_3 y_3\end{matrix}\right\}=C\;.\;.\;.\;(8)$$

или, въ силу уравненій (7_1),

$$A\alpha+\gamma_1 y_1+\gamma_2 y_2+\gamma_3 y_3=C.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7_2)$$

Замѣтимъ, что, проинтегрировавъ системы (3) и (4), т. е. найдя x_i и y_i $(i=1\,,\,2\,,\,3)$ въ функціи времени, — можемъ отыскать величины α, β, γ и α_i, β_i, γ_i $(i=1\,,\,2\,,\,3)$ при помощи слѣдующихъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt}&=\alpha_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial x_3},\\
\frac{d\beta}{dt}&=\beta_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial x_3},\\
\frac{d\gamma}{dt}&=\gamma_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial x_3}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

и

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{array}{ll|ll|}
\dfrac{d\alpha_1}{dt}=\alpha_2\dfrac{\partial T}{\partial y_3}-\alpha_3\dfrac{\partial T}{\partial y_2}, & & \dfrac{d\beta_1}{dt}=\beta_2\dfrac{\partial T}{\partial y_3}-\beta_3\dfrac{\partial T}{\partial y_2}, & \\
\dfrac{d\alpha_2}{dt}=\alpha_3\dfrac{\partial T}{\partial y_1}-\alpha_1\dfrac{\partial T}{\partial y_3}, & (m) & \dfrac{d\beta_2}{dt}=\beta_3\dfrac{\partial T}{\partial y_1}-\beta_1\dfrac{\partial T}{\partial y_3}, & (n) \\
\dfrac{d\alpha_3}{dt}=\alpha_1\dfrac{\partial T}{\partial y_2}-\alpha_2\dfrac{\partial T}{\partial y_1}, & & \dfrac{d\beta_3}{dt}=\beta_1\dfrac{\partial T}{\partial y_2}-\beta_2\dfrac{\partial T}{\partial y_1}, &
\end{array}\\
\begin{array}{ll|}
\dfrac{d\gamma_1}{dt}=\gamma_2\dfrac{\partial T}{\partial y_3}-\gamma_3\dfrac{\partial T}{\partial y_2}, & \\
\dfrac{d\gamma_2}{dt}=\gamma_3\dfrac{\partial T}{\partial y_1}-\gamma_1\dfrac{\partial T}{\partial y_3}, & (p) \\
\dfrac{d\gamma_3}{dt}=\gamma_1\dfrac{\partial T}{\partial y_2}-\gamma_2\dfrac{\partial T}{\partial y_1}, &
\end{array}
\end{array}\right\}.\ (10)$$

которыми мы и воспользуемся впослѣдствіи.

§ 2.

Не трудно замѣтить, что при всякомъ движеніи твердаго тѣла имѣютъ мѣсто два интеграла уравненій (3) и (4), получающія слѣдующимъ образомъ.

Помноживъ уравненія (3) и (4) соотвѣтственно на

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial T}{\partial x_1}\ \text{или на}\ x_1, & \dfrac{\partial T}{\partial y_1}\ \text{или на}\ 0,\\
\dfrac{\partial T}{\partial x_2}\ \ldots\ldots\ x_2, & \dfrac{\partial T}{\partial y_2}\ \ldots\ldots\ 0,\\
\dfrac{\partial T}{\partial x_3}\ \ldots\ldots\ x_3, & \dfrac{\partial T}{\partial y_3}\ \ldots\ldots\ 0,
\end{array}$$

и сложивъ, находимъ

$$\left.\begin{aligned} &T = m\gamma + H \\ \text{и} \qquad & \\ &x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = m^2t^2 + C_1 , \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (11)$$

гдѣ H и C_1 произвольныя постоянныя.

Первое уравненіе выражаетъ законъ живой силы, второе измѣненіе со временемъ вектора производящихъ движеніе импульсовъ.

§ 3.

Какъ упомянуто выше, T есть однородная квадратичная функція шести перемѣнныхъ u, v, w, p, q, r или x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, т. е.

$$\left.\begin{aligned} 2T = Sa_{11}x_1{}^2 + 2Sa_{12}x_1x_2 + Sa_{44}y_1{}^2 + 2Sa_{45}y_1y_2 + \\ + 2Sa_{14}x_1y_1 + 2Sa_{15}x_1y_2 + 2Sa_{24}x_2y_1 \end{aligned}\right\} \ldots (12)$$

гдѣ a_{ik} постоянныя, зависящія отъ формы и распредѣленія массъ въ тѣлѣ, а знакъ S представляетъ сумму трехъ членовъ, получающихся изъ перваго круговою перестановкою двухъ группъ значковъ 1,2,3 и 4,5,6 подъ условіемъ, чтобы въ каждой группѣ меньшій значокъ предшествовалъ большему.

Замѣтимъ, что перемѣной направленія координатныхъ осей всегда можно обратить въ нуль коэффиціенты a_{13}, a_{23} (и одинъ изъ коэффиціентовъ a_{34}, a_{35}.)

Въ самомъ дѣлѣ,

$$Sa_{11}x_1{}^2 + 2Sa_{12}x_1x_2 = \text{const.} \ldots\ldots\ldots (A)$$

представляетъ нѣкоторую поверхность второго порядка и именно эллипсоидъ, центръ котораго находится въ началѣ координатъ. Стоитъ принять за ось z'овъ одну изъ главныхъ осей этой поверхности, чтобы коэффиціенты a_{13} и a_{23} обратились въ нуль и выраженіе живой силы приняло видъ

$$\left.\begin{aligned} 2T = Sa_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + Sa_{44}y_1{}^2 + 2Sa_{45}y_1y_2 + \\ + 2Sa_{14}x_1y_1 + 2Sa_{15}x_1y_2 + 2Sa_{24}y_2y_1 , \end{aligned}\right\} \ldots (13)$$

гдѣ a_{ik} постоянныя, въ которыя обратятся прежніе коэффиціенты α_{ik} при измѣненіи координатной системы, а x_i, y_i $(i = 1,2,3)$ проекціи на новыя оси момента и вектора производящихъ движеніе импульсовъ.

Положимъ теперь

$$2T = 2T_x + 2T_{xy} + 2T_y,$$

гдѣ

$$T_x = \frac{1}{2} S a_{11} x_1{}^2 + a_{12} x_1 x_2 ,$$

$$T_{xy} = S(a_{14} x_1 y_1 + a_{15} x_1 y_2 + a_{24} x_2 y_1),$$

$$T_y = \frac{1}{2} S a_{44} y_1{}^2 + S a_{45} y_1 y_2 .$$

Пусть въ уравненіяхъ (7_1) постоянная $A = 0$.

Положимъ далѣе

$$x_1 = \xi_1 t, \quad x_2 = \xi_2 t, \quad x_3 = \xi_3 t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Подставивъ эти выраженія x_i $(i = 1,2,3)$ въ уравненія (7_1), находимъ слѣдующую систему соотношеній между ξ_i, η_i и α_i, β_i, γ_i $(i = 1,2,3)$:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0, \qquad \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 = 0, \\ \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3 = m. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (15)$$

Отсюда, помножая эти уравненія на α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 и складывая каждый разъ, имѣемъ

$$\xi_1 = m\gamma_1, \quad \xi_2 = m\gamma_2, \quad \xi_3 = m\gamma_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Обозначимъ черезъ T' выраженіе живой силы по занесеніи туда вмѣсто x_i новыхъ перемѣнныхъ $\xi_i (i = 1,2,3)$, такъ что

$$2T' = 2t^2 T_\xi + 2t T_{\xi y} + 2T_y, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

причемъ

$$\left.\begin{array}{l} T_\xi = \dfrac{1}{2} S a_{11} \xi_1{}^2 + a_{12}\xi_1\xi_2, \\ T_{\xi y} = S(a_{14}\xi_1 y_1 + a_{15}\xi_1 y_2 + a_{24}\xi_2 y_1). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Принимая въ соображеніе выраженія (16), (17) и (18), приводимъ уравненія (3) и (4) къ виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= t\left[\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3} - \xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right] + \xi_2\frac{\partial T_y}{\partial y_2} - \xi_3\frac{\partial T_y}{\partial y_2}\,,\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= t\left[\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1} - \xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right] + \xi_3\frac{\partial T_y}{\partial y_1} - \xi_1\frac{\partial T_y}{\partial y_3}\,,\\
\frac{d\xi_3}{dt} &= t\left[\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2} - \xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right] + \xi_1\frac{\partial T_y}{\partial y_2} - \xi_2\frac{\partial T_y}{\partial y_1}\,,
\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(19)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= t^2\left\{\xi_2\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_3} - \xi_3\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_2}\right\} + t\left\{\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_3} - \xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_2}\right\}\\
&\quad + t\left\{y_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right\} + y_2\frac{\partial T_y}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T_y}{\partial y_2}\,,\\
\frac{dy_2}{dt} &= t^2\left\{\xi_3\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_1} - \xi_1\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_3}\right\} + t\left\{\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_1} - \xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_3}\right\}\\
&\quad + t\left\{y_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right\} + y_3\frac{\partial T_y}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial T_y}{\partial y_3}\,,\\
\frac{dy_3}{dt} &= t^2\left\{\xi_1\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_2} - \xi_2\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi_1}\right\} + t\left\{\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_2} - \xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial \xi_1}\right\}\\
&\quad + t\left\{y_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right\} + y_1\frac{\partial T_y}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T_y}{\partial y_1}\,.
\end{aligned}\right\}\;.\;(20)$$

Не трудно замѣтить, что можно удовлетворить системамъ (19) и (20), положивъ

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= 0\,, & \xi_2 &= 0\,, & \xi_3 &= C\,,\\
y_1 &= 0\,, & y_2 &= 0\,, & y_3 &= 0\,,
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(21)$$

если только $a_{34} = a_{35} = 0$.

Такъ какъ $\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 = m^2$ (ибо $\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2 = 1$), то

$$\xi_3 = \pm m.$$

И такъ, для всякаго тѣла, въ выраженіи живой силы котораго, при системѣ координатъ съ началомъ въ точкѣ приложенія равнодѣйствующей вышеупомянутыхъ силъ и осью z'овъ, направленной по главной оси поверхности (A), коэффиціенты a_{34}, a_{35} (при x_3y_1, x_3y_2) обращаются въ нуль, возможно движеніе, при которомъ

$$\xi_1 = \xi_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0 \quad \text{и} \quad \xi_3 = m.$$

Разсмотримъ его нѣсколько подробнѣе.

Такъ какъ

$$m\gamma_1 = \xi_1\,, \qquad m\gamma_2 = \xi_2\,,$$

то $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, а изъ уравненій (15) слѣдуетъ, что

$$\alpha_3 = \beta_3 = 0\,, \quad \text{и} \quad \gamma_3 = 1\,,$$

т. е. при движеніи тѣла ось z'овъ постоянно совпадаетъ съ осью ζ'овъ.

Первыя два изъ уравненій (6), въ силу (15), представятся въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}(t\beta m) = m\beta \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(t\alpha m) = m\alpha\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Отсюда $\alpha = \text{const.}$ и $\beta = \text{const.}$, т. е. начало координатъ движется прямолинейно по оси ζ'овъ. Такъ какъ начало неподвижныхъ координатъ вполнѣ произвольно, то можемъ положить

$$\alpha = \beta = 0\,.$$

Въ силу перваго изъ уравненій (11) имѣемъ

$$m\gamma = T - H = \frac{t^2 a_{33} m^2}{2} - H\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

т. е. начало координатъ движется по оси ζ'овъ равномѣрно ускоренно (какъ и при свободномъ паденіи тѣла).

Остается теперь опредѣлить углы α_1, α_2, β_1, β_2.

Воспользовавшись уравненіями (10) $[m]$, получимъ

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 a_{36} mt\,, \qquad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\alpha_1 a_{36} mt\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій путемъ дифференцированія одну изъ перемѣнныхъ, имѣемъ

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} - \frac{1}{t}\cdot\frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_1 a^2{}_{36} m^2 t^2 = 0\,.$$

Вводя-же новую независимую перемѣнную t_1, такъ что

$$\frac{dt_1}{dt} = t\,,$$

получимъ

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt_1{}^2}+a^2{}_{36}m^2\alpha_1=0.$$

Проинтегрировавъ это уравненіе, получаемъ

$$\alpha_1=A_1\cos kt_1+A_2\sin kt_1\,,\ \ldots\ldots\ldots\ (25)$$

гдѣ $k=a_{36}m$, A_1 и A_2 двѣ произвольныя постоянныя.
Первое же изъ уравненій (24) даетъ

$$\alpha_2=-A_1\sin kt_1+A_2\cos kt_1\,.\ \ldots\ldots\ldots\ (26)$$

Но $\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2=1$, слѣдовательно,

$$A_1{}^2+A_2{}^2=1.$$

Положивъ поэтому

$$A_1=\cos v_0\,,\qquad A_2=\sin v_0$$

и обозначивъ kt_1 черезъ v, имѣемъ

$$\alpha_1=\cos(v-v_0)\,,\qquad \alpha_2=-\sin(v-v_0)\ \ldots\ .\ (27)$$

Точно такъ-же найдемъ, что

$$\beta_1=\sin(v-v_0)\,,\qquad \beta_2=\cos(v-v_0)\,,\ \ldots\ .\ (28)$$

принявъ въ соображеніе, что

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0.$$

Отсюда заключаемъ, что тѣло вращается равномѣрно ускоренно вокругъ оси z'овъ, ибо, какъ не трудно убѣдиться,

$$\psi=v-v_0=\frac{kt^2}{2}-v_0.\ \ldots\ldots\ldots\ (29)$$

И такъ, для тѣла, живая сила котораго, при началѣ координатъ въ точкѣ приложенія равнодѣйствующей силъ, можетъ быть приведена къ такому виду, что коэффиціенты $a_{13}=a_{23}=a_{34}=a_{35}=0$, *возможно равномѣрно ускоренное винтовое движеніе по оси ζ'овъ.*

Изъ уравненій (24) слѣдуетъ далѣе, что если $a_{36}=0$, то тѣло движется поступательно равномѣрно ускоренно по оси ζ'овъ безъ вращенія.

Движенія эти соотвѣтствуютъ допущенію, что тѣло приведено въ движеніе однимъ импульсомъ, направленнымъ по оси ζ'овъ. Свободному тѣлу такой импульсъ сообщаетъ только поступательное движеніе; тѣло-же, погруженное въ жидкость, вообще говоря, кромѣ поступательнаго пріобрѣтаетъ и вращательное движеніе, когда коэффиціентъ a_{36} не равенъ нулю. Если же $a_{36}=0$, то получается движеніе аналогичное движенію твердаго тѣла въ пустотѣ. Примѣрами того и другого случая движенія могутъ служить: для перваго—тѣло симметричное относительно двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, тѣло не мѣняющее своего вида отъ поворота на уголъ π (пароходный винтъ съ двумя лопастями),—тѣло, не мѣняющее своего вида отъ поворота на углы π и $\frac{\pi}{2}$ (пароходный винтъ съ четырьмя лопастями); втораго—тѣло симметричное относительно трехъ перпендикулярныхъ плоскостей и тѣло подобное тѣлу вращенія, и т. д.

§ 4.

Не входя въ подробное изслѣдованіе, скажемъ, что движенія этого рода, вообще говоря, неустойчивы. Даже для тѣла симметричнаго относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей (для котораго имѣетъ мѣсто поступательное движеніе безъ вращенія) и притомъ для возмущеній, не мѣняющихъ величины произвольной постоянной A, движеніе это будетъ безусловно неустойчиво.

§ 5.

Переходимъ теперь къ другимъ движеніямъ твердаго тѣла, соотвѣтствующимъ болѣе частнымъ случаямъ выраженія живой силы.*

Изъ уравненій (3) и (4), очевидно, слѣдуетъ, что всякій интегралъ въ однихъ y'ахъ, имѣющій мѣсто для движенія не тяжелаго тѣла будетъ имѣть мѣсто и въ разсматриваемомъ случаѣ. Разыскивая по пріему Клебша такой интегралъ, предположивъ его цѣлой однородной функціей n'ой степени y'овъ, мы придемъ къ заключенію, что интегралъ этотъ будетъ необходимо второй или первой степени, и имѣетъ мѣсто для тѣла, живая сила котораго

$$2T=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+b(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+c_1y_1^2+c_2y_2^2+c_3y_3^2 \quad (30)$$

или

$$2T=a(x_1^2+x_2^2)+a_1x_3^2+b(x_1y_1+x_2y_2)+b_1x_3y_3+c(y_1^2+y_2^2)+c_1y_3^2.$$

Само собою разумѣется, что выраженіе (30) есть частный случай общаго случая Клебша, для котораго вполнѣ рѣшается вопросъ о движеніи не-тяжелаго тѣла *). Мы остановимся только на разсмотрѣніи движенія при существованіи интеграла второй степени, когда живая сила выражается формулой (30). При этомъ, какъ легко видѣть, оказывается, что уравненія (4) не содержатъ x'овъ, и для опредѣленія y'овъ въ функціи времени получаются совершенно такія-же уравненія, какъ и для движенія тѣла по инерціи вокругъ неподвижной точки съ моментами инерціи c_1, c_2, c_3, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=(c_3-c_2)y_2y_3,\\ \frac{dy_2}{dt}&=(c_1-c_3)y_1y_3,\\ \frac{dy_3}{dt}&=(c_2-c_1)y_1y_2,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

---

*) Клебшъ показалъ, что для тѣла, живая сила котораго

$$2T=a_1x_1{}^2+a_2x_2{}^2+a_3x^2{}_3+b(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+c_1y_1{}^2+c_2y_2{}^2+c_3y_3{}^2, \quad (\alpha)$$

при условіи

$$\frac{a_2-a_3}{b_1}+\frac{a_3-a_1}{b_2}+\frac{a_1-a_2}{b_3}=0, \ldots\ldots\ldots(\beta)$$

существуетъ четвертый (кромѣ трехъ извѣстныхъ) интегралъ второй степени, и что выраженіе живой силы (α) есть единственное, для котораго интегралъ есть однородная функція второй степени. Разыскивая цѣлый интегралъ въ y'кахъ и называя его черезъ f мы должны удовлетворить тождественно, при помощи уравненій (4), выраженію

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}y'_1+\frac{\partial f}{\partial y_2}y_2'+\frac{\partial f}{\partial y_3}y'_3=0,$$

т. е. должны имѣть тождественно:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T}{\partial x_1}, & x_1\\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T}{\partial x_2}, & x_2\\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T}{\partial x_3}, & x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T}{\partial y_1}, & y_1\\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T}{\partial y_2}, & y_2\\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T}{\partial y_3}, & y_3\end{vmatrix}=0.\ldots\ldots(\gamma)$$

интегрирующіяся, какъ извѣстно, въ эллиптическихъ функціяхъ $l\sin am\lambda t$, $m\cos am\lambda t$, $n\Delta am\lambda t$.

Предположивъ далѣе, что $A=0$, т. е. что производящій движеніе импульсъ направленъ по оси z'овъ и введя перемѣнныя ξ_i вмѣсто x_i $(i=1,2,3)$, приведемъ уравненія (3) къ виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt}&=c_3\xi_2y_3-c_2\xi_3y_2\,,\\ \frac{d\xi_2}{dt}&=c_1\xi_3y_1-c_3\xi_1y_3\,,\\ \frac{d\xi_3}{dt}&=c_2\xi_1y_2-c_1\xi_2y_1\,.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

А такъ какъ $2T=2T_x+2T_{xy}+2T_y$, то

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_x}{\partial x_1}, & x_1\\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_x}{\partial x_2}, & x_2\\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_x}{\partial x_3}, & x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_1}, & x_1\\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_2}, & x_2\\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial x_3}, & x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial y_1}, & y_1\\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial y_2}, & y_2\\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_{xy}}{\partial y_3}, & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{\partial T_y}{\partial y_1}, & y_1\\ \frac{\partial f}{\partial y_2}, & \frac{\partial T_y}{\partial y_2}, & y_2\\ \frac{\partial f}{\partial y_3}, & \frac{\partial T_y}{\partial y_3}, & y_3\end{vmatrix}=0.\;(\delta)$$

Второй и третій члены линейны относительно x'овъ, первый—второй степени отъ x'овъ, четвертый не зависитъ отъ нихъ. Выраженіе (δ) распадется на три, изъ которыхъ найдемъ, 1) что, если интегралъ не первой степени, онъ необходимо четный и есть однородная функція степени $\frac{n}{2}$ (n-четное) отъ T_y и $U_y=\frac{1}{2}(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$; 2) что необходимо при этомъ $2T=a(x_1{}^2+x_2{}^2+x^2)$ $+2b(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+c_1y_1{}^2+c_2y^2{}_2+c_3y_3{}^2$, и 3) что (считаю не лишнимъ обратить вниманіе на это обстоятельство) *никакого другого интеграла цѣлаго въ y'ахъ кромѣ интеграла второй степени вида $T_y-kU_y=0$, гдѣ k постоянная, не можетъ существовать, ибо всякій интегралъ необходимо долженъ удовлетворять уравненію*

$$\frac{\partial f}{\partial T_y}+k\frac{\partial f}{\partial U_y}=0\;\ldots\ldots\ldots\ldots(\varepsilon)$$

такъ что необходимо $f=\psi(T_y-kU_y)$, т. е. всякій другой интегралъ, цѣлый однородный въ y'ахъ, будетъ функціей интеграла второй степени.

Такъ какъ y_1, y_2, y_3 извѣстны въ функціи времени изъ уравненій (31), а уравненія (32) имѣютъ два интеграла

$$\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 = m^2 ,$$

и

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = C ,$$

то третій найдется по принципу послѣдняго множителя.

Уравненія (32), замѣтимъ, тѣ-же самыя, что и уравненія (10), опредѣляющія углы α_i, β_i, γ_i въ функціи времени.

Если

$$2T = a(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2) + b(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + c(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2) ,$$

т. е., если тѣло изотропно относительно начала координатъ*) то всѣ y_i равны постояннымъ, а для опредѣленія ξ_i получается система линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами.

Начало координатъ такого тѣла будетъ двигаться по нѣкоторой спиральной линіи, какъ будетъ показано нѣсколько ниже.

Положивъ

$$c_1 y_1 = d_1 , \qquad c_2 y_2 = d_2 , \qquad c_3 y_3 = d_3 ,$$

получимъ характеристическое уравненіе

$$s(s^2 + d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2) = 0 ,$$

и, слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= Ad_1 + A_1 \cos kt + A_2 \sin kt , \\ \xi_2 &= Ad_2 + B_1 \cos kt + B_2 \sin kt , \\ \xi_3 &= Ad_3 + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt , \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

гдѣ $k = \sqrt{d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}$, причемъ

$$\left.\begin{aligned} A_1 d_1 + B_1 d_2 + C_1 d_3 &= 0 , \\ A_2 d_1 + B_2 d_2 + C_2 d_3 &= 0 , \\ A_1 A_2 + B_1 B_3 + C_1 C_2 &= 0 , \\ A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 &= A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2 , \\ A^2 k^2 + A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 &= m^2 . \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (34)$$

*) W. Thomson. On the Motion of Free Solids through a Liquid. Phil. Mag. XLII. p. 362.

Между семью произвольными постоянными существуетъ, слѣдовательно, пять соотношеній; двѣ остаются произвольными, третью можно ввести какъ добавочную ко времени t.

Для α_i, β_i получатся по формуламъ (10) [m и n] выраженія аналогичныя (33), а затѣмъ α, β и γ опредѣлятся по формуламъ (9).

§ 6.

Указавъ въ общихъ чертахъ движеніе тѣла изотропнаго относительно начала координатъ, разсмотримъ болѣе общій случай, когда c_i не равны между собой.

Не производя интегрированія уравненій (32), разсмотренныхъ Hermite'омъ, покажемъ, что можно составить понятіе о движеніи начала координатъ, пользуясь выраженіями (9) и уравненіями (6).

Положимъ

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 , \\ U_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 , \\ U_3 &= \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

Первыя два изъ уравненій (6), въ силу соотношеній (7_1), дадутъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\beta m t + A\gamma + U_1) &= m\beta , \\ \frac{d}{dt}(-\alpha m t + U_2) &= -m\alpha , \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

или, при $A = 0$,

$$\left.\begin{aligned} tm\frac{d\beta}{dt} + \frac{dU_1}{dt} &= 0 , \\ -tm\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dU_2}{dt} &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

Но по формуламъ (9), принявъ во вниманіе выраженіе $2T$ (30), имѣемъ

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1\frac{dT}{dx_1} + \alpha_2\frac{dT}{dx_2} + \alpha_3\frac{dT}{dx_3} = \alpha_1(ax_1 + by_1) + \alpha_2(ax_2 + by_2) + \alpha_3(ax_3 + by_3),$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1\frac{dT}{dx_1} + \beta_2\frac{dT}{dx_2} + \beta_3\frac{dT}{dx_3} = \beta_1(ax_1 + by_1) + \beta_2(ax_2 + by_2) + \beta_3(ax_3 + by_3),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1\frac{dT}{dx_1} + \gamma_2\frac{dT}{dx_2} + \gamma_3\frac{dT}{dx_3} = \gamma_1(ax_1 + by_1) + \gamma_2(ax_2 + by_2) + \gamma_3(ax_3 + by_3),$$

откуда въ силу равенствъ (7_1), принявъ во вниманіе обозначеніе (35), получаемъ

$$\frac{d\alpha}{dt} = bU_1\,,\qquad \frac{d\beta}{dt} = bU_2\,,\qquad \frac{d\gamma}{dt} = amt + bU_3 \,.\;.\;.\; (38)^{*})$$

Уравненія (38) и (37) даютъ

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = b\frac{dU_1}{dt} = -tbm\frac{d\beta}{dt} = -tb^2mU_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (39)$$

Дифференцируя это выраженіе, имѣемъ

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3} = -b^2mU_2 - tb^2m\frac{dU_2}{dt}\,,$$

что въ силу второго изъ уравненій (37) и (39) приведется къ

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3} - \frac{1}{t}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + t^2b^2m^2\frac{d\alpha}{dt} = 0 \,.\;\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; (40)$$

Полагая $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$ и помножая на t^2, дадимъ уравненію (40) видъ

$$t^2\frac{d^2\alpha'}{dt^2} - t\frac{d\alpha'}{dt} + t^4b^2m^2\alpha' = 0 \,.\;\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; (41)$$

Сравнивая это уравненіе съ общимъ уравненіемъ, интегрирующимся въ функціяхъ Бесселя

$$t^2\frac{d^2V}{dt^2} + (2\alpha+1)\,t\frac{dV}{dt} + (\alpha^2 - \beta^2n^2 + \beta^2\gamma t^{2\beta})V = 0\,,$$

гдѣ α, β, γ, n какія угодно постоянныя **), интегралъ котораго имѣетъ слѣдующій видъ

$$V = t^{-\alpha}\{A_1J_n(\gamma t^\beta) + A_2\,J_{-n}(\gamma t^\beta)\}\,,$$

---

*) Изъ формулъ (38) слѣдуетъ между прочимъ, что если $b = 0$, то начало координатъ движется прямолинейно по оси z'овъ равномѣрно ускоренно. Если, замѣтимъ, A не равно нулю, то движеніе совершается въ плоскости $\alpha = 0$; тѣло движется равномѣрно по оси y'овъ и равномѣрно ускоренно по оси z'овъ, описывая параболу, — движеніе тождественно съ движеніемъ тѣла въ пустотѣ, что слѣдуетъ прямо изъ выраженія (30), если $b = 0$.

**) См. Jordan. Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, III, p. 240.

находимъ, что въ нашемъ случаѣ

$$\alpha^2 - \beta^2 n^2 = 0\,, \qquad \beta = 2\,, \qquad 2\alpha + 1 = -1\,, \qquad \beta^2\gamma^2 = m^2 b^2\,,$$

откуда

$$\alpha = -1\,, \qquad n = \frac{1}{2}\,, \qquad \gamma = \frac{mb}{2}\,,$$

слѣдовательно,

$$\alpha' = t\left[A_1 J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{mb}{2}t^2\right) + A_2 J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{mb}{2}t^2\right)\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ (42)$$

Но, какъ извѣстно, вообще

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(R^{n,\frac{1}{2}}(z).\sin z - R^{n-1,\frac{3}{2}}(z).\cos z\right),$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(R^{n,\frac{1}{2}}(z).\cos z + R^{n-1,\frac{3}{2}}(z).\sin z\right),$$

если n цѣлое число, гдѣ $R^{n,\frac{1}{2}}(z)$ и $R^{n-1,\frac{3}{2}}$ ряды, обращающіеся, для $n = 0$, первый въ 1, второй въ нуль*), такъ что

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Вслѣдствіе этого выраженіе (42) приметъ видъ

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' = t\left\{A_1\sqrt{\frac{4}{\pi m b t^2}}.\ \sin\frac{mbt^2}{2} + A_2\sqrt{\frac{4}{\pi m b t^2}}.\ \cos\frac{mbt^2}{2}\right\}$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{A}_1\sin\frac{mbt^2}{2} + \mathrm{A}_2\cos\frac{mbt^2}{2}\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (44)$$

гдѣ $\mathrm{A}_1 = \dfrac{2A_1}{\sqrt{\pi m b}}$ и $\mathrm{A}_2 = \dfrac{2A_2}{\sqrt{\pi m b}}$.

---

*) См. Lommel. Zur Theorie d. Bessel'schen Functionen. Math. Ann. Bd. XIV. S. 516.

Такъ какъ въ силу уравненій (37) и (38)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -bmt\frac{d\beta}{dt},$$

то

$$\frac{d\beta}{dt} = \mathrm{A}_2 \sin\frac{mbt}{2} - \mathrm{A}_1 \cos\frac{mbt^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

Наконецъ, третье изъ уравненій (38) даетъ

$$\frac{d\gamma}{dt} = amt + bC, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

ибо при $A=0$ имѣемъ на основаніи третьяго изъ уравненій (6) $U_3 = C$, гдѣ C постоянная. И такъ имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \mathrm{A}_1 \sin\frac{mbt^2}{2} + \mathrm{A}_2 \cos\frac{mbt^2}{2} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \mathrm{A}_2 \sin\frac{mbt^2}{2} - \mathrm{A}_1 \cos\frac{mbt^2}{2} \\ \frac{d\gamma}{dt} &= amt + bC. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

Эти формулы, нѣсколько преобразованныя, и дадутъ возможность составить нѣкоторое понятіе о характерѣ движенія начала координатныхъ осей, связанныхъ съ тѣломъ.

Во первыхъ, положимъ, что всегда возможно,

$$\mathrm{A}_1 = A\cos v_0\,,\ \mathrm{A}_2 = A\sin v_0 \quad \text{и} \quad \frac{mbt^2}{2} = v.$$

Тогда формулы (47) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dv} &= \frac{A}{\sqrt{2mb}\,\sqrt{v}} \sin(v+v_0), \\ \frac{d\beta}{dv} &= -\frac{A}{\sqrt{2mb}\,\sqrt{v}} \cos(v+v_0), \\ \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{a}{b} + \frac{bC}{\sqrt{2mb}\,\sqrt{v}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (48)$$

а положивъ

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{a}{b}v,$$

$$M=\frac{A}{\sqrt{2mb}},\ N=\frac{bC}{\sqrt{2mb}}\ \text{ и }\ v+v_0=\varphi\,,$$

имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\varphi}&=\frac{M}{\sqrt{\varphi-v_0}}\sin\varphi\,,\\ \frac{d\beta}{d\varphi}&=\frac{-M}{\sqrt{\varphi-v_0}}\cos\varphi\,,\\ \frac{d\gamma_1}{d\varphi}&=\frac{N}{\sqrt{\varphi-v_0}}\,.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Сравнивая эти уравненія съ дифференціальными уравненіями улиткообразной линіи, замѣчаемъ, что можемъ разсматривать точку, координаты которой α, β, γ_1, какъ принадлежащую нѣкоторой винтовой линіи, начерченной на цилиндрѣ, радіусъ котораго убываетъ пропорціонально корню квадратному изъ $\varphi-v_0$, т. е. пропорціонально времени, и, при возрастаніи t до безконечности, цилиндръ обращается въ нѣкоторую опредѣленную прямую.

Координаты γ и γ_1 точекъ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ и $(\alpha,\ \beta,\ \gamma_1)$ связаны соотношеніемъ

$$\gamma_1=\gamma-\frac{a}{b}\,v\,,$$

т. е. первая точка движется равномѣрно ускоренно по отношенію ко второй, и обѣ всегда остаются на одной и той-же образующей цилиндра. Точка $(\alpha,\ \beta,\ \gamma_1)$, такимъ образомъ, вычерчиваетъ нѣкоторую спиральную линію, постепенно съуживающуюся и въ безконечности обращающуюся въ опредѣленную точку плоскости $(\xi O\eta)$. Подобную-же кривую описываетъ и точка $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ и стремится, съ возрастаніемъ времени до безконечности, къ той-же точкѣ плоскости $(\xi O\eta)$. При этомъ слагающая скорости по плоскости $(\xi O\eta)$ остается величиной постоянной. Возведя въ квадратъ первыя два изъ уравненій (47) и сложивъ, имѣемъ

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2=\mathrm{A}_1{}^2+\mathrm{A}_2{}^2\,,$$

и дуга проекціи траэкторіи на плоскость $(\xi O\eta)$ возрастаетъ пропорціонально времени, ибо изъ уравненій (49) имѣемъ

$$s_{\xi\eta}=2M\sqrt{\varphi-v_0}=kt\,,$$

гдѣ k постоянная. Точно также и дуга въ пространствѣ, проходимая точкою $(\alpha,\ \beta,\ \gamma_1)$, возрастаетъ пропорціонально времени.

Если черезъ c назовемъ уголъ, составляемый касательной къ траэкторіи съ осью 0ζ, то

$$\left.\cos c = \frac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{N}{\sqrt{\varphi - v_0}}}{\sqrt{\dfrac{M^2}{\varphi - v_0} + \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{N}{\sqrt{\varphi - v_0}}\right)^2}}\,,\right\} \quad \ldots\ldots (50)$$

какъ не трудно найти изъ выраженій (49). Слѣдовательно, $\cos c$ есть возрастающая функція времени и приближается ассимптотически къ 1, какъ показываетъ равенство (50), т. е. движеніе ассимптотически стремится къ прямолинейному по оси ζ'овъ.

Далѣе формулы (49) даютъ

$$\alpha = M\int_0^t \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi - v_0}}\,d\varphi\,, \quad \beta = -M\int_0^t \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi - v_0}}\,d\varphi\,. \quad \ldots (51)$$

При $t = \infty$

$$\alpha = M\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi - v_0}}\,d\varphi\,, \quad \beta = -M\int_0^\infty \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi - v_0}}\,d\varphi\,. \quad \ldots (52)$$

Положивъ $\varphi - v_0 = w$, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= M\cos v_0 \int_0^\infty \frac{\sin w}{\sqrt{w}}\,dw + M\sin v_0 \int_0^\infty \frac{\cos w}{\sqrt{w}}\,dw\,, \\ \beta &= -M\cos v_0 \int_0^\infty \frac{\cos w}{\sqrt{w}}\,dw + M\sin v_0 \int_0^\infty \frac{\sin w}{\sqrt{w}}\,dw\,, \end{aligned}\right\} (53)$$

Но, какъ извѣстно, вообще

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos qx\cdot dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\cdot\cos\frac{p\pi}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\sin qx dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\cdot\sin\frac{p\pi}{2}\,,$$

если только $0 < p < 1$. Въ нашемъ случаѣ $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$,

$$\Gamma(p) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,, \quad \cos\frac{p\pi}{2} = \sin\frac{p\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

а потому

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\infty &= M\cos v_0 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + M\sin v_0 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{M\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(\cos v_0 + \sin v_0) \\ \beta_\infty &= -M\cos v_0 . \sqrt{\pi} . \frac{1}{\sqrt{2}} + M\sin v_0 . \sqrt{\pi} . \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{M\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(\cos v_0 + \sin v_0)\end{aligned}\right\}(54)$$

α_∞, β_∞, γ_∞ и представляютъ собою ту точку, къ которой ассимптотически приближается начало координатъ или проекція траэкторіи на плоскость ($\xi 0 \eta$) (и опредѣляютъ, иначе говоря, положеніе той прямой, въ которую обращается вышеупомянутый цилиндръ при возрастаніи t до безконечности).

Не мѣшаетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что полученные результаты будутъ справедливы для какихъ угодно c_1, c_2, c_3, если только y_i не равны нулю или U_1, U_2 не постоянны.

Не трудно замѣтить далѣе, что, если b_i не равны между собою, т. е.

$$2T = a(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2) + b_1x_1y_1 + b_2x_2y_2 + b_3x_3y_3 + c_1y_1{}^2 + c_2y_2{}^2 + c_3y_3{}^2 ,$$

то возможно движеніе, при которомъ $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 опредѣлятся въ эллиптическихъ функціяхъ отъ аргумента $\frac{t^2}{2}$. Въ этомъ движеніи промежутки между одинаковыми, такъ сказать, состояніями движенія будутъ зависѣть отъ времени, протекшаго отъ начала движенія, и будутъ безпредѣльно убывать съ возрастаніемъ времени.

Не останавливаясь на этомъ частномъ выраженіи $2T$, я постараюсь показать, что такого характера движеніе возможно для болѣе общаго случая выраженія T.

§ 7.

Предположимъ, что въ выраженіи живой силы, отнесенномъ къ центральной точкѣ, коэффиціенты у $x_i x_k$ $(i = 1, 2, 3)$ равны нулю, а коэффиціенты при $x_i{}^2$ равны между собой, т. е.

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0 ,$$
$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = k ,$$

такъ что

$$2T = kSx_1{}^2 + 2Sa_{14}x_1y_1 + 2Sa_{24}(x_1y_2 + x_2y_1) + Sa_{44}y_1{}^2 + 2Sa_{45}y_1y_2 . \quad (55)$$

Допустимъ затѣмъ, что центральная точка совпадаетъ съ точкой приложенія дѣйствующихъ силъ (или что послѣдняя точка лежитъ на направленіи оси z'овъ).

Не трудно замѣтить, что при живой силѣ, выражающейся формулой (55), правыя части уравненій (4) будутъ функціями отъ y'овъ, обращающимися въ нуль при $y_i=0$ $(i=1, 2, 3)$.

Допустивъ теперь, подобно предыдущему, что $A=0$, и вводя перемѣнныя ξ_i вмѣсто x_i $(i=1, 2, 3)$, приведемъ уравненія (19) и (20) (стр. 216) къ виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= t\left[\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}-\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right]+Q_1\,,\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= t\left[\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}-\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right]+Q_2\,,\\
\frac{d\xi_3}{dt} &= t\left[\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}-\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right]+Q_3\,,\\
\frac{dy_1}{dt} &= P_1\,,\quad \frac{dy_2}{dt}=P_2\,,\quad \frac{dy_3}{dt}=P_3\,,
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(56)$$

гдѣ Q_i линейныя функціи y'овъ а P_i обращаются въ нуль при $y_i=0$ $(i=1, 2, 3)$.

Очевидно, уравненія (56) будутъ удовлетворены, если положимъ

$$y_1=y_2=y_3=0\,,$$

а ξ_1, ξ_2, ξ_3 опредѣлимъ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= t\left[\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}-\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}\right],\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= t\left[\xi_3\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}-\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}\right],\\
\frac{d\xi_3}{dt} &= t\left[\xi_1\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}-\xi_2\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}\right]
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(57)$$

Замѣтивъ, что въ силу выраженія (55)

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}=a_{14}\xi_1+a_{24}\xi_2+a_{16}\xi_3\,,$$

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}=a_{24}\xi_1+a_{25}\xi_2+a_{35}\xi_3\,,$$

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}=a_{16}\xi_1+a_{35}\xi_2+a_{36}\xi_3\,,$$

заключаемъ, что, если положимъ

$$2T_1 = a_{14}\xi_1{}^2 + a_{25}\xi_2{}^2 + a_{36}\xi_3{}^2 + 2a_{24}\xi_1\xi_2 + 2a_{35}\xi_2\xi_3 + 2a_{16}\xi_1\xi_3\,, \quad (58)$$

то

$$\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\,, \qquad \frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}\,, \qquad \frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3}\,. \quad (59)$$

При этомъ уравненія (57), по введеніи новой перемѣнной t_1, связанной съ t соотношеніемъ $\frac{dt_1}{dt} = t$, преобразуются въ такія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= \xi_2\frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} - \xi_3\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}\,, \\ \frac{d\xi_2}{dt_1} &= \xi_3\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} - \xi_1\frac{\partial T_1}{\partial \xi_3}\,, \\ \frac{d\xi_3}{dt_1} &= \xi_1\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} - \xi_2\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\,. \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Уравненія эти вполнѣ сходны съ уравненіями вращательнаго движенія тѣла по инерціи вокругъ неподвижной точки, или уравненіями движенія не тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости подъ дѣйствіемъ одной импульсивной пары *); только роль y_i здѣсь играютъ ξ_i, а живой силы функція T_1, опредѣляемая выраженіемъ (58).

Уравненія (60) имѣютъ два интеграла

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 = m^2\,, \\ \text{и} \quad &T_1 = H\,, \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

гдѣ H произвольная постоянная; и, такъ какъ для нихъ имѣетъ мѣсто принципъ послѣдняго множителя, t опредѣлится квадратурой.

Движеніе это соотвѣтствуетъ допущенію, что тѣло приводится въ движеніе только однимъ импульсомъ, направленнымъ по оси ζ'овъ (по направленію дѣйствія силы тяжести).

Величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 можемъ разсматривать, какъ проекціи на оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, нѣкотораго вектора Ξ.

Первое изъ уравненій (61) показываетъ, что этотъ векторъ во все время движенія сохраняетъ постоянную величину, а изъ соотношеній (15) (стр. 215) слѣдуетъ, что онъ сохраняетъ неизмѣнно и направле-

*) См. Lamb. A Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids. § 115, p. 129.

ніе въ пространствѣ, совпадая постоянно съ осью ζ'овъ. При этомъ, какъ видно изъ уравненія второго (61), конецъ его во все время движенія находится на нѣкоторой поверхности второго порядка, уравненіе которой и есть второй изъ интеграловъ:

$$T_1 = H. \dots \dots \dots \dots (\alpha).$$

Поверхность эта можетъ быть эллипсоидомъ или гиперболоидомъ.

Итакъ, конецъ вектора этого долженъ во все время движенія лежать на поверхности шара (первое изъ уравненій (61)) и на вышеупомянутой поверхности второго порядка, т. е. на линіи ихъ пересѣченія.

Отыскавъ линію пересѣченія упомянутой сферы и поверхности второго порядка, проводимъ изъ начала координатъ (центра поверхности) рядъ векторовъ къ точкамъ этой кривой. Получимъ нѣкоторую коническую поверхность.

Движеніе тѣла (вращательная часть) можетъ быть, въ силу вышесказаннаго, воспроизведено (до нѣкоторой степени) перемѣщеніемъ этой поверхности такимъ образомъ, чтобы образующая ея совпадала постоянно съ осью ζ'овъ.

Если поверхность (α) есть эллипсоидъ, то вышеупомянутая кривая состоитъ изъ двухъ замкнутыхъ контуровъ, охватывающихъ или меньшую, или большую изъ осей. Въ частности они могутъ обращаться въ точки пересѣченія этихъ осей съ поверхностью $T_1 = H$ и въ такомъ случаѣ будетъ происходить вращательное движеніе вокругъ этихъ осей. Если вышеупомянутая коническая поверхность проходитъ черезъ среднюю ось, то она обращается въ двѣ плоскости и кривая пересѣченія ея съ поверхностью (α) будетъ состоять изъ круговыхъ сѣченій этой поверхности. Возможно вращательное движеніе и вокругъ этой оси, но оно будетъ неустойчиво, ибо небольшое измѣненіе въ пересѣкающей поверхность (α) сферѣ даетъ коническую поверхность, охватывающую или малую, или большую ось.

Величины $\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial T_1}{\partial \xi_3}$, соотвѣтственно равныя $\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_1}$, $\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_2}$, $\frac{\partial T_{\xi y}}{\partial y_3}$, можемъ разсматривать какъ проекціи на координатныя оси угловой скорости движенія, соотвѣтствующаго перемѣннымъ ξ_i. Положивъ, такимъ образомъ,

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \Omega_1 \cos(\Omega_1 x) = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}, \\ q_1 &= \Omega_1 \cos(\Omega_1 y) = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}, \\ r_1 &= \Omega_1 \cos(\Omega_1 z) = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3}, \end{aligned}\right\} \dots \dots \dots (62)$$

заключаемъ, что эта скорость направлена по нормали поверхности (α) въ точкѣ пересѣченія ея съ векторомъ Ξ.

Если поэтому въ различныхъ точкахъ кривой пересѣченія поверхностей (61) проведемъ касательныя плоскости и опустимъ на нихъ изъ начала координатъ непрерывный рядъ перпендикуляровъ, то получимъ аксоидъ мгновенныхъ осей.

Очевидно далѣе, что уравненію (α) можно дать видъ

$$\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} = \mathrm{Const}, \quad \ldots\ldots\ldots (63)$$

которое, въ силу выраженій (62), даетъ

$$\Xi \Omega_1 \cos(\Omega_1 \Xi) = \mathrm{Const}. \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

Послѣднее равенство выражаетъ, что проекція угловой скорости Ω_1 на векторъ Ξ есть величина постоянная.

Все предыдущее будетъ относиться къ движенію нетяжелаго тѣла, если вездѣ подъ векторомъ Ξ будемъ разумѣть векторъ импульсовъ, подъ p_1, q_1, r_1, проекціи угловой скорости на оси x, y, z, подъ Ω_1 — угловую скорость и т. д.

Для разсматриваемаго случая, принявъ во вниманіе, что

$$\xi_1 = \frac{x_1}{t}, \qquad \xi_2 = \frac{x_2}{t}, \qquad \xi_3 = \frac{x_3}{t},$$

заключаемъ, что векторъ импульсовъ возрастаетъ пропорціонально времени, ибо уравненіе (61) даетъ

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = m^2 t^2;$$

поверхность $T_1 = H$ преобразуется въ поверхность

$$a_{14} x_1{}^2 + a_{25} x_2{}^2 + a_{36} x_3{}^2 + 2a_{24} x_1 x_2 + 2a_{35} x_2 x_3 + 2a_{16} x_1 x_3 = Ht^2,$$

а проекціи угловой скорости выразятся черезъ p_1, q_1, r_1 слѣдующимъ образомъ:

$$p = tp_1, \qquad q = tq_1, \qquad r = tr_1.$$

Но предыдущія сужденія останутся справедливыми, если будемъ разсуждать не надъ неизмѣняемыми поверхностями (61), а надъ поверхностями, измѣняющимися въ теченіе времени такъ, что радіусъ сферы и оси поверхности второго порядка возрастаютъ пропорціонально времени, такъ что послѣдняя остается подобною самой себѣ.

Такимъ образомъ, движеніе, напримѣръ въ случаѣ эллипсоида, будетъ воспроизводиться такъ, что направленіе оси ζ'овъ будетъ постоянно проходить черезъ точки пересѣченія нѣкоторой линіи на эллипсоидѣ, непрерывно и подобно возрастающемъ, съ такимъ-же образомъ увеличивающейся сферой. Линія эта будетъ все болѣе и болѣе расширяться, а угловая скорость будутъ безпредѣльно возрастать. Въ частности это будетъ равномѣрно ускоренное вращательное движеніе, разсмотрѣнное въ предыдущихъ параграфахъ.

Что-же касается начала координатъ, то изъ уравненій (6) получимъ

$$\alpha = \beta = \text{const} = 0\,,$$

а изъ уравненія живой силы опредѣлимъ γ

$$\gamma = km^2t^2 + H.$$

Движеніе будетъ прямолинейное по оси ζ'овъ и равномѣрно ускоренное. Соотвѣтствуетъ оно, какъ видимъ изъ выраженія живой силы, допущенію, что поверхность измѣненныхъ массъ твердаго тѣла есть шаръ, и что импульсъ направленъ по оси ζ'овъ ($A=0$ по положенію).

Въ примѣненіи къ упомянутому въ предыдущемъ параграфѣ случаю, когда

$$2T = a_1(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2) + b_1x_1y_1 + b_2x_2y_2 + b_3x_3y_3 + c_1y_1{}^2 + c_2y_2{}^2 + c_3y_3{}^2$$

уравненія (60) принимаютъ весьма простой видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= (b_3 - b_2)\xi_2\xi_3\,, \\ \frac{d\xi_2}{dt_1} &= (b_1 - b_3)\xi_1\xi_3\,, \\ \frac{d\xi_3}{dt_1} &= (b_2 - b_1)\xi_1\xi_2\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (65)$$

причемъ, какъ и прежде

$$\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 = m^2\,;$$

а

$$T_1 = b_1\xi_1{}^2 + b_2\xi_2{}^2 + b_3\xi_3{}^2 = H$$

представляетъ поверхность второго порядка, оси которой совпадаютъ съ осями координатъ. Всѣ предыдущія разсужденія съ значительными упрощеніями примѣнимы, конечно, и въ данномъ случаѣ.

При этомъ ξ_1, ξ_2 и ξ_3 выразятся въ эллиптическихъ функціяхъ:

$$l\sin\mathrm{am}\lambda t_1\,, \qquad m\cos\mathrm{am}\lambda t_1\,, \qquad \text{и} \qquad p\Delta\mathrm{am}\lambda t_1\,.$$

Движеніе будетъ періодическое по отношенію къ t_1.

Если назовемъ черезъ w періодъ, то промежутокъ времени между двумя повтореніями движенія опредѣлится изъ равенства

$$\frac{\lambda(t+x)^2}{2}=\frac{\lambda t^2}{2}+w,$$

откуда

$$x=-t\pm\sqrt{t^2+\frac{2w}{\lambda}}\,.$$

Промежутокъ этотъ зависитъ отъ t и съ возрастаніемъ времени безпредѣльно убываетъ (и обратно).

Въ слѣдующей замѣткѣ я покажу, что это движеніе, вообще говоря, можетъ быть воспроизведено катаніемъ нѣкоторой деформирующейся поверхности втораго порядка по нѣкоторой извѣстнымъ образомъ перемѣщающейся въ пространствѣ плоскости.

О движеніи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости.

(СТАТЬЯ ВТОРАЯ).

В. А. Стеклова.

Въ предыдущей статьѣ я указалъ, что если поверхность измѣненныхъ массъ въ твердомъ тѣлѣ есть шаръ, то возможно движеніе, при которомъ

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0\,,$$

а ξ_i $(i = 1\,,\ 2\,,\ 3)$ опредѣляются при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= \xi_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} - \xi_3 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{d\xi_2}{dt_1} &= \xi_3 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{d\xi_3}{dt_1} &= \xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2} - \xi_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

интегралы которыхъ суть

$$\left.\begin{aligned} \xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 &= m^2\,, \quad (\alpha) \\ T_1 &= H\,, \quad (\beta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} 2T_1 &= a_{14}\xi_1{}^2 + a_{25}\xi_2{}^2 + a_{36}\xi_3{}^2 + 2a_{24}\xi_1\xi_2 + 2a_{35}\xi_2\xi_3 + 2a_{16}\xi_1\xi_3 \\ \text{и} \qquad tdt &= dt_1 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для нетяжелаго тѣла возможно подобное же движеніе, при которомъ всѣ y_i суть нули, а x_i опредѣлятся въ функціи t при помощи уравненій (1), если въ нихъ вмѣсто ξ_i поставимъ x_i, и t_1 замѣнимъ черезъ t (время).

При этомъ можно дать чисто геометрическое объясненіе этого движенія. Въ самомъ дѣлѣ, называя черезъ Ω угловую скорость движенія, и черезъ p, q, r, по прежнему, проекціи ея на оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, по предыдущему (преобразованіе Клебша), имѣемъ

$$p = \frac{\partial T}{\partial y_1}, \quad q = \frac{\partial T}{\partial y_2}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial y_3},$$

гдѣ T живая сила твердаго тѣла. Разумѣя теперь подъ ξ_i проекціи на координатныя оси, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, вектора производящихъ движеніе импульсовъ (величины x_i въ прежнемъ обозначеніи), и подъ t_1 время, будемъ пользоваться уравненіями (1), (2), (3). По предыдущему для разсматриваемаго движенія

$$p = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}, \quad q = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}, \quad r = \frac{\partial T_1}{\partial \xi_3} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Уравненіе (β) (2) при этомъ даетъ (смот. предыдущую статью)

$$\Omega \cos(m\Omega) = H \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Какъ было указано и раньше, уравненія (2), (4) и (5), а также соотношенія

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 &= 0 \\ \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 &= 0 \\ \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3 &= m \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

приводятъ къ слѣдующимъ положеніямъ:

1. Векторъ Ξ (опредѣляемый проэкціями ξ_1, ξ_2, ξ_3) сохраняетъ постоянную величину при движеніи тѣла (первое изъ уравненій (2)).

2. Векторъ этотъ сохраняетъ неизмѣнно свое направленіе въ пространствѣ, совпадая съ направленіемъ оси ζ'овъ.

3. Конецъ вектора Ξ лежитъ одновременно на шарѣ радіуса m (величина вектора) и на нѣкоторой поверхности втораго порядка (уравненія (2)), т. е. лежитъ на линіи пересѣченія этихъ поверхностей.

4. Угловая скорость въ любой моментъ времени направлена по нормали къ поверхности $T_1 = H$ въ точкѣ пересѣченія ея съ векторомъ Ξ.

5. Проекція угловой скорости Ω на направленіе вектора Ξ сохраняетъ постоянную величину.

Таковы геометрическія свойства разсматриваемаго движенія.

Отсюда прежде всего заключаемъ, что движеніе совершается такимъ образомъ, что точки линіи пересѣченія поверхностей (2), линіи (A), послѣдовательно проходятъ черезъ точку $\zeta = m$ оси ζ'овъ *). Поверхность (β) (2), вообще говоря, можетъ быть эллипсоидомъ или гиперболоидомъ.

Кривая (A) есть нѣкоторая сферическая кривая. Если поверхность (β) (2) есть эллипсоидъ, то эти кривыя охватываютъ меньшую или большую ось этого эллипсоида. Въ частности онѣ могутъ обращаться въ точки пересѣченія этихъ осей съ эллипсоидомъ, и въ этомъ случаѣ, очевидно изъ предыдущаго, получится вращательное движеніе вокругъ оси неизмѣннаго направленія. Кривая эта можетъ представлять также два круговыхъ сѣченія эллипсоида, пересѣкающихся по его средней оси. Получится также вращательное движеніе вокругъ оси неизмѣннаго направленія. Но въ первыхъ двухъ случаяхъ движеніе будетъ устойчиво, въ послѣднемъ неустойчиво, ибо круговыя сѣченія при сколь угодно маломъ возмущеніи (состоящемъ въ измѣненіи произвольныхъ постоянныхъ) обращаются въ кривыя, охватывающія или большую, или меньшую ось эллипсоида.

Въ случаѣ если поверхность (β) (2) — однополый гиперболоидъ, вышеупомянутыя кривыя (A) будетъ охватывать или меньшую изъ дѣйствительныхъ осей (меньшую ось горловаго эллипса), или мнимую ось, и въ частномъ случаѣ могутъ обратиться или въ точку пересѣченія первой оси съ поверхностью или въ круговыя сѣченія, пересѣкающіяся по большей оси горловаго эллипса. Въ этомъ случаѣ возможно вращательное движеніе вокругъ двухъ дѣйствительныхъ осей, причемъ движеніе вокругъ большей оси горловаго эллипса неустойчиво.

Если поверхность (β) (2) — двуполый гиперболоидъ, кривая (A) можетъ охватывать только дѣйствительную ось поверхности.

Въ частности она можетъ обратиться въ вершины поверхности, причемъ получится вращательное движеніе вокругъ оси неизмѣннаго направленія. Движеніе это будетъ устойчиво.

Все предыдущее относится къ движенію нетяжелаго тѣла.

Допуская теперь, что на тѣло дѣйствуетъ сила тяжести, по предыдущему имѣемъ, что поверхности (2) изъ неизмѣняемыхъ, сохраняя прежнее механическое значеніе, обращаются въ деформирующіяся такимъ образомъ, что поверхность β (2) измѣняется подобно себѣ пропорціонально времени, и радіусъ шара такимъ же образомъ возрастаетъ со временемъ. Предыдущее отчасти будетъ приложимо и къ разсматриваемому случаю. Именно, точки линіи пересѣченія вышеупомянутымъ образомъ деформирующихся поверхностей будутъ послѣдовательно проходить черезъ неизмѣнное направленіе вектора Ξ (величина котораго въ данномъ случаѣ возрастаетъ пропорціонально времени), и потому также возможны вращательныя движенія вокругъ осей неизмѣннаго направ-

*) Это одно изъ условій движенія, конечно, не опредѣляющее самаго движенія.

ленія, тѣхъ-же самыхъ, что и въ случаѣ нетяжелаго тѣла. Но всѣ эти движенія неустойчивы, какъ было замѣчено раньше (см. предыдущую статью).

Хотя для осей, соотвѣтствующихъ осямъ устойчиваго движенія нетяжелаго тѣла, направленіе угловой скорости послѣ возмущенія во все время послѣдующаго движенія не будетъ достаточно отклоняться отъ первоначальнаго направленія, но величина угловой скорости будетъ безпредѣльно возрастать съ теченіемъ времени и въ этомъ смыслѣ движеніе будетъ неустойчиво. При вращеніи вокругъ осей, соотвѣтствующихъ осямъ неустойчиваго вращенія нетяжелаго тѣла, эти движенія, конечно, и подавно неустойчивы.

Покажемъ теперь, что движенія эти для нетяжелаго тѣла могутъ быть воспроизведены катаніемъ нѣкоторой поверхности второго порядка съ центромъ въ началѣ координатъ по нѣкоторой неподвижной плоскости.

Назовемъ черезъ $\triangle_{ik}$ миноръ симметрическаго опредѣлителя

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{14}, & a_{24}, & a_{16} \\ a_{24}, & a_{25}, & a_{35} \\ a_{16}, & a_{35}, & a_{36} \end{vmatrix},$$

соотвѣтствующій i столбцу и k строкѣ, причемъ, очевидно, $\triangle_{ik} = \triangle_{ki}$

Рѣшая систему (4) относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\triangle_{11}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{12}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{13}}{\triangle} r \\ \xi_2 &= \frac{\triangle_{21}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{22}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} \\ \xi_3 &= \frac{\triangle_{31}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{32}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{33}}{\triangle} r \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Подставляя эти выраженія ξ_i въ уравненіе (α) (2), находимъ

$$(\triangle_{11}p + \triangle_{12}q + \triangle_{13}r)^2 + (\triangle_{21}p + \triangle_{22}q + \triangle_{23}r)^2 + (\triangle_{31}p + \triangle_{32}q + \triangle_{33}r)^2 = \triangle^2 m^2 \quad (8)$$

уравненіе эллипсоида, если будемъ разсматривать p, q, r какъ координаты нѣкоторой точки.

Подставивъ ξ_i, выраженныя черезъ p, q, r въ уравненіе (β) (2), имѣемъ

$$2T_1 = p\left(\frac{\partial T_1}{\partial p}\right) + q\left(\frac{\partial T_1}{\partial q}\right) + r\left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right),$$

гдѣ скобки означаютъ, что въ T_1 вмѣсто ξ_i занесены ихъ выраженія черезъ p, q, r. Отсюда

$$2T=p(\triangle_{11}p+\triangle_{12}q+\triangle_{13}r)+q(\triangle_{21}p+\triangle_{22}q+\triangle_{23}r)+r(\triangle_{31}p+\triangle_{32}q+\triangle_{33}r)=H_1\triangle \quad (9)$$

гдѣ H_1 постоянная.

Разсмотримъ теперь поверхность втораго порядка.

$$\triangle_{11}x^2+\triangle_{22}y^2+\triangle_{33}z^2+2\triangle_{12}xy+2\triangle_{13}xz+2\triangle_{23}yz=k\,, \quad (10)$$

разумѣя подъ k нѣкоторую постоянную.

Несомнѣнно прежде всего, что радіусъ векторъ этой поверхности, совпадающій по направленію съ направленіемъ угловой скорости, по величинѣ пропорціоналенъ ей.

Координаты конца этого радіуса будутъ

$$x_1=\frac{r_1}{\Omega}p\,,\quad y=\frac{r_1}{\Omega}q\,.\quad z=\frac{r_1}{\Omega}r\,,$$

гдѣ r_1 длина радіуса, а потому

$$r_1{}^2=\frac{k\Omega^2}{H_1\triangle} \text{ или } r_1=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{H_1\triangle}}\Omega\,, \quad \ldots\ldots (11)$$

откуда и слѣдуетъ вышесказанное.

Не трудно далѣе видѣть при помощи уравненія (9), что плоскость касательная къ поверхности (10) въ точкѣ пересѣченія ея съ угловой скоростью перпендикулярна къ вектору Ξ. Доказательство совершенно тоже, конечно, что и для эллипсоида Пуансо.

Такимъ образомъ находимъ, что косинусы угловъ перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на плоскость касательную къ поверхности (10) въ точкѣ пересѣченія ея съ направленіемъ угловой скорости, съ осями координатъ, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ, будутъ соотвѣтственно

$$\cos(Px)=\frac{\xi_1}{m}\,,\quad \cos(Py)=\frac{\xi_2}{m}\,,\quad \cos(Pz)=\frac{\xi_3}{m}\,,$$

откуда и слѣдуетъ вышесказанное (P обозначаетъ направленіе перпендикуляра). Разстояніе-же h этой плоскости отъ начала координатъ (длина перпендикуляра къ ней) будетъ

$$h=k\frac{H}{m} \text{ *)}.$$

---

*) Поверхности β (2) и (10), изъ которыхъ вторая имѣетъ коэффиціентами миноры дискриминанта первой, могутъ быть названы взаимными. Онѣ обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что радіусъ векторъ одной въ какой-либо ея точкѣ параллеленъ нормали ко второй въ точкѣ пересѣченія ея съ радіусомъ векторомъ, параллельнымъ нормали къ первой въ первой точкѣ.

А такъ какъ векторъ Ξ не измѣняетъ своего направленія въ пространствѣ (и своей величины), то плоскость эта неподвижна въ пространствѣ. Такъ какъ поверхность (10) всегда касается этой плоскости въ точкѣ пересѣченія ея съ угловой скоростью, то движеніе тѣла можетъ быть воспроизведено катаніемъ этой поверхности безъ скольженія по вышеупомянутой плоскости.

Полодію этой поверхности можно получить на основаніи вышеприведенныхъ положеній. Проводя въ точкахъ кривой (A) непрерывный рядъ плоскостей, касательныхъ къ поверхности (β) (2), и опуская послѣдовательно перпендикуляры на эти плоскости изъ начала координатъ (центра поверхности), получимъ коническую поверхность, представляющую аксоидъ (C) мгновенныхъ осей. Линія пересѣченія этого конуса съ поверхностью (10) и дастъ полодію. Опредѣливъ эрполодію по методу Пуансо, найдемъ неподвижный аксоидъ мгновенныхъ осей (D). Катаніемъ конуса (C) по конусу (D) также, какъ извѣстно, опредѣлится движеніе твердаго тѣла.

Предыдущія разсужденія, понятно, относятся къ движенію нетяжелаго твердаго тѣла въ жидкости. Если же на тѣло дѣйствуетъ сила тяжести, то, по предыдущему, поверхность (10) обращается въ деформирующуюся подобно самой себѣ, а плоскость касательная къ ней въ точкѣ пересѣченія ея съ мгновенной осью перемѣщается равномѣрно по оси ζ'овъ, оставаясь перпендикулярной къ ней, и движеніе воспроизведется катаніемъ вышеупомянутой поверхности по этой плоскости; угловая скорость при этомъ будетъ безпредѣльно возрастать съ теченіемъ времени. Отсюда понятно замѣчаніе, сдѣланное въ концѣ предыдущей статьи. Промежутки времени между повтореніями движенія будутъ убывать только въ силу того, что вращательная скорость безпредѣльно возрастаетъ.

Поверхность (10) въ разсматриваемомъ случаѣ можетъ быть не только эллипсоидомъ, но какою угодно центральною поверхностью второго порядка. Получается обобщенный случай движенія Пуансо, (который разсматривалъ только катаніе эллипсоида по неподвижной плоскости), разсмотрѣнный, между прочимъ, въ примѣчаніяхъ Darboux къ механикѣ Despeyrous (Despeyrous. Cours de Michanique. Note par Darboux. p. 494 etc).

Предыдущія сужденія могутъ быть основаны на одномъ общемъ свойствѣ двухъ поверхностей втораго порядка

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и

$$\triangle_{11}x^2 + \triangle_{22}y^2 + \triangle_{33}z^2 + 2\triangle_{12}xy + 2\triangle_{13}xz + 2\triangle_{23}yz = h \cdot \quad . \quad (2)$$

Коэффиціенты второй поверхности суть миноры дискриминанта коэффиціентовъ функціи, представляющей лѣвую часть уравненія (1), т. е. миноры опредѣлителя

$$\triangle = \begin{vmatrix} a, & d, & e \\ d, & b, & f \\ e, & f, & c \end{vmatrix}$$

Причемъ $\triangle_{ik}$ миноръ i'аго столбца и k'ой строки и $\triangle_{ik} = \triangle_{ki}$ (очевидно). Возьмемъ какую либо точку (x, y, z) поверхности (1). Назвавъ ея первый дифференціальный параметръ въ этой точкѣ черезъ $\triangle_k$, найдемъ слѣдующія соотношенія для cosinus'овъ угловъ нормали къ ней въ этой же точкѣ, направленіе которой обозначимъ черезъ N_k

$$\left.\begin{aligned} \triangle_k \cos(N_k x) &= ax + dy + ez, \\ \triangle_k \cos(N_k y) &= dx + by + fz, \\ \triangle_k \cos(N_k z) &= ex + fy + cz. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Отложимъ отъ начала координатъ векторъ $\triangle_k$ по направленію нормали къ поверхности (1). Называя его проекціи на координатныя оси черезъ p, q. r, имѣемъ:

$$\triangle_k \cos(N_k x) = p = ax + dy + ez,$$
$$\triangle_k \cos(N_k y) = q = dx + by + fz,$$
$$\triangle_k \cos(N_k z) = r = ex + fy + cz.$$

Рѣшая эту систему относительно x, y, z, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\triangle_{11}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{12}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{13}}{\triangle} r, \\ y &= \frac{\triangle_{12}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{22}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} r, \\ z &= \frac{\triangle_{13}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{33}}{\triangle} r, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

или, называя черезъ r_k радіусъ векторъ поверхности (1) въ точкѣ x, y, z, получаемъ

$$\left.\begin{aligned} r_k \cos(r_k x) &= \frac{\triangle_{11}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{12}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{13}}{\triangle} r, \\ r_k \cos(r_k y) &= \frac{\triangle_{12}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{22}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} r, \\ r_k \cos(r_k z) &= \frac{\triangle_{13}}{\triangle} p + \frac{\triangle_{23}}{\triangle} q + \frac{\triangle_{33}}{\triangle} r. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Называя далѣе черезъ $\triangle_h$ первый дифференціальный параметръ поверхности (2), имѣемъ для опредѣленія cosinus'овъ угловъ нормали къ ней въ какой либо точкѣ (x, y, z):

$$\left.\begin{aligned}\triangle_h\cos(N_h x) &= \triangle_{11}x + \triangle_{12}y + \triangle_{13}z\,,\\ \triangle_h\cos(N_h y) &= \triangle_{12}x + \triangle_{22}y + \triangle_{23}z\,,\\ \triangle_h\cos(N_h z) &= \triangle_{13}x + \triangle_{23}y + \triangle_{33}z\,,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (6)$$

гдѣ N_h обозначаетъ направленіе нормали.

Примѣнимъ эти формулы къ точкѣ пересѣченія поверхности (2) съ векторомъ $\triangle_k$. Координаты этой точки опредѣлятся изъ пропорціи

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{r_h}{\triangle_k},$$

гдѣ r_h радіусъ векторъ поверхности (2) въ точкѣ пересѣченія ея съ векторомъ $\triangle_k$, такъ что

$$x = \frac{r_h}{\triangle_k}\,p\,, \qquad y = \frac{r_h}{\triangle_k}\,q\,, \qquad z = \frac{r_h}{\triangle_k}\,r\,.$$

Вслѣдствіе этого выраженія (6) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned}\triangle_h\cos(N_h x) &= \frac{r_h}{\triangle_k}(\triangle_{11}p + \triangle_{12}q + \triangle_{13}r),\\ \triangle_h\cos(N_h y) &= \frac{r_h}{\triangle_k}(\triangle_{12}p + \triangle_{22}q + \triangle_{23}r),\\ \triangle_h\cos(N_h z) &= \frac{r_h}{\triangle_k}(\triangle_{12}p + \triangle_{23}q + \triangle_{33}r).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (7)$$

Сравнивая выраженія (7) съ (5), находимъ

$$r_k\triangle\cos(r_k x) = \frac{\triangle_h\triangle_k}{r_h}\cos(N_h x)\,,$$

$$r_k\triangle\cos(r_k y) = \frac{\triangle_h\triangle_k}{r_h}\cos(N_h y)\,,$$

$$r_k\triangle\cos(r_k z) = \frac{\triangle_h\triangle_k}{r_h}\cos(N_h z)\,,$$

а отсюда

$$\frac{\cos(r_k x)}{\cos(N_h x)} = \frac{\cos(r_k y)}{\cos(N_h y)} = \frac{\cos(r_k z)}{\cos(N_h z)} = \frac{\triangle_h \triangle_k}{r_k . r_h . \triangle} \quad \ldots\ldots (8)$$

Причемъ $\dfrac{\triangle_h \triangle_k}{r_k . r_h . \triangle} = 1$.

Соотношенія (8) показываютъ, что *поверхности (1) и (2), которыя могутъ быть названы взаимными, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что радіусъ векторъ одной въ какой-либо ея точкѣ параллеленъ нормали ко второй въ точкѣ пересѣченія ея съ ея радіусомъ векторомъ, параллельнымъ нормали къ первой въ первой точкѣ.*

Если при движеніи послѣдовательныя точки пересѣченія поверхности (1) со сферой радіуса $r_k = \text{const}$ проходятъ черезъ неизмѣнное направленіе этого радіуса въ пространствѣ, то направленіе касательной плоскости въ точкѣ пересѣченія поверхности (2) съ направленіемъ угловой скорости движенія остается неизмѣннымъ въ пространствѣ. Такъ какъ при этомъ

$$r_h \cos(\Omega\Xi) = \text{const}\,,$$

(ибо направленіе угловой скорости совпадаетъ съ направленіемъ r_h) и по предыдущему

$$\Omega \cos(\Omega\Xi) = \text{const}\,,$$

то r_h пропорціоналенъ угловой скорости движенія и, слѣдовательно, движеніе можетъ быть воспроизведено катаніемъ поверхности (2) по вышеупомянутой неподвижной плоскости для нетяжелаго тѣла.

Ueber eine Polhöhenbestimmungsmethode.

von G. Lewitzky.

§ 1.

Die Frage nach der Veränderlichkeit der Polhöhen wird in der letzten Zeit sehr lebhaft discutirt und man hat schon einige Beispiele periodischer und seculärer Schwankungen der Erdachse wenigstens mit einem sehr hohen Grade von Wahrscheinlichkeit durch Beobachtungen gefunden. Meistentheils hat man dabei die Horrebow-Talcott'sche Methode der Polhöhenbestimmungen benutzt. Allerdings ist diese Methode in vielen Fällen gerade die vortheilhafteste — doch erfordert sie einerseits ein ziemlich kostspieliges instrumentales Hilfsmittel wie die Mikrometerschraube und andererseits reichen die Sterne des Berliner Jahrbuchs sehr oft für die Auswahl der Paare nicht aus, was eine nicht unbedeutende Mehrarbeit bei der Vorausberechnung der Beobachtungsephemeride verursacht. Deswegen wird es vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein eine zwar längst bekannte, aber bis jetzt nur wenig benutzte Polhöhenbestimmungsmethode noch ein Mal in Erinnerung zu bringen, die, wie es scheint, nahezu dieselbe Genauigkeit der Beobachtungen zu erreichen erlaubt, wie die Harrebow-Talcott'sche, jedoch keine Mikrometerschraube erfordert und für deren Anwendung die Sterne des Berliner Jahrbuchs gewöhnlich volkommen genügen.

Die Auslegung der fraglichen Methode findet man unter anderem bei *Chauvenet*, A manual of Spher. and practic. Astron., Vol. I, pp. 277 und folg. Bei uns in Russland wurde diese Methode in lezterer Zeit durch Herrn Pewtzow mit Erfolg bearbeitet und angewandt (Siehe *М. В. Пѣвцовъ*, Объ опредѣленіи географической широты по соотвѣтствующимъ высотамъ двухъ звѣздъ. Записки Имп. Русск. Геогр. Общ. Т. XVII, № 5 СПБ. 1887). Leider hatte das von H. Pewtzow benutzte sonst sehr gute Universalinstrument von Kern in Aarau ein zu wenig empfindliches Niveau und war, daher der Beobachter nicht im Stande die volle Kraft der angewandten Polhöhenbestimmungsmethode, die ich kurzweg als Pewtzow'sche bezeichnen werde, auszunutzen. In der Absicht, diese Methode mit einem feineren Niveau zu prüfen, habe ich im Sommer 1890 eine kleine Reihe Breitenbestimmungen gemacht und beabsichtige in folgendem die Resultate dieser Beobachtungen mitzutheilen und somit ein Material zur Beurtheilung der Leistungsfähigkeit der Methode zu geben. Um aber diese Resultate mit den Resultaten der Beobachtungen nach der Horrebow-Talcott'schen Methode vergleichen zu können, muss ich einige Bemerkungen vorausschicken, welche sich bequem mit der Auseinandersetzung eines von mir bei der Bearbeitung der Beobachtungen benutzten Rechnungsverfahrens vereinigen lassen.

§ 2.

Bei den Beobachtungen nach der Pewtzow'schen Methode notirt man die Durchgänge zweier Sterne, eines im Norden, des anderen im Süden in der Nähe vom Meridian bei genau gleichen Zenitdistanzen durch ein Netz von Horizontalfäden, dessen Distanzen vom Mittelfaden nicht bekannt zu sein brauchen. Somit ist der Gebrauch des Kreises ebenso ausgeschlossen wie bei der Horrebow-Talcott'schen Methode.

Bezeichnet man mit z die gemeinsame Zenitdistanz beider Sterne im Momente der Durchgänge durch einen und denselben Faden, mit α', δ', t', α, δ, t — Rectascension, Declination und Stundenwinkel für den nördlichen und südlichen Stern und die gesuchte Breite mit φ, so bekommt man, aus den Gleichungen:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t,$$

$$1)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\delta \cos t - \cos\delta' \cos t'}{\sin\delta' - \sin\delta}.$$

Durch Einführung der Hilfsgrössen m und M, welche durch die Bedingungen:

$$m \sin M = \sin\frac{1}{2}(t' - t) \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$$

$$m \cos M = \cos\frac{1}{2}(t' - t) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$$

bestimmt sind, wird die Formel (1) in folgende umgewandelt:

$$2)\qquad \operatorname{tg}\varphi = m \cos\left[\frac{1}{2}(t' + t) - M\right]$$

Nach einer von den Formeln (1) und (2) müssen die Beobachtungen auf jedem Faden besonders berechnet werden. Sind aber die gegenseitigen Fadendistanzen nicht alzu gross (und geringe Fadendistanzen sind schon wegen der Verkürzung der Dauer des Durchganges des Sterns durch das Fadennetz sehr wünschenswerth), so kann man die obigen Formeln nur für einen, z. B. den mittleren, Faden benutzen, für andere Fäden aber Differenzialformeln anwenden. Solche Differenzialformeln sind leicht aus der Formel (1) oder (2) abzuleiten, doch ist jene, welche man aus (1) bekommt, für den practischen Gebrauch bequemer. Diese letztere Formel ist, bis zu den Gliedern dritter Ordnung:

$$3)\qquad \triangle\varphi = \frac{15\cos^2\varphi\cos\delta'}{\sin\delta' - \sin\delta}\sin t'\triangle t' - \frac{15\cos^2\varphi\cos\delta}{\sin\delta' - \sin\delta}\sin t\triangle t$$

$$+ 7.5\sin 1''\frac{15\cos^2\varphi\cos\delta'}{\sin\delta' - \sin\delta}\cos t'\triangle t'^2 - 7.5\sin 1''\frac{15\cos^2\varphi\cos\delta}{\sin\delta' - \sin\delta}\cos t\triangle t^2$$

$$- 37.5\sin^2 1''\frac{15\cos^2\varphi\cos\delta'}{\sin\delta' - \sin\delta}\sin t'\triangle t'^3 + 37.5\sin^2 1''\frac{15\cos^2\varphi\cos\delta}{\sin\delta' - \sin\delta}\sin t\triangle t^3 - \ldots;$$

wo $\triangle\varphi$ im Bogen und $\triangle t'$, $\triangle t$ in Zeitsecunden ansgedrückt sind.

Die Logarithmen sämtlicher in dieser Formel enthaltenen Grössen, mit Ausnahme von $\sin t'$, $\sin t$, einigen Constanten und verschiedenen Potenzen von $\triangle t'$ und $\triangle t$ sind schon aus der Berechnung nach der Formel (1) bekannt. Bezeichnet man:

$$\frac{15\cos^2\varphi\cos\delta'}{\sin\delta' - \sin\delta}\ \text{mit}\ a,\quad -\frac{15\cos^2\varphi\cos\delta}{\sin\delta' - \sin\delta}\ \text{mit}\ b,$$

und setzt die numerischen Coefficienten 7.5 $\sin 1''$ und $+37.5\ \sin^2 1''$ logarithmisch in die Formel (3) hinein, so bekommt man:

$$4)\quad \triangle\varphi = a\sin t'\triangle t' + b\sin t\triangle t + [5.56063-10]a\cos t'\triangle t'^2 + [5.56063-10]b\cos t\triangle t^2$$
$$+ [0.94518_n - 10]a\sin t'\triangle t'^3 + [0.94518_n - 10]b\sin t\triangle t^3 - \ldots$$

oder, wenn man, der Kürze halber, die Coefficienten, der Reihe nach, mit p, q, r, s, u, v bezeichnet:

$$4\ \text{bis})\quad \triangle\varphi = p\triangle t' + q\triangle t + r\triangle t'^2 + s\triangle t^2 + u\triangle t'^3 + v\triangle t^3 + \ldots$$

Die zwei ersten Glieder dieser Formel können auch unter folgender Form:

$$\frac{15\cos^2\varphi}{\sin\delta' - \sin\delta}\sin z\{\sin a'\triangle t' - \sin a\triangle t\}$$

wo a' und a die Azimuthe sind, geschrieben werden. Doch ist diese Form weniger bequem, da man die Azimuthe für jeden Abend besonders berechnen muss. Die Anwendung der Formel (4) kann nur dann von Nutzen sein, wenn nicht alle Glieder derselben jedesmal berechnet werden müssen. Nun ist es aber für die Genauigkeit der Beobachtungen nothwendig dieselben in möglichst kurzen Zeitintervallen zu vollenden. Dadurch erscheinen die geringen gegenseitigen Fadendistanzen von selbst geboten. Bei den ersten von mir gemachten Polhöhenbestimmungen bestand das Fadennetz aus 7, in nahezu gleichen Abständen von einander aufgespannten Fäden, deren gegenseitiger Abstand ungefähr 106″ ausmachte, so dass das grösste Zeitintervall zwischen den Durchgängen am Mittel- und Seitenfaden nicht mehr als 110^s betrug *). Auch bei solchen Fadendistanzen konnte die Berechnung nach der Formel (4), ohne Glieder 3 Ordnung nur höchstens um 0″01, also um eine ganz unmerkliche Grösse, für die äussersten Fäden fehlerhaft sein. Die ersten zwei Glieder der Formel (4) müssten dabei für die äusseren Fäden fünfstellig gerechnet werden. Um dies zu vermeiden, hauptsächlich aber um die Dauer der Durchgänge der Sterne durch das Fadennetz zu verkleinern, wurden nachher die Fadendistanzen noch um die Hälfte reducirt. Die Glieder der ersten zwei Ordnungen reichen also sogar für ziemlich grosse Fadendistanzen vollkommen aus. Es ist aber aus anderen, oben angedeuteten Gründen sehr vortheilhaft diese Distanzen möglichst klein zu nehmen.

Wurde ein und dasselbe Sternpaar viele Male in einem Jahre beobachtet, so braucht man die Glieder zweiter Ordnung nur einmal zu berechnen, da die Aenderungen dieser Glieder in Folge der Aenderungen der Differenzen $\triangle t$ und $\triangle t'$, Stundenwinkel t' und t und Declinationen δ' und δ zu gering sind und höchstens einen Fehler von 0″02 — 0″,03 für die aüssersten Fäden, also eine volkommen zu vernachlässigende Grösse verursachen können, da bei der Rechnung für jeden einzelnen Faden nur die Zehntelsecunden gesichert werden müssen. Bei den geringen Fadendistanzen brauchen die Coefficienten: $p = a \sin t'$ und $q = b \sin t$ auch nur ein Mal für das ganze Jahr berechnet zu werden, nur müssen für jeden Abend ihre Aenderungen in Folge der Aenderungen der Stundenwinkel (die durch Aenderungen der Declinationen hervorgerufenen Aenderungen sind zu vernachlässigen) besonders berechnet werden nach den Formeln:

$$5) \qquad \triangle p = 2r \triangle t', \quad \triangle q = 2s \triangle t.$$

Doch geschieht die jedesmalige Neuberechnung der Coefficienten p und q in so einfacher Weise, dass man durch den Gebrauh der Formeln (5) die Arbeit nur unbedeutend verkürzen wird.

Bei den Beobachtungen nach der Pewtzow's Methode, ebenso wie bei denen nach der Talcott'schen und bei Zeitbestimmungen nach der Zinger'shen

---

*) Die kleinsten Azimuthe waren dabei nur 13°.

muss die Collimationslinie des Instrumentes einen constanten Winkel mit der Lothrichtungslinie machen. Die etwaigen Aenderungen dieses Winkels während der Beobachtung jedes Paares, werden durch ein feines Niveau, welches mit der Horizontalachse in feste Verbindung gebracht werden muss, angezeigt. Die Correction der Beobachtungen wegen der Niveauänderungen kann in zweierlei Weise geschehen: entweder corrigirt man die Durchgangszeit nach der bekannten Formel:

$$\triangle t = \frac{\tau}{15 \cos\varphi \sin a} \tag{6}$$

wo τ — Niveauablesung, in Bogensecunden ausgedrückt, a — süd-westliches Azimuth des Sternes und $\triangle t$ — entsprechende Correction im Zeitmass; oder man berechnet zuerst φ mit uncorrigirten Durchgangszeiten und sucht dann die Correction dieser Breite nach der Formel (4), wozu natürlich die Glieder erster Ordnung genügen. Setzt man in diese Glieder nach (6):

$$\triangle t' = \frac{\tau'}{15 \cos\varphi \sin a'}, \quad \triangle t = \frac{\tau}{15 \cos\varphi \sin a}$$

und bezeichnet die gesuchte Correction mit I, so bekommt man:

$$I = \frac{\cos\varphi}{\sin\delta' - \sin\delta} \left\{ \frac{\cos\delta' \sin t'}{\sin a'} \tau' - \frac{\cos\delta \sin t}{\sin a} \tau \right\};$$

oder, nach leichter Transformation:

$$I = \frac{\cos\varphi \sin z}{\sin\delta' - \sin\delta} \left\{ \tau' - \tau \right\} \tag{7}$$

Da nur geringe Neigungen zulässig und die Aenderungen von z, δ' und δ während des ganzen Jahres unbedeutend sind, so kann man für jedes Paar den Coefficient: $\frac{\sin\varphi \sin z}{\sin\delta' - \sin\delta'}$ multiplicirt mit dem Winkelwerth eines Niveautheils (oder besser eines halben Niveautheils) nur einmal berechnen. Dann braucht man nur die Unterschiede der Niveauablesungen für jeden Stern mit diesem Coefficient zu multipliciren, um die gesuchte Correction I zu bekommen.

Nach den oben auseinandergesetzten Vorschriften geschieht die Berechnung der Beobachtungen nach der Pewtzow'schen Methode in einer sehr einfachen Weise, was wir später noch an einem Beispiele sehen werden. Nun wollen wir aber die Vergleichung beider Methoden von Pewtzow und Talcott in Bezug auf die a priori zu erwartende Genauigkeit der Resultate ausführen.

Geometrisch betrachtet ist die Bestimmung der Breite nach der Pewtzow'schen Methode nichts anderes als die Bestimmung der Lage des Zenits als des Schnittpunktes zweier Bogen, nämlich: des Meridians PZ und eines

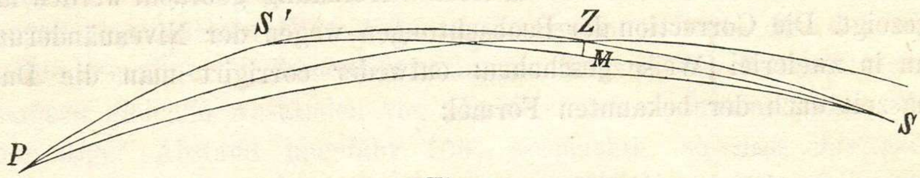


Fig. a.

grössten Kreises MZ (Fig. a und b), welcher senkrecht zu dem die Orte beider Sterne im Momente der Beobachtungen verbindenden Bogen des gr. Kr. $S'S$ in der Mitte desselben errichtet ist. Die Bestimmung wird also desto genauer,

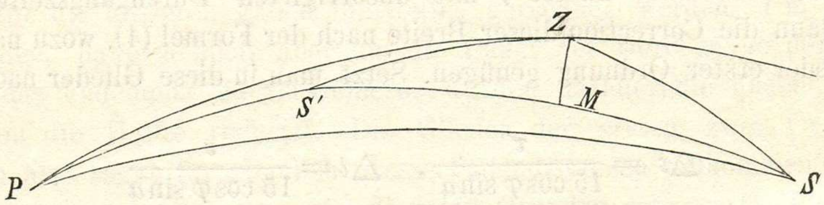


Fig. b.

je weniger der Winkel PZM (Fig a und b) von einem rechten sich unterscheidet. Bezeichnet man mit A′ und A die spitzen Azimuthe, von Norden und Süden nach beiden Seiten gerechnet, so sieht man (Fig a), dass für Sterne, welche auf beiden Seiten des Meridians sich befinden,

$$8) \qquad < PZM = 90^0 - \left(\frac{A' + A}{2}\right)$$

und für Sterne (Fig b), welche auf einer Seite des Meridians liegen:

$$8) \qquad < PZM = 90^0 + \left(\frac{A' - A}{2}\right)$$

Man sieht, dass bei gleichen spitzen Azimuthen die Bestimmung der Breite aus zwei Sternen, welche auf einer Seite des Meridians liegen, immer genauer, als im entgegengesetzten Falle ist. Da man bei der Vorausberechnung der Beobachtungsephemeride die Azimuthe beider Sterne jedenfalls berechnen muss, so wird man nicht unterlassen auch gleichzeitig den Winkel PZM, welcher als Genauigkeitsmass der Breitenbestimmung mit dem ausgewählten Sternpaar gelten kann, aus den Relationen (8) zu berechnen.

Die Sterne, welche auf beiden Seiten des Meridians liegen, werden also nur dann eine gute Bestimmung geben, wenn sie bei kleinen Azimuthen beobachtet sind. Die auf einer Seite des Meridians liegenden Sternpaare wären auch ganz brauchbar bei beliebigen, aber nur wenig von einander sich unterscheidenden Azimuthen, wenn hier nicht einige andere später zu erörternde Umstände, in Folge deren auch hier die Azimuthe eine gewisse Grenze nicht überschreiten dürfen, in Betracht kämen.

Bei meinen Beobachtungen hatte der massgebende Winkel PZM folgende Werthe:

Paar №	Massgebender Winkel
II	93° 25′
III	89 37
IV	84 35
VI	86 48
VII	92 48
VIII	91 5
IX	89 2
X	96 8
XI	84 16
XII	94 13
XIII	90 15

Wie man sieht, sind die Unterschiede dieser Winkel von 90° so gering, das dadurch keine merkliche Verminderung der Genauigkeit der Breitenbestimmung entstehen kann. Bei der Horrebow—Talcott'schen Methode ist dieser Winkel immer ein rechter, wenn die Beobachtungen im Meridian geschehen. In der That erscheint die Breitenbestimmung nach Talcott, bei gleich grossen Zenitdistanzen, als Grenzfall der Bestimmung nach Pewtzow (fig. *a* und *b*), wenn beide Azimuthe A' und A gleich Null werden. Bei verschiedenen Zenitdistanzen z' und z und bei sehr kleinen

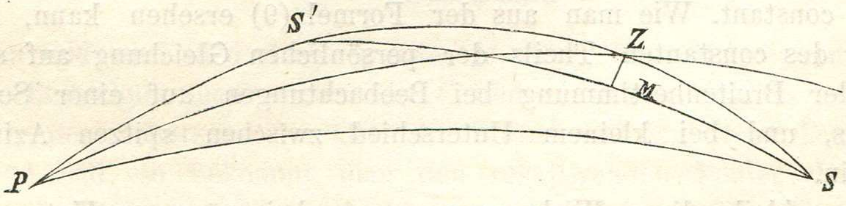


Fig. c.

Azimuthen wird die Lage des Zenits Z auf dem Meridian bestimmt durch den Schnittpunkt des letzteren mit dem Bogen MZ, welcher senkrecht zum Bogen des gr. Kr. $S'S$ (fig. *c*) errichtet ist; wobei die Abschnitte $S'M$ und SM bis auf die Grössen zweiter Ordnung den Zenitdistanzen z' und z gleich sind und der Winkel PZM bei verschwindenden Azimuthen in einen rechten uebergeht.

§ 4.

Jetzt gehen wir zur Vergleichung der Wirkung verschiedener Beobachtungsfehler auf die Genauigkeit der Breitenbestimmungen nach Pewtzow und Talcott über.

Da die Einstellungen auf die Sterne nach der letzteren Methode im Meridian oder in der Nähe desselben geschehen, so sind geringe Fehler in der Zeitbestimmung dabei ohne Belang. Aber, wie H. Pewtzow gezeigt hat (l. c. p. 7), einem Fehler $\triangle t$ in der Uhrcorrection entspricht ein Fehler in der Breite:

9) $$\triangle\varphi = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A - A')\cos\varphi\, 15\triangle t,$$

wenn beide Sterne auf einer Seite des Meridians beobachtet wurden und:

$$\triangle\varphi = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + A')\cos\varphi\, 15\triangle t$$

im entgegengesetzten Falle; d. h. bei Beobachtungen auf einer Seite des Meridians ist der betrachtete Fehler von der Grösse des Azimuths unabhängig und bei den geringen Unterschieden zwischen beiden (spitzen) Azimuthen, sogar bei ziemlich bedeutender Unsicherheit in der Uhrcorrection, ebenso wenig von Bedeutung wie auch bei Beobachtungen nach der Talcott'schen Methode.

Die persönlichen und zufälligen Fehler bei den Beobachtungen der Durchgänge der Sterne nach Pewtzow sind auch kaum nachtheiliger, als die zufälligen Einstellungsfehler für die Talcott'sche Methode. Persönliche Fehler setzen sich aus zwei verschiedenen Theilen zusammen: 1) aus constanten, oder nahezu constanten und 2) aus systematischen Fehlern, die ihren Grund in der Art und Weise haben, wie der Beobachter die Secunde (oder den Chronometerschlag) in Zehntel theilt. Diese letzteren Fehler sind für jedes Zehntel verschieden und, wie die Untersuchungen von Zinger, Boquet, Gonnessiat und and. gezeigt haben, für jeden Beobachter auch ziemlich constant. Wie man aus der Formel (9) ersehen kann, ist die Wirkung des constanten Theils der persönlichen Gleichung auf die Resultate der Breitenbestimmung bei Beobachtungen auf einer Seite des Meridians, und bei kleinem Unterschied zwischen spitzen Azimuthen sehr klein.

Übrigens bleibt diese Wirkung, wenn sie bei grösseren Unterschieden zwischen den Azimuthen auch eine merkliche Grösse erreicht, für alle Beobachtungen eines und denselben Paares constant. Für die Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhen ist also die Wirkung des constanten persönlichen Fehlers jedenfalls ohne Bedeutung. Es ist aber auch sehr wahrscheinlich, dass der constante Theil des persönlichen Fehlers thatsächlich auf die Breitenbestimmung nach Pewtzow gar keinen Einfluss hat, wenn man annimmt, dass die Durchgänge der Sterne bei

Breitenbestimmungen mit demselben costanten Fehler behaftet sind, wie die Durchgänge bei Zeitbestimmungen. Ganz besonders kann eine solche Annahme statthaft sein, wenn man, wie ich es gethan habe, die Zeitbestimmungen mit einem und demselben Instrument und Chronometer nach Zinger's Methode macht. Aenderungen des constanten Fehlers können dabei entstehen nur in Folge grösserer Verschiedenheiten in der Schnelligkeit der Bewegung der Sterne, was, wie auch einige andere Gründe, gegen die Breitenbestimmung bei zu kleinen Azimuthen spricht.

Der systematische Theil des persönlichen Fehlers, wie die Untersuchungen Zinger's (Н. Цингеръ. О личныхъ ошибкахъ въ астрономическихъ наблюденіяхъ. С.-Пб. 1873) und die Berechnung solcher Fehler nach Zinger's Formel aus den Beobachtungen der Pariser Astronomen und meinen eigenen (Astr. Nach. N 2981) gezeigt haben, kann manchmal die bedeutende Grösse von $0.^s1$ und sogar etwas mehr erreichen. Diese Fehler für die Durchgänge bei den Breitenbestimmungen etwa nach Zinger's Formel zu berechnen, wäre aber kaum möglich bei der Verschiedenheit in der Schnelligkeit der Bewegung der Sterne in verschiedenen Azimuthen. Die Resultate der Breitenbestimmungen werden aber durch diesen systematischen Fehler wenig afficirt, wenn man eine genügende Anzahl von Fäden (etwa 5—7) hat, um so mehr, als hier der von Gonnessiat bemerkte Missbrauch der Mechaniker in der Auswahl von Fädendistanzen (Bulletin Astronomique T. VI p. p. 471, 472) ohne Nachtheil ist.

Zufällige Fehler bei Durchgangsbeobachtungen hängen hauptsächlich von der Grösse des Winkels ab, innerhalb dessen die Bewegung des Sternes für das gegebene Auge und Instrument unmerklich bleibt. Bezeichnet man die Grösse dieses Unsicherheitswinkels, in Bogensecunden ausgedrückt, mit ε_0, so kann der zufällige Fehler des beobachteten Durchgangs durch einen Horizontalfaden nur höchstens die Grösse

$$\triangle t = \frac{\varepsilon_0}{15 \cos\varphi \sin a}$$

erreichen und wird also desto grösser, je näher vom Meridian man beobachtet. Bezeichnet man weiter mit ε' und ε die thatsächlich gemachten Fehler in der Schätzung der Orte der Sterne während ihrer Durchgänge Nord und Süd, so bekommt man den resultirenden Fehler der Breite auf ähnliche Weise, wie die Correction wegen der Neigung (For. 7), und zwar:

$$\frac{\cos\varphi \sin z}{\sin\delta' - \sin\delta} \left\{ \varepsilon' - \varepsilon \right\}$$

Ist (ε) der mittlere Werth von ε, so wird der mittlere Fehler der Breite durch:

$$\triangle\varphi = \pm \frac{\cos\varphi \sin z}{\sin\delta' - \sin\delta} \sqrt{2} \,.\, (\varepsilon)$$

oder, nach einfacher Umgestaltung, durch:

$$10) \qquad \triangle\varphi = \pm \frac{\sqrt{2}(\varepsilon)}{\cos a - \cos a'}$$

dargestellt. Setzt man in diese Formel die spitzen Azimuthe, so bekommt man eine Formel, welche mit der Formel (IX) von H. Pewtzow (l. c. p. 8) gleichbedeutend ist.

Nimmt man als äusserste Grenze für die spitzen Azimuthe Nord und Süd 30^0 an, so liegt der Wert des Coefficienten: $\frac{1}{\cos a - \cos a'}$ zwischen 0.5 und 0.577. Also ist die Wirkung des zufälligen Dnrchgangsfehlers hier practisch kaum grösser als die Wirkung des zufälligen Einstellungsfehlers bei den Beobachtungen nach Talcott. Wenn man sogar die Grenze der Azimuthe bis zu 40^0 erweitert, was aus manchen Gründen wünschenswerth erscheint, so wird der Coeff.: $\frac{1}{\cos a - \cos a'}$ nur die Grösse 0,653 erreichen. Dass die Wirkung der zufälligen Durchgangsfehler (nach Form. 10) von der Grösse des Azimuths in den zuerst angegebenen Grenzen beinahe unabhängig ist, zeigen die Beobachtungen von H. Pewtzow ebenso, wie die meinigen.

Wie auch H. Pewtzow bemerkt, hat die etwaige Unsicherheit in dem Werthe eines Niveautheils bei den Beobachtungen nach seiner Methode beinahe dieselbe Bedeutung, wie bei den Beobachtungen nach der Talcott'schen.

Aus d. For. (7), die man auch so schreiben kann:

$$11) \qquad I = \frac{\tau' - \tau}{\cos a - \cos a'}$$

sieht man, wie oben, dass für Azimuthe bis 30^0 der Coefficient von $\tau' - \tau$ höchstens den Werth von 0.577 erreichen kann. Dasselbe gilt auch selbstverständlich in Bezug auf die Aenderungen der Refraction und auf die kleinen durch das Niveau nicht angezeigten Aenderungen der Lage des Fernrohrs, welche z. B. in Folge der Torsion der Achse und dergl. eintreten können.

Aus der oben citirten Abhandlung von H. Pewtzow entnehmen wir, in etwas abgeänderter Form, den folgenden Ausdruck für den aus den Fehlern der Declinationen $\triangle\delta$ und $\triangle\delta'$ resultirende Fehler in der Breite:

$$12) \qquad \triangle\varphi = \frac{\cos\omega \, . \, \triangle\delta - \cos\omega' \, . \, \triangle\delta'}{\cos a - \cos a'}$$

wo ω und ω' die parallaktischen Winkel für den südlichen und nördlichen Stern sind. Für den südlichen Stern ist der Werth von $\frac{\cos\omega}{\cos a - \cos a'}$ von 0.5 wenig verschieden, d. h. ein Fehler in der Declination dieses Sternes hat dieselbe Wirkung, wie bei der Talcott'schen Methode. Dagegen wird für den nördlichen Stern der Coefficient $\frac{\cos\omega'}{\cos a - \cos a'}$, in der Nähe von der Elongation sehr klein und in der Elongation selbst gleich Null. Wenn also der nördliche Stern in der Nähe der Elongation beobachtet wird, so hat, bei sonst gleichen Verhältnissen, die Pewtzow'sche Methode einen nicht unwesentlichen Vorzug vor der Talcott'schen. Man kann nämlich für genaue Bestimmungen der Breite auch weniger zuverlässige Quellen für die nördlichen Sterne benutzen, wenn man nur diese Sterne in der Elongation beobachtet.

Die Beobachtungen in der Elongation sind noch aus dem Grunde sehr vortheilhaft, weil der Stern dabei fast keine Bewegung im Azimuthe hat. In Folge dessen kann man vielleicht zwischen den Azimuthen 30^0 und 40^0 auch zuverlässige Bestimmungen bekommen, wenn man dabei die nördlichen Sterne nur in Elongationen nimmt. Die Differenz zwischen dem nördlichen und südlichen spitzen Azimuth darf nur sehr klein sein (vergl. For. 8).

Die Wirkung der Fehler in den Rectascensionen der Sterne kann aus den ersten zwei Gliedern der Reihe (4) bestimmt werden. Bei Beobachtungen auf einer Seite des Meridians tritt die grösste Wirkung ein, wenn die Fehler beider Rectascensionen entgegengesetzen Zeichens sind. Nehmen wir in diesem Falle für den numerischen Werth beider Fehler 0″3 an, so findet man den entsprechenden Fehler der Breite für $A = A' = 30^0$ und $\varphi = 30^0$, nach der Formel von H. Pewtzow (l. c. p. 19):

$$\triangle\varphi = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + A')\cos\varphi\,\triangle t\,,$$

$$\text{gleich } \triangle\varphi = 0''17$$

Für dieselbe Breite, aber für die gleichen spitzen Azimuthe zu 40^0 erhält man: $\triangle\varphi = 0''22$.

§ 5.

Aus der soeben gemachten Vergleichung der Pewtzow'schen und Talcott'schen Methode ergiebt sich, dass die erste in keiner Beziehung der zweiten irgend wie merklich nachsteht. Die Wirkung der Fehler in Rectascensionen, welche in der Talcott'schen Methode nicht vorkommt, wird in vielen Fällen durch die mehr oder weniger verminderte Wirkung des gefährlicheren Fehlers in der Declination des nördlichen Sternes compensirt. Ausserdem haben diese Fehler eine constante Wirkung auf alle Beobachtungen desselben Paares und werden also bei den Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhen mit anderen constanten Fehlern in der bekannten Weise eliminirt.

Somit scheint erwiesen zu sein, dass a priori beide Methoden der Breitenbestimmungen dieselbe oder nahezu dieselbe Genauigkeit der Resultate versprechen.

Nun kommen ausserdem zu Gunsten der Pewtzow'schen Methode noch drei nicht unwesentliche Umstände hinzu: 1) die Methode von Pewtzow erfordert nur geringe, sehr billige und ueberall leicht herzustellende Aenderungen in der gewöhnlichen Einrichtung der transportabelen Instrumente, 2) nach dieser Methode geschehen die Beobachtungen nicht in einer Richtung des Meridians, sondern in verschiedenen Richtungen, die innerhalb des Winkelraums von mindestens 60^0 nach Norden und Süden liegen, wodurch man im Mittel aus vielen Bestimmungen eine vollständigere Elimination der zufälligen und örtlichen Störungen in der Refraction, als bei der Talcott'schen Methode erwarten kann; und 3) für ein nicht allzu lichtschwaches Fernrohr, welches schon aus anderen Gründen für die Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhen nicht zu gebrauchen ist, kann man in den meisten Fällen eine genügende Anzahl von Paaren unter den Berliner Jahrbuch-Sternen auswählen. Nur selten wird es nothwendig sein, eine sehr geringe Anzahl meist nördlicher Sterne aus anderen Quellen zu entnehmen.

§ 6.

Als Beispiel der Anwendung der im § 2 auseinandergesetzten Rechnungsvorschriften führe ich hier in extenso die Berechnung eines am 30 Juni beobachteten Paars an, wobei ich absichtlich einen Fall einer sehr starken Neigung auswähle, um die Grenzen der Anwendbarkeit der Formel (7) zu zeigen. Dem Beobachtungsjournal entnehme ich folgende Zahlen:

☾ *30 Juni 1890.*

Chronometer Dent 1559*.

Paar № XI.

	4 H. Draconis	β Serpentis
	$16^h\,47^m\,11^s.00$	$16^h\,56^m\,16^s.50$
	47 28 .50	56 27 .75
	47 45 .75	56 38 .85
	48 3 .75	56 50 .10
	48 21 .15	57 1 .45
	48 38 .70	57 12 .65
	48 56 .20	57 23 .60
Neigung in halben Niveautheilen	+ 0.65	+ 7.80

Die Durchgangszeiten sind bei den Beobachtungen in Theilen des Chronometerschlags (0^s 5) angeschrieben. Oben sind sie schon, in Secunden verwandelt, angegeben. Die an diesen Durchgangszeiten anzubringenden Correctionen sind:

	4 H. Draconis	β Serpentis
Corr. Dent.	$-\ 3^m 4^s.35$	$-\ 3^m 4^s.37$
tägl. Aberr.	$-\ 0.02$	$-\ 0.02$

und, wenn man die Neigungscorrection nach der Formel 6) an die Durchgangszeiten anbringen will, noch:

Neigung	$+\ 0^s.17$	$+\ 1^s.26$

Die Rechnung für den Mittelfaden mit der zuletzt angegebenen Correction und ohne dieselbe geschieht weiter, wie folgt:

Nord	Süd	4 H. Draconis	β Serpentis
α'	α	$12^h\ 7^m\ 2^s.33$	$15^h\ 41^m\ 8^s.10$
δ'	δ	$+78^0\ 13'\ 56''.2$	$+15^0\ 46'\ 1''.9$
	lg sub		0.1412000
lg cos δ'	lg sin δ	9.3095121	9.9907749
lg cos δ	lg sin δ	9.9833438	9.4341365
	arg.		9.5566384
lg (sin δ' — sin δ)			9.8495749

	Mit Correction nach Form. (6)	Ohne Correction
s'	$16^h\ 44^m\ 59^s.55$	$16^h\ 44^m\ 59^s.38$
t'	4 37 57 .22	4 37 57 .05
s	16 53 46 .97	16 53 45 .71
t	1 12 38 .87	1 12 37 .61
lg sin t'	9.97155	9.97155
lg a	0.25211	0.25211
lg cos t'	9.5445600	9.5445744
lg cos t	9.9778055	9.9778186
lg b	0.92594_n	0.92594_n
lg sin t	9.49373	9.49362
lg sub	0.0353392	0.0353393
lg cos t cos δ	9.9611493	9.9611624
lg cos t' cos δ'	8.8540721	8.8540865
arg	1.1070772	1.1070759
lg (cos t cos δ — cos t' cos δ')	9.9258101	9.9258231
lg tg φ lg tg φ_0	0.0762352	0.0762482
φ_0		$50^0\ 0'\ 14''.44$
Neigungscorr. (For. 7)		-3.05
φ	$50^0\ 0'\ 11''40$	$50\ 0'\ 11''39$

Aus der obigen Berechnung sind dann, mit Ausnahme eines Constanten, sämmtliche für die Berechnung von p, q, r und s nöthigen Logarithmen zu entnehmen. Die weitere Rechnung geschieht, wie folgt:

$p = \lg a \sin t'$	0.2237	0.2237
$q = \lg b \sin t$	0.4197_n	0.4196_n
$\lg a \cos t'$	9.7967	9.7967
$\lg b \cos t$	0.9038_n	0.9038_n
$\lg r$	5.3573	5.3573
$\lg s$	6.4644_n	6.4644_n

$\lg\triangle t'$	$\lg\triangle t$	$\lg\triangle t'^2$	$\lg\triangle t^2$	$p\triangle t'$	$q\triangle t$	$r\triangle t'^2$	$s\triangle t^2$
$1_n 7222$	$1_n 5263$	3.4444	3.0526	$-88''29$	$+88.31$	$+0.06$	-0.33
$1_n 5471$	$1_n 3493$	3.0942	2.6986	-58.99	$+58.75$	$+0.03$	-0.15
$1_n 2553$	$1_n 0512$	2.5106	2.1024	-30.13	$+29.57$	$+0.01$	-0.04
1.2405	1.0550	2.4810	2.1100	$+29.12$	-29.83	$+0.01$	-0.04
1.5435	1.3531	3.0870	2.7062	$+58.51$	-59.26	$+0.03$	-0.15
1.7197	1.5250	3.4394	3.0500	$+87.78$	-88.04	$+0.06$	-0.33

$\triangle\varphi$
$-0''.25$
$-0\ .36$
$-0\ .59$
$-0\ .74$
$-0\ .87$
$-0\ .53$
$-0''.48$

Addirt man die durch 7 dividierte Summe aller $\triangle\varphi$ zu dem oben berechneten Werth von φ, so bekommt man im Mittel aus allen 7 Fäden:

$$\varphi = 50^0\,0'\,10''.92$$

Am 17 Juni waren die Glieder zweiter Ordnung (für die erste Beobachtung desselben Paars):

$r\triangle t'^2$	$s\triangle t^2$
$+0''06$	$-0''32$
$+0.03$	-0.14
$+0.01$	-0.03
$+0.01$	-0.04
$+0.03$	-0.15
$+0.06$	-0.33

Man könnte also, wie ich auch gewöhnlich verfahren habe, die Glieder zweiter Ordnung nur einmal berechnen.

§ 7.

Die Breitenbestimmungen nach der Pewtzow'schen Methode wurden von mir in dem Zeitraum vom 13 Mai bis 2 Juli 1890 ausgeführt. Vor dem 17 Juni wurden übrigens nur einzelne Beobachtungen gemacht. Nach dieser Zeit waren aber die meteorologischen Verhältnisse ausserordentlich ungünstig. Es regnete sehr oft, besonders in den Tagesstunden: dann heiterte sich am Abend der Himmel auf und bei der darauf folgenden raschen Abkühlung der Luft und besonders des Instruments, bedeckten sich die Gläser und das Niveau mit Thautropfen, so dass es nicht selten nothwendig war dieselben während der Beobachtungen abzuwischen, um Sterne zu sehen und das Niveau ablesen zu können. Da aber die Prüfung der Pewtzow'schen Methode den Hauptzweck meiner Beobachtungen bildete, so setzte ich dieselben, trotz des Thaues und schlechter, unruhiger Bilder, so lange fort, bis Nebel oder Wolken die Sterne ganz unsichtbar machten.

Die Zeit-und Breitenbestimmungen habe ich, wie früher erwähnt, mit einem und demselben Instrument—einem Repsold'schen transportabelen Verticalkreis—ausgeführt. Dieses, obwohl ziemlich alte (im Jahre 1865 verfertigte), aber in seinen wesentlichen Theilen noch gut erhaltene Instrument *), war leider, vielleicht in Folge theilweiser Erblindung der Gläser, sehr lichtschwach, so dass Sterne unter 5^{ter} Grösse schon sehr schwer und nur bei gutem Luftzustande zu beobachten waren. Die freie Objectivöffnung des Fernrohrs betrug 47 Millimeter, Vergrösserung 55. Wie alle Instrumente ähnlicher Construction, hatte auch dieser Verticalkreis keine Vorrichtung zum Festklemmen des Niveau mit der Horizontalachse. Da aber das Niveau an einem um die Horizontalachse drehbaren Rahmen befestigt war, so liess sich eine solche Vorrichtung sehr leicht und einfach, sogar ohne Hilfe eines geschickten Mechanikers, hier in Charkow herstellen. Die Durchgänge der Sterne wurden nach Aug' und Ohr Methode mit einem alten Dent'schen Sternzeit-Boxchronometer beobachtet, wobei nicht Secunden, sondern Chronometerschläge gezählt wurden. Der Gang des Chronometers war kein guter und zeigte eine merkliche Abhängigkeit von der Temperatur. Die mittleren täglichen Gänge zwischen den Beobachtungstagen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Datum.	Mitt. täg. Gang.
1890 Mai 12.551	
	—1ˢ.304
„ 13.584	
	—1 .729
„ 21.568	
	—1 .583
„ 22.540	
	—1 .782
„ 29.615	
	—1 .813
„ 30.602	
	—1 .853
„ 31.516	

*) Nur die Leistung der Druckfedern an den Einstellungsschrauben lässt viel zu wünschen übrig.

Datum.	Mitt. täg. Gang.
1890 Juni 12.637	—1 .551
„ 17.666	—0 .869
„ 18.643	—0 .833
„ 22 676	—0 .655
„ 23.690	—0 .874
„ 24.760	—0 .809
„ 28.701	—0 .903
„ 29.720	—0 .868
„ 30.755	—1 .685
Juli 1.725	—0 .702
„ 2.725	—0 .695

Wie aus diesen Zahlen zu ersehen ist, zeigte der Gang des Chronometers, ausser den von der Temperatur abhängigen Aenderungen, auch plötzliche Sprünge. Ein solcher Sprung zwischen dem 29 und 30 Juni ist besonders auffallend.

Die Zeitbestimmungen wurden nach der Zinger'schen Methode ausgeführt und zwar in der Weise, dass die Breitenbestimmungen, sofern es nur das Wetter erlaubte, zwischen Zeitbestimmungen eingeschaltet wurden. Die einzelnen Chronometercorrectionen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Datum.	Zeit der Bestimmuug der Correction nach Chronom. Dent 1559.	Correction des Chronom. Dent 1559.	Bemerkungen.
Mai 12	$12^h\ 12^m.9$	$-1^m 57^s.046$	
„ „	12 52 .0	194	
„ „	13 49 .0	150	
„ „	14 2 .2	108	
Mittel: Mai 12	13 14 .0	—1 57 .124	
Mai 13	$13^h\ 3^m.8$	$-1^m 58^s.391$	
„ „	13 40 .1	516	
„ „	14 20 .6	476	
„ „	14 58 .2	503	
Mittel: Mai 13	14 0 .7	—1 58 .471	
Mai 21	$12^h\ 52^m.2$	$-2^m 12^s.258$	
„ „	13 4 .0	254	
„ „	14 58 .4	300	
Mittel: Mai 21	13 38 .2	—2 12 .271	

Datum.	Zeit der Bestimmuug der Correction nach Chronom. Dent 1559.	Correction des Chronom. Dent 1559.	Bemerkungen.
Mai 22	$12^h\ 52^m.2$	$-2^m\ 13^s.805$	
„ „	13 4 .1	814	
Mittel: Mai 22	11 58 .2	—2 13 .810	
Mai 29	$14^h\ 2^m.7$	$-2^m\ 26^s.390$	
„ „	14 58 .7	371	
„ „	15 16 .8	499	
Mittel: Mai 29	14 46 .1	—2 26 .420	
Mai 30	$13^h\ 40^m.6$	$-2^m\ 28^s.185$	
„ „	13 49 .5	162	
„ „	14 58 .7	192	
„ „	15 16 .8	299	
Mittel: Mai 30	14 26 .4	—2 28 .209	
Mai 31	$14^h\ 2^m.7$	$-2^m\ 29^s.808$	
„ „	14 58 .7	821	
„ „	15 8 .5	862	
„ „	16 0 .0	892	
„ „	16 33 .2	30 .013	
„ „	16 51 .2	016	
Mittel: Mai 31	15 35 .7	—2 29 .902	
Juni 12	$14^h\ 21^m.4$	$-2^m\ 48^s.641$	Der Stern *Ost* ist kaum zu sehen.
„ „	14 59 .0	693	Die Durchgänge sehr unsicher.
„ „	15 17 .2	713	
„ „	15 50 .5	767	
„ „	16 0 .3	690	Sehr starker Thau. Der Stern *Ost* äusserst schwach und unruhig.
Mittel: Juni 12	15 17 .7	—2 48 .701	
Juni 17	$14^h\ 21^m.5$	$-2^m\ 52^s.926$	Fast den ganzen Abend starker kalter Wind bei guten Bildern. Bei den letzten Beobachtungen schwächerer Wind, aber schlechtere Bilder.
„ „	15 27 .7	53 .026	
„ „	15 37 .5	042	
„ „	17 7 .6	129	
„ „	17 24 .0	235	
Mittel: Juni 17	15 59 .7	—2 53 .072	

Datum.	Zeit der Bestimmung der Correction nach Chronom. Dent 1559.	Correction des Chronom. Dent 1559.	Bemerkungen.
Juni 18	$14^h\ 27^m.7$	$-2^m 53^s.765$	Sehr unruhige Bilder.
„ „	15 17 .3	989	In Folge starken Thaus, welcher die Gläser bedeckt, Durchgänge sehr unsicher.
„ „	16 33 .6	904	
Mittel: Juni 18	15 26 .2	—2 53 .886	
Juni 22	$14^h\ 59^m.2$	$-2^m 56^s.447$	Der Stern *Ost* kaum zu sehen.
„ „	15 17 .3	595	Sehr schlechte und unruhige Bilder.
„ „	16 10 .9	517	
„ „	16 35 .8	477	
„ „	18 4 .1	611	
Mittel: Juni 22	16 13 .5	—2 56 .529	
Juni 23	$16^h\ 33^m.6$	$-2^m 57^s.415$	Die Sterne sind kaum zu sehen.
Juni 24	$17^h\ 58^m.6$	$-2^m 58^s.303$	
„ „	18 30 .2	260	Durch Wolken.
Mittel: Juni 24	18 14 .4	—2 58 .281	
Juni 28	$15^h\ 57^m.9$	$-3^m\ 1^s.796$	
„ „	17 7 .7	960	Sehr schlechte Bilder.
„ „	17 24 .1	768	
Mittel: Juni 28	16 49 .9	—3 1 .841	
Juni 29	$14^h\ 59^m.3$	$-3^m\ 2^s.504$	
„ „	15 9 .1	573	
„ „	18 30 .2	892	Starker Thau.
„ „	18 46 .3	842	
„ „	18 58 .8	814	
Mittel: Juni 29	17 16 .7	—3 2 .725	
Juni 30	$16^h\ 35^m.9$	$-3^m\ 4^s.340$	
„ „	18 30 .3	460	
„ „	18 38 .1	541	
„ „	18 46 .3	533	
Mittel: Juni 30	18 7 .6	—3 4 .468	

Datum.	Zeit der Bestimmung der Correction nach Chronom. Dent 1559.	Correction des Chronom. Dent 1559.	Bemerkungen.
Juli 1	$15^h\ 27^m.9$	$-3^m\ 5^s.059$	
„ „	15 37 .6	4 .985	
„ „	18 30 .3	5 .240	
„ „	18 38 .1	246	
„ „	18 46 .3	214	
Mittel: Juli 1	17 24 .0	—3 5 .149	
Juli 2	$15^h\ 27^m.9$	$-3^m\ 5^s.791$	
„ „	15 37 .6	723	
„ „	18 30 .3	960	
„ „	18 38 .1	833	
„ „	18 46 .3	913	
Mittel: Jull 2	17 24 .0	—3 5 .844	

In Folge dessen, dass der Gang des Chronometers kein gleichförmiger war, schien es rathsam, nicht den mittleren, zondern den wahrscheinlichsten Gang des Chronometers während der Beobachtungszeit für die Berechnung der Breitenbestimmungen zu verwenden. Natürlich war dieser letztere Gang an den Abenden, an welchen wegen schlechten Wetters nur eine geringe Anzahl von Zeitbestimmungen gemacht werden konnte, nicht mit genügender Sicherheit zu ermitteln. Aber an diesen Abenden waren auch die Polhöhenbestimmungen weniger sicher, besonders deswegen, weil der schlechte Zustand der Sternbilder, bei der langsamen Bewegung in den kleinen Azimuthen, auf die Beobachtung der Durchgänge viel störender einwirkte, als in der Nähe des ersten Verticals. Wenn im Laufe des Abends nur zwei Zeitbestimmungen gemacht wurden, so habe ich, für die Reduction der Polhöhenbestimmungen, das Mittel aus den Gängen an zwei benachbarten Abenden verwendet.

§ 8.

Bei den ersten Beobachtungen bestand das Fadennetz aus 7 Fäden, deren mittlerer gegenseitiger Abstand ungefähr 106″ ausmachte. Dann aber wurden noch 4 Fäden hinzugesetzt, so dass seit 12 Juni das Fadennetz schon aus 11 Fäden bestand. Dieselben bildeten 10 Intervalle, von denen sich 8 nahezu gleiche, kleinere, in der Mitte befanden und 2 untereinander ebenfalls gleiche, aber doppelt so breite, nach aussen gelegen waren. Bei den Zeitbestimmungen wurden die Durchgänge durch die Fäden 1, 2, 4, 6, 8, 10 und 11, und bei den Breitenbestimmungen — durch die Fäden:

3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 beobachtet. Die Beobachtungen wurden auf einem solid aufgemauerten Pfeiler, welcher von der Mitte des Meridiankreises um 1″80 nördlicher liegt, ausgeführt. Der Pfeiler ist von einer Plattform umgeben und dadurch gegen die durch die Bewegungen des Beobachters entstehenden Schwankungen in genügender Weise geschützt. Die Beobachtungen, welche zur Werthbestimmung der Schraube des Ocularmicrometers angestellt wurden, haben gezeigt, dass die Neigung des Fernrohrs mit der Zeit nur langsam und regelmässig sich aendert. Deswegen hätte es vollkommen hingereicht, bei der Zeit-und Breitenbestimmung für jeden Stern nur zwei Niveauablesungen: vor und nach dem Durchgang durch das Fadennetz, zu machen, wenn dabei nicht einige Umstände vorgekommen wären, welche bei den genannten Beobachtungen während des Durchganges manchmal nicht unmerkliche Aenderungen der Neigung hervorriefen. Zum Theil war es vielleicht die Abnutzung der Vertikalachse, welche im Laufe der Jahre nicht immer mit genügender Vorsicht behandelt worden war, so dass bei der Bewegung im Azimuthe geringe Schwankungen des Fernrohrs stattfanden. Es scheint aber, dass solche Aenderungen der Neigung meistentheils durch den schlechten Zustand der Einstellungsschraube am Vertikalkreise und vielleicht auch durch Torsion der Horizontalachse hervorgerufen wurden. Ich habe nämlich wiederholt bemerkt, dass nach der Einstellung des Kreises, trotzdem dabei an die Feder der Einstellungsschraube immer leise angeklopft und das Instrument um die Verticalache nicht gedreht wurde, die Neigung sich doch während einiger Minuten änderte. Da es mir aber auf die Erreichung grösstmöglicher Genauigkeit der Beobachtungen bei der Zeit-und Breitenbestimmung nicht ankam, so erlaubte ich mir, dessen ungeachtet, das Niveau bei jedem Durchgang nur zwei Mal abzulesen. Die Unterschiede dieser beiden Ablesungen waren übrigens in den allermeisten Fällen kleiner als ein Niveautheil.

Das bei den Beobachtungen gebrauchte Niveau hat keine Kammer. Dasselbe Niveau wurde im Jahre 1889 bei der Bestimmung der Längendifferenz von den Sternwarten Charkow und Nicolajew benutzt und es wurden dabei Ausscheidungen an der inneren Fläche des Niveaurohrs bemerkt. Diese Ausscheidungen wirkten in bekannter Weise sehr schädlich auf die Genauigkeit der Bestimmung der Neigung und ganz besonders auf die wiederholte Bestimmung des Werthes des Niveautheils, welche, nach Beendigung der Beobachtungen, im Juli bei ziemlich hoher Lufttemperatur angestellt wurde. Vor dem Beginn der Breitenbestimmungen im Jahre 1890 wurde das Niveaurohr sorgfältig gereinigt und mit möglichst wasserfreiem Aether, aber wie gewöhnlich nicht bei Abschluss von Luft, gefüllt.

Die Bestimmung des Theilwerthes des Niveau wurde darauf mittels des Ocularmikrometers am Verticalkreise an drei Abenden: 23, 25 und 26 April ausgeführt und hat folgende Resultate ergeben:

Temperatur	Theilwerth
+ 11.7 C.	1″626
+ 12.2 C.	1″592

wobei der erste Werth das Mittel ist aus zwei kleineren Reihen der Bestimmungen vom 23 und 26 April.

Nach einigen Beobachtungstagen zeigte sich am 22 Mai die Verdunstung des Aethers aus dem Niveaurohr, so dass die Neufüllung wieder vorgenommen werden musste, was auch am 23 Mai mit möglichster Sorgfalt ausgeführt wurde. Die Wiederbestimmung des Theilwerths wurde aber nur Ende August und Anfangs September gemacht und ergab folgende nach der Temperatur geordnete Resultate:

Temperatur	Theilwerth	Zeit der Bestimmung
+ 12.7 C.	1″635	10 September
+ 16.8 C.	1.523	25 August
+ 18.6 C.	1.549	27 August
+ 22.3 C.	1.505	29 August
+ 26.8 C.	1.478	2 September.

Diese Zahlen zeigen eine merkliche Verkleinerung des Niveauwerthes bei steigender Temperatur. Doch sind die Bestimmungen nicht sicher genug, um die Abhängigkeit des Theilwerthes von der Temperatur bei der Reduction der Beobachtungen berücksichtigen zu können. Bei der Ausführung der oben angegebenen Bestimmungen wurden nämlich in dem Verhalten des Niveau's ähnliche Störungen bemerkt, wie die im vorigen Jahre in Folge der entstandenen Ausscheidungen, jedoch nur in geringerem Grade. Man sah aber diesmal die Ausscheidungen nicht und ihr Erscheinen erst nach zwei Monaten nach der Füllung des Niveau's ist, wenn auch nicht unmöglich, so doch wenig wahrscheinlich *). Vielmehr scheint es, dass diese Störungen in Folge der Einwirkung der hohen Temperatur auf das Niveau entstanden sind. Während der Beobachtungstage vom 25 August bis 2 September erreichte das Maximum der Tagestemperatur eine Höhe von 35° C. und sogar mehr. In dem der Sonne ausgesetzten Gehäuse, in welchem sich das Instrument während der Tagesstunden befand, stieg die Temperatur gewiss bis 40° und an diesen Tagen stimmten die einzelnen Bestimmungen des Theilwertes (die in der Nacht ausgeführt wurden) viel weniger mit einander überein, als es die Genauigkeit der Einstellung auf den Collimator zu erwarten liess. Nur am 10 September, an welchem während des ganzen Tages eine ziemlich kühle Witterung herrschte, wurde die Uebereinstimmung der einzelnen Bestim-

*) Man vergleiche: „Ueber die Störungen der Libellen" von Dr. *F. Mylius.* Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1888, p. 269.

mungen wieder eine bessere. Ob diese Einwirkung der hohen Temperatur in der so oft bemerkten Trägheit der kleinen Blasen besteht *) oder ob noch andere Folgen dieser Einwirkung hinzukommen,—ist hier nicht zu entscheiden. Doch habe ich mit Rücksicht auf die bemerkten Störungen bei der Reduction der Breitenbestimmungen für den Niveautheil den constanten Werth von

$$1''.55$$

angenommen, durch welche Zahl der bis auf zwei Decimale abgerundete Mittelwerth aus den vorhin angeführten Werthen ausgedrückt ist. Hiervon ist nur die letzte Werthbestimmung vom 2-ten September ausgeschlossen, da dieselbe bei einer so hohen Temperatur gemacht wurde, welche bei der Breitenbestimmung nicht vorgekommen war.

Der angenommene Mittelwerth entspricht der Temperatur von 17.6 C., welche ungefähr der mittleren Temperatur bei der Polhöhenbestimmung gleichkommt.

§ 9.

Aus den im Sternverzeichniss des Berliner Jahrbuchs vorkommenden Sternen wurden für die Bestimmung der Breite folgende Paare gebildet:

№	Sternzeit.	Sternnamen.	Azimuthe.	Zenitdistanzen.	Azimuthe.	Sternnamen.	Sternzeit.
I	$13^h\,14^m$	ψ Drac. aus.	$208^0\,24'$	$36^0\,25'$	$328^0\,42'$	π Bootis pr.	$13^h\,20^m$
II	14 16	43 Camelop.	155 10	51 26	18 1	ζ Virginis.	14 25
III	14 34	β Serpentis.	332 26	36 50	206 49	τ Draconis.	14 42
IV	15 2	4 H. Draconis.	164 43	32 22	26 6	α Bootis.	15 9
V	15 18	9 H. Draconis.	158 20	37 56	41 40	τ Bootis.	15 24
VI	15 27	24 Camelop.	167 7	49 13	19 17	109 Virginis.	15 39
VII	15 49	109 Virginis.	22 29	49 48	151 54	ϱ Urs. mj.	15 56
VIII	16 10	μ Virginis.	27 23	58 45	150 26	o Urs. mj.	16 18
IX	16 11	109 Virginis.	29 19	51 19	152 37	σ^2 Urs. mj.	16 20
X	16 28	α Serpentis.	17 31	44 26	150 13	35 Urs. mj.	16 39
XI	16 45	4 H. Draconis.	161 36	37 16	29 51	β Serpentis.	16 54
XII	17 20	ψ Cassiop.	204 15	54 4	344 12	η Serpentis.	17 25
XIII	18 2	$\varkappa$ Cephei.	193 40	30 4	346 50	110 Hercul.	18 13

Von diesen 13 Paaren wurden zwei: I und V ausgeschlossen; das erste wegen der Duplicität beider Sterne und besonders des π Bootis und das fünfte, weil der massgebende Winkel: $90+\frac{A'-A}{2}$ hier zu klein war ($79^0\,50'$). Die Anzahl der Beobachtungen jedes einzelnen der übrig gebliebe-

*) Siehe z. B. „Mitteilungen über einige Beobachtungen an Libellen" von Dr *C. Reinhertz*. Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1890 pp. 317 ff.

nen 11 Paare war eine sehr verschiedene. Im Ganzen erhielt man 47 Breitenbestimmungen.

In der folgenden Tabelle sind die Beobachtungen und die daraus abgeleiteten Werthe der Polhöhe einzeln angeführt. Für jedes Paar sind zuerst die beobachteten Durchgänge beider Sterne und entsprechenden Niveauablesungen gegeben, dann die Polhöhe aus einem (gewöhnlich mittleren) Faden und die Unterschiede zwischen dieser und den aus anderen Fäden erhaltenen Polhöhen *). Alle Beobachtungen sind in einer und derselben Lage des Instruments, nämlich: Kreis links, gemacht. Zur Berechnung der Beobachtungen wurden die oben angegebenen Formeln gebraucht. Sämmtliche mittlere Oerter der beobachteten Sterne sind dem Berliner Jahrbuch entnommen, ebenso, wie die seheinbaren Oerter für jene Sterne, für welche in dem erwähnten Jahrbuch die Ephemeriden gegeben sind, wobei die schnell veränderlichen Mondglieder der Nutation nicht berücksichtigt wurden. Für alle anderen Sterne wurden Reductionen auf die scheinbaren Oerter mit den Tafeln des Berliner Jahrbuchs berechnet. Zur Controlle wurde die Berechnung dieser Reductionen auch mit den Pulkow'schen „Tabulae quantitatum Besselianarum" nochmals ausgeführt.

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		♂ 13 Mai 1890.		
		№ III.		
	Süd		Nord	
	β Serpentis		τ Draconis	
	+13.3—14.2		+13.0—14.8	
	$14^h\ 34^m\ 43^s.35$		$14^h\ 42^m\ 54^s.70$	
	35 7 .60		43 19 .50	
	35 30 .35		43 43 .25	
	35 53 .70		44 7 .60	
	36 16 .60		44 30 .65	
	36 40 .60		44 55 .20	
	37 5 .25		45 20 .00	
	+13.3—14.3		+13.3—14.6	
Corr. Dent.	$-1^m\ 58^s.50$		$-1^m\ 58^s.51$	
		50° 0′ 11″ 57		
		0 .00		
		+1 .21		
		+0 .67		
		+1 .10		
		+0 .97		
		+1 .55		
		φ 50 0 12 .36		

*) Diese Werthe der Polhöhen sind so, wie sie berechnet wurden, d. h. mit zwei Decimalen angegeben.

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		☿ 21 Mai 1890.		
		№ III.		
	Süd		Nord	
	β Serpentis		τ Draconis	
	+12.5—11.2		+12.7—11.1	
	$14^h\ 34^m\ 58^s.35$		$14^h\ 43^m\ 10^s.65$	
	35 22 .35		43 35 .70	
	35 45 .40		43 59 .05	
	36 8 .75		44 23 .60	
	36 31 .80		44 46 .75	
	36 55 .60		45 11 .50	
	37 20 .10		45 36 .35	
	+12.6—11.1		+13.2—10.4	
Corr. Dent.	$-2^m\ 12^s.29$		$-2^m\ 12^s.29$	
		$50^0\ 0'\ 11''\ 66$		
		+0 .02		
		—0 .13		
		+1 .15		
		+1 .22		
		+0 .11		
		+0 .18		
		φ 50 0 12 .01		
		♃ 29 Mai 1890.		
		№ II.		
	Nord		Süd	
	43 Camelopard.		ζ Virginis	
	+10.8—12.6		+11.2—12.9	
	$14^h\ 16^m\ 57^s.25$		—	43 Camelop. kaum sichtbar, unruhig und manchmal ganz verschwindend.
	17 23 .70		$14^h\ 25^m\ 55^s.70$	
	17 49 .75		26 32 .15	
	18 14 .85		27 6 .25	
	18 41 .00		27 42 .25	
	19 6 .80		28 17 .25	
	19 33 .40		28 52 .50	
	+10.7—13.0		+10.7—13.4	
Corr. Dent.	$-2^m\ 26^s.39$		$-2^m\ 26^s.40$	
		$50^0\ 0'\ 10''\ 91$		
		—0 .35		
		—0 .67		
		—0 .67		
		—1 .15		
		—0 .91		
		φ 50 0 10 .28		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♃ 29 Mai 1890.

№ III.

	Süd β Serpentis		Nord τ Draconis	
	+10.6—13.7		+10.7—13.8	
	14^h 35^m $12^s.35$		14^h 43^m $25^s.30$	
	35 36 .00		43 50 .25	
	35 59 .05		44 13 .85	
	36 22 .90		44 38 .25	
	36 45 .55		45 1 .75	
	37 9 .60		45 25 .75	
	37 33 .90		45 50 .85	
	+10.7—13.8		+10.9—13.6	
Corr. Dent.	-2^m $26^s.41$		-2^m $26^s.42$	
		50° 0′ 11″ 75		
		—0 .34		
		—1 .13		
		—0 .46		
		—0 .64		
		+0 .70		
		—0 .35		
		φ 50 0 11 .43		

♀ 30 Mai 1890.

№ II.

	Nord 43 Camelopard.		Süd ζ Virginis	
	+15.0—13.4		+14.0—14.6	43 Camelop. sehr schwach.
	14^h 16^m $55^s.50$		14^h 25^m $14^s.75$	Bei ζ Virginis unru-
	17 22 .25		25 52 .50	hige und verschwom-
	17 48 .60		26 29 .00	mene Bilder.
	18 13 .50		27 3 .60	
	18 39 .75		27 39 .25	
	19 5 .35		28 13 .50	
	19 31 .85		28 49 .35	
	+14.1—14.2		+12.8—16.0	
Corr. Dent.	-2^m $28^s.20$		-2^m $28^s.21$	
		50° 0′ 12″ 34		
		+0 .18		
		+0 .14		
		+0 .46		
		+0 .19		
		+0 .58		
		—0 .30		
		φ 50 0 12 .52		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♀ 30 Mai 1890.

№ III.

	Süd β Serpentis		Nord τ Draconis	
	+12.4—16.5		+15.7—13.2	
	14^h 35^m 9^s.00		14^h 43^m 22^s.60	
	35 32 .80		43 47 .35	
	35 55 .75		44 11 .25	
	36 19 .35		44 35 .40	
	36 41 .85		44 59 .00	
	37 5 .90		45 23 .50	
	37 30 .50		45 48 .25	
	+12.4—16.5		+16.2—12.7	
Corr. Dent.	-2^m 28^s.22		-2^m 28^s.23	
		50° 0′ 12″ 85		
		— 0 .40		
		— 0 .28		
		— 0 .51		
		— 1 .20		
		— 1 .02		
		— 0 .38		
		φ 50 0 12 .31		

♄ 31 Mai 1890.

№ II.

	Nord 43 Camelopard.		Süd ζ Virginis	
	+13.9—12.7		+13.7—13.3	
	14^h 16^m 56^s.25		14^h 25^m 15^s.50	
	17 22 .85		25 53 .40	
	17 49 .10		26 30 .25	
	18 13 .85		27 4 .65	
	18 40 .25		27 40 .20	
	19 5 .50		28 15 .10	
	19 32 .35		28 50 .30	
	+14.0—12.9		+13.0—14.4	
Corr. Dent.	-2^m 29^s.80		-2^m 29^s.81	
		50° 0′ 10″ 27		
		+ 1 .50		
		+ 0 .91		
		+ 0 .50		
		+ 0 .66		
		— 0 .75		
		+ 0 .20		
		φ 50 0 10 .70		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		♄ 31 Mai 1890.		
		№ III.		
	Süd		Nord	
	β Serpentis		τ Draconis	
	+12.2—15.3		+12.2—15.7	
	$14^h\ 35^m\ 20^s.35$		$14^h\ 43^m\ 33^s.70$	
	35 44 .15		43 58 .25	
	36 7 .16		44 22 .25	
	36 30 .70		44 46 .50	
	36 53 .35		45 9 .50	
	37 17 .45		45 34 .20	
	37 41 .95		45 59 .00	
	+12.7—15.1		+11.9—16.0	
Corr. Dent.	$—2^m\ 29^s.82$		$—2^m\ 29^s.83$	
		50° 0′ 10″ 82		
		— 0 .04		
		+ 0 .46		
		— 0 .02		
		+ 0 .53		
		+ 0 .23		
		+ 0 .35		
		φ 50 0 11 .04		
		♄ 31 Mai 1890.		
		№ VIII.		
	Süd		Nord	
	μ Virginis		o Urs. mj	
	+14.2—14.7		+14.7—14.3	
	$16^h\ 11^m\ 51^s.20$		$16^h\ 19^m\ 34^s.65$	
	12 15 .60		19 57 .50	Bei o Urs. mj. höchst
	12 39 .65		20 19 .50	unruhige und verschwom-
	13 2 .80		20 40 .35:	mene Bilder.
	13 26 .15		21 3 .00	
	13 49 .50		21 24 .75	
	14 13 .50		21 47 .75	
	+14.7—14.2		+13.7—15.3	
Corr. Dent.	$—2^m\ 29^s.95$		$—2^m\ 29^s.96$	
		50° 0′ 9″ 04 *)		
		+ 1 .97		
		+ 2 .84		
		+ 2 .00		
		+ 2 .10		
		+ 1 .45		
		+ 2 .26		
	φ (aus 6 Fäden)	50 0 11 .14		

*) Dieser Werth ist bei der Bildung des im Texte angeführten Mittels ausgeschlossen, weil im Beobachtungsjournal der Durchgang von o Urs. mj. an dem betreffenden Faden als unsicher bezeichnet ist. Mittel aus allen 7 Fäden ist: 50° 0′ 10″ 84

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		♃ 12 Juni 1890.		
		№ III.		
	Süd		Nord	
	β Serpentis		τ Draconis	
	+12.4—11.9		+12.1—12.4	Zwischen 31 Mai und
	14^h 36^m $6^s.35$		14^h 44^m $21^s.05$	12 Juni wurde ein neues
	36 17 .75		44 33 .05	Fadennetz aufgezogen,
	36 30 .00		44 45 .35	so dass die Fädendistan-
	36 41 .75		44 57 .75	zen jetzt nur halb so
	36 53 .75		45 10 .15	gross sind, wie früher.
	37 5 .70		45 22 .40	
	37 17 .70		45 34 .50	
	+12.9—11.6		+12.2—12.3	
Corr. Dent.	—2^m $48^s.67$		—2^m $48^s.68$	
		50° 0′ 11″ 82		
		+0 .30		
		—0 .16		
		+0 .72		
		—0 .14		
		—0 .13		
		+0 .28		
		φ 50 0 11 .94		
		♂ 17 Juni 1890.		
		№ III.		
	Süd		Nord	
	β Serpentis		τ Draconis	
	+13.2—13.5		+13.3—13.8	
	14^h 36^m $15^s.35$		14^h 44^m $31^s.35$	
	36 27 .25		44 43 .40	
	36 39 .40		44 55 .66	
	36 51 .10		45 8 .00	
	37 3 .30		45 20 .50	
	37 15 .10		45 32 .50	
	37 27 .25		45 44 .80	
	+13.0—14.0		+13.4—13.7	
Corr. Dent.	—2^m $52^s.95$		—2^m $52^s.96$	
		50° 0′ 11″ 36		
		—0 .61		
		+0 .02		
		+0 .75		
		+0 .08		
		+0 .27		
		+0 .57		
		φ 50 0 11 .51		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♂ 17 Juni 1890.

№ IV.

	Nord		Süd	
	4 H. Dracon.		α Bootis.	
	+14.8—12.7		+14.0—13.3	
	15^h 3^m $53^s.50$		15^h 10^m $48^s.15$	
	4 14 .85		11 1 .05	
	4 35 .25		11 13 .60	
	4 56 .35		11 26 .15	
	5 17 .75		11 39 .10	
	5 38 .90		11 51 .65	
	5 59 .75		12 4 .05	
	+14.1—13.2		+13.7—14.0	
Corr. Dent.	-2^m $52^s.99$		-2^m $53^s.00$	
		50° 0′ 10″ 96		
		+0 .48		
		+0 .40		
		—0 .24		
		—0 .31		
		—0 .09		
		+0 .01		
		φ 50 0 11 .00		

♂ 17 Juni 1890.

№ VII.

	Süd		Nord	
	109 Virginis		ρ Urs. mj.	
	+13.7—14.3		+13.5—14.7	
	15^h 51^m $7^s.60$		15^h 57^m $53^s.00$	
	51 22 .20		58 4 .75	
	51 36 .00		58 16 .50	
	51 50 .85		58 28 .00	
	52 5 .60		58 40 .10	
	52 20 .00		58 52 .00	
	52 34 .25		59 3 .50	
	+13.5—14.6		+13.2—14.8	
Corr. Dent.	-2^m $53^s.06$		-2^m $53^s.07$	
		50° 0′ 11″ 17		
		+0 .18		
		+0 .06		
		+1 .47		
		+0 .14		
		+0 .37		
		—0 .20		
		φ 50 0 11 .46		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
	♂ 17 Juni 1890.		
	№ IX.		
Süd 109 Virginis		Nord σ^2 Urs. mj.	
+15.2—13.0		+12.9—15.5	
$16^h\ 13^m\ 2^s.85$		$16^h\ 22^m\ 33^s.30$	
13 14 .25		22 45 .35	
13 25 .35		22 57 .25	
13 36 .65		23 9 .25	
13 48 .05		23 21 .40	
13 59 .60		23 33 .65	
14 10 .55		23 45 .50	
+15.4—12.9		+12.9—15.5	
Corr. Dent. $-2^m\ 53^s.09$		$-2^m\ 53^s.11$	
	50° 0′ 11″ 17		
	— 0 .06		
	— 0 .17		
	+ 0 .10		
	— 0 .05		
	— 0 .34		
	— 0 .08		
	φ 50 0 11 .08		
	♂ 17 Juni 1890.		
	№ X.		
Süd α Serpentis		Nord 35 Urs. mj.	
+14.0—14.5		+15.2—13.2	
$16^h\ 29^m\ 41^s.60$		$16^h\ 41^m\ 45^s.30$	
30 0 .60		41 56 .50	
30 18 .65		42 7 .35	
30 37 .25		42 18 .50	
30 56 .20		42 29 .85	
31 14 .25		42 41 .00	
31 32 .25		42 52 .05	
+14.0—14.6		+15.0—13.4	
Corr. Dent. $-2^m\ 53^s.12$		$-2^m\ 53^s.13$	
	50° 0′ 10″ 98		
	+ 0 .34		
	+ 0 .05		
	+ 0 .16		
	— 0 .38		
	— 0 .02		
	— 0 .05		
	φ 50 0 10 .99		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		♂ 17 Juui 1890.		
		№ XI.		
	Nord		Süd	
	4 H. Draconis		β Serpentis	
	+13.2—15.3		+14.3—14.4	
	$16^h\ 47^m\ 3^s.80$		$16^h\ 56^m\ 7^s.50$	
	47 21 .75		56 18 .75	
	47 38 .85		56 29 .50	
	47 56 .75		56 40 .90	
	48 14 .50		56 52 .15	
	48 31 .85		57 3 .50	
	48 49 .35		57 14 .65	
	+12.6—16.0		+14.5—14.2	
Corr. Dent.	$-2^m\ 53^s.15$		$-2^m\ 53^s.16$	
		50° 0′ 12″ 20		
		— 1 .12		
		— 0 .47		
		— 0 .02		
		+ 0 .11		
		— 0 .77		
		— 0 .93		
		φ 50 0 11 .74		
		☿ 18 Juni 1890.		
		№ III.		
	Süd		Nord	
	β Serpentis		τ Draconis	
	+13.3—13.0		+13.9—13.0	
	$14^h\ 36^m\ 14^s.75$		$14^h\ 44^m\ 30^s.35$	Dieses Paar wurde in der Dämmerung bei starkem Thau und unruhigen Bildern beobachtet. τ Draconis an den letzten Fäden kaum sichtbar.
	36 25 .85		44 42 .15	
	36 38 .10		44 54 .70	
	36 50 .00		45 7 .10	
	37 2 .10		45 19 .50	
	37 13 .70		45 31 .35	
	37 25 .85		45 43 .85	
	+13.0—13.4		+14.2—12.6	
Corr. Dent.	$-2^m\ 53^s.84$		$-2^m\ 53^s.85$	
		50° 0′ 11″ 52		
		+ 0 .65		
		— 0 .14		
		+ 0 .12		
		— 0 .16		
		— 0 .09		
		— 0 .28		
		φ 50 0 11 .52		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

☿ 18 Juni 1890.

№ VI.

	Nord 24 Camelopard.		Süd 109 Virginis	
	+12.8—14.3		+16.0—11.1	
	$15^h\ 29^m\ 17^s.25$		$15^h\ 41^m\ 12^s.15$	Nebel. Beibe Sterne kaum sichtbar.
	29 42 .00		41 28 .75	
	30 5 .85		41 45 .65	
	30 31 .00		42 2 .10	
	30 56 .25		42 19 .40	
	31 21 .75		42 35 .75	
	31 46 .00		42 51 .85	
	+12.3—14.8		+16.2—10.9	
Corr. Dent.	$-2^m\ 53^s.89$		$-2^m\ 53^s.90$	
		$50^0\ 0'\ 10''\ 30$		
		+0 .32		
		+0 .67		
		—0 .68		
		—0 .79		
		+0 .10		
		—0 .15		
		φ 50 0 10 .22		

☿ 18 Juni 1890.

№ VII.

	Süd 109 Virginis		Nord ρ Urs. mj.	
	+12.8—14.4		+14.0—13.5	
	$15^h\ 51^m\ 13^s.50$		$15^h\ 57^m\ 58^s.25$	Beide Sterne sind kaum sichtbar. Die Beobachtungen dieses Abends sind wegen des die Gläser fortwährend bedeckenden Thaues sehr unsicher.
	51 28 .75		58 10 .00	
	51 42 .65		58 21 .50	
	51 57 .25		58 33 .25	
	52 12 .00		58 45 .00	
	52 26 .25		58 57 .00	
	52 40 .35		59 8 .50	
	+13.2—14.1		+14.7—13.0	
Corr. Dent.	$-2^m\ 53^s.91$		$-2^m\ 53^s.92$	
		$50^0\ 0'\ 12''\ 24$		
		+1 .31		
		—0 .18		
		+0 .38		
		—0 .79		
		—0 .03		
		—0 .34		
		φ 50 0 12 .29		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
	☉ 22 Juni 1890.		
	№ III.		
Süd β Serpentis		Nord τ Draconis	
+11.5−15.2		+11.5−16.2	
14^h 36^m $10^s.35$		14^h 44^m $25^s.50$	
36 21 .95		44 37 .65	In der Dämmerung beobachtet. Rasche Aenderung der Temperatur.
36 34 .00		44 49 .90	
36 45 .80		45 2 .45	
36 57 .90		45 14 .80	
37 9 .75		45 26 .55	
37 21 .65		45 38 .80	
+12.0−15.0		+11.7−16.1	
Corr. Dent. -2^m $56^s.48$		-2^m $56^s.49$	
	50° 0′ 11″ 36		
	+0 .74		
	+0 .42		
	+0 .94		
	+0 .24		
	+1 .24		
	+1 .06		
	φ 50 0 12 .02		
	☉ 22 Juni 1890.		
	№ VII.		
Süd 109 Virginis		Nord ρ Urs. mj.	
+13.8—15.1		+14.9—14.0	
15^h 51^m $6^s.65$		15^h 57^m $52^s.50$	Beide Sterne kaum sichtbar und unruhig.
51 21 .15		58 4 .45	
51 35 .50		58 15 .65	
51 49 .85		58 27 .25	
52 5 .30		58 39 .35	
52 19 .25		58 51 .15	
52 33 .35		59 2 .90	
+14.0—14.8		+14.7—14.4	
Corr. Dent. -2^m $56^s.52$		-2^m $56^s.52$	
	50° 0′ 11″ 29		
	+0 .59		
	+1 .23		
	+0 .17		
	−1 .27		
	−0 .32		
	+0 .06		
	φ 50 0 11 .36		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

⊙ 22 Juni 1890.

№ XI.

	Nord 4 H. Draconis		Süd β Serpentis	
	+12.9—16.0		+13.9—15.0	
	16^h 47^m $5^s.85$		16^h 56^m $10^s.00$	Die Beobachtungen dieses Abends sind wegen des die Gläser fortwährend bedeckenden Thaues sehr unsicher.
	47 23 .50		56 21 .00	
	47 40 .75		56 32 .35	
	47 58 .00		56 43 .75	
	47 16 .00		56 55 .15	
	48 33 .75		57 6 .25	
	48 50 .85		57 17 .00	
	+13.0—15.9		+13.4—15.5	
Corr. Dent.	-2^m $56^s.55$		-2^m $56^s.55$	
		50^0 0′ 11″ 78		
		+1 .15		
		+1 .92		
		+1 .05		
		+0 .14		
		+0 .57		
		+0 .80		
		φ 50 0 12 .58		

♂ 24 Juni 1890.

№ XIII.

	Nord ϰ Cephei		Süd 110 Herculis	
	+12.7—12.2		+14.0—10.9	
	18^h 4^m $12^s.75$		18^h 16^m $38^s.80$	Durch Wolken an den vier letzten Fäden beobachtet.
	4 36 .50		17 4 .35	
	4 59 .00		17 28 .85	
	5 45 .35		18 19 .80	
	+12.2—12.5		+14.0—11.0	
Corr. Dent.	-2^m $58^s.28$		-2^m $58^s.28$	
		50^0 0′ 11″ 31		
		50 0 11 .40		
		50 0 11 .50		
		50 0 11 .10		
		φ 50 0 11 .33		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♄ 28 Juni 1890.

№ VIII.

	Süd μ Virginis		Nord o Urs. mj.	
	+13.9—10.3		+13.8—11.0	
	16^h 13^m $9^s.35$		16^h 20^m $47^s.95$	
	13 21 .35		20 59 .50	Bei o Urs. mj. verschwommene Bilder.
	13 33 .05		21 10 .35	
	13 45 .25		21 21 .40	
	13 57 .20		21 33 .10	
	14 9 .10		21 44 .35	
	14 21 .00		21 55 .50	
	+14.0—10.2		+13.8—11.0	
Corr. Dent.	$—3^m$ $1^s.82$		$—3^m$ $1^s.83$	
		50° 0′ 10″ 42		
		+0 .19		
		+1 .18		
		+1 .00		
		+1 .33		
		+1 .48		
		+1 .32		
		φ 50 0 11 .35		

♄ 28 Juni 1890.

№ X.

	Süd α Serpentis		Nord 35 Urs. mj.	
	+12.6—12.4		+12.0—13.4	
	16^h 29^m $41^s.50$		16^h 41^m $48^s.15$	
	30 0 .85		42 0 .15	
	30 18 .85		42 10 .75	
	30 37 .60		42 21 .75	
	30 56 .25		42 32 .85	
	31 14 .85		42 44 .65	
	31 32 .65		42 55 .50	
	+12.6—12.4		+12.3—13.0	
Corr. Dent.	$—3^m$ $1^s.83$		$—3^m$ $1^s.83$	
		50° 0′ 10″ 47		
		—0 .25		
		+1 .09		
		+0 .71		
		—0 .48		
		+0 .80		
		+0 .65		
		φ 50 0 10 .83		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♄ 28 Juni 1890.

№ XI.

Nord 4 H. Draconis		Süd β Serpentis	
+11.2—14.1		+12.8—12.7	
$16^h\ 47^m\ 11^s.25$		$16^h\ 56^m\ 16^s.00$	4 H. Draconis ausserordentlich schwer zu sehen. Die Durchgänge kaum mehr, als bis 0^s5 sicher. β Serpentis auch sehr schwach. Die Durchgänge sehr unsicher.
47 29 .00		56 27 .75	
47 46 .25		56 38 .75	
48 4 .00		56 49 .50	
48 21 .75		57 1 .00	
48 39 .75		57 12 .50	
48 56 .50		57 23 .50	
+10.4—15.0		+12.6—12.9	
Corr. Dent. $-3^m\ 1^s.84$		$-3^m\ 1^s.84$	
	50° 0′ 12″ 36		
	— 0 .52		
	— 1 .51		
	— 1 .47		
	— 0 .55		
	— 0 .73		
	— 1 .76		
	φ 50 0 11 .43		

⊙ 29 Juni 1890.

№ VI.

Nord 24 Camelopard.		Süd 109 Virginis	
+10.9—12.6		+9.8—14.0	
$15^h\ 29^m\ 39^s.20$		$15^h\ 41^m\ 32^s.45$	
30 4 .15		41 49 .65	
30 28 .35		42 6 .05	
30 53 .90		42 22 .45	
31 19 .10		42 39 .35	
31 44 .30		42 55 .85	
32 9 .00		43 11 .75	
+10.2—13.4		+9.6—14.3	
Corr. Dent. $-3^m\ 2^s.58$		$-3^m\ 2^s.59$	
	50° 0′ 11″ 75		
	— 0 .37		
	— 0 .91		
	— 1 .12		
	— 0 .28		
	— 0 .06		
	+ 0 .46		
	φ 50 0 11 .42		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
	⊙ 29 Juni 1890.		
	№ VII.		
Süd 109 Virginis		Nord ρ Urs. mj.	
+12.8—11.2		+12.9—11.1	
$15^h\ 51^m\ 10^s.25$		$15^h\ 57^m\ 55^s.50$	
51 24 .60		58 7 .50	
51 38 .70		58 18 .90	
51 53 .35		58 30 .75	
52 8 .10		58 42 .70	
52 22 .45		58 54 .60	
52 36 .75		59 6 .25	
+12.0—12.0		+12.9—11.1	
Corr. Dent. $-3^m\ 2^s.61$		$-3^m\ 2^s.62$	
	$50^0\ 0'\ 10''\ 86$		
	— 0 .88		
	+ 0 .18		
	+ 0 .13		
	— 0 .21		
	+ 0 .19		
	— 0 .06		
	φ 50 0 10 .77		
	⊙ 29 Juni 1890.		
	№ X.		
Süd α Serpentis		Nord 35 Urs. mj.	
+13.2—11.8		+13.7—11.6	
$16^h\ 30^m\ 44^s.25$		$16^h\ 42^m\ 26^s.00$	
31 3 .15		42 37 .35	
31 21 .70		42 48 .60	
31 39 .80		42 59 .70	
31 56 .30		43 10 .10	
+13.0—12.2		+13.5—11.8	
Corr. Dent. $-3^m\ 2^s.66$		$-3^m\ 2^s.68$	
	$50^0\ 0'\ 10''\ 75$		
	+ 0 .44		
	+ 0 .15		
	— 0 .03		
	+ 0 .29		
	φ 50 0 10 .92		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

⊙ 29 Juni 1890.

№ XI.

	Nord 4 H. Draconis		Süd β Serpentis	
	+12.8—12.4		+13.6—11.8	
	$16^h\ 47^m\ 7^s.25$		$16^h\ 56^m\ 13^s.75$	4 H. Draconis scheint noch schwächer zu sein, als Sterne 5.1 Grösse.
	47 24 .75		56 25 .75	
	47 41 .75		56 36 .70	
	47 59 .75		56 48 .15	
	48 17 .25		56 59 .50	
	48 35 .50		57 10 .50	
	48 52 .50		57 21 .25	
	+12.1—13.0		+13.2—12.0	
Corr. Dent.	$-3^m\ 2^s.68$		$-3^m\ 2^s.70$	
		50° 0′ 10″ 32		
		+2 .28		
		+0 .16		
		—0 .05		
		—0 .58		
		+0 .99		
		+1 .03		
	φ	50 0 10 .87		

⊙ 29 Juni 1890.

№ XII.

	Nord ψ Cassiop.		Süd η Serpentis	
	+13.8—12.0		+17.2—8.5	
	$17^h\ 21^m\ 50^s.00$		$17^h\ 26^m\ 1^s.25$	
	22 3 .75		26 20 .60	
	22 16 .85		26 41 .10	
	22 30 .70		27 1 .15	
	22 44 .00		27 21 .50	
	22 57 .25		27 41 .70	
	23 10 .85		28 2 .15	
	+12.4—13.3		+16.9—8.9	
Corr. Dent.	$-3^m\ 2^s.73$		$-3^m\ 2^s.74$	
		50° 0′ 11″ 62		
		—0 .14		
		—1 .15		
		+0 .64		
		+0 .75		
		+1 .20		
		+1 .05		
	φ	50 0 11 .96		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

⊙ 29 Juui 1890.

№ XIII.

	Nord ϰ Cephei		Süd 110 Herculis
	+13.0—12.9		+14.7—11.3
	18^h 2^m $32^s.50$		18^h 14^m $53^s.40$
	2 55 .25		15 16 .25
	3 18 .90		15 40 .80
	3 42 .25		16 5 .25
	4 6 .00		16 29 .75
	4 28 .75		16 53 .75
	4 52 .35		17 19 .00
	+13.0—12.9		+14.4—11.6
Corr. Dent.	-3^m $2^s.79$		-3^m $2^s.81$

50^0 0′ 11″ 35
— 0 .27
— 0 .53
— 0 .22
— 0 .49
— 0 .75
— 0 .90
φ 50 0 10 .90

☾ 30 Juni 1890.

№ XI.

	Nord 4 H. Draconis		Süd β Serpentis
	+10.5—9.4		+13.8—6.6
	16^h 47^m $11^s.00$		16^h 56^m $16^s.50$
	47 28 .50		56 27 .75
	47 45 .75		56 38 .85
	48 3 .75		56 50 .10
	48 21 .15		57 1 .45
	48 38 .70		57 12 .65
	48 56 .20		57 23 .60
	+10.1—9.9		+14.3—5.9
Corr Dent.	-3^m $4^s.35$		-3^m $4^s.37$

50^0 0′ 11″ 40
— 0 .24
— 0 .36
— 0 .59
— 0 .74
— 0 .87
— 0 .53
φ 50 0 10 .92

☾ 30 Juni 1890.

№ XII.

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
	Nord ψ Cassiop.		Süd η Serpentis	
	+8.2—12.4		+11.7—9.2	
	$17^h\ 22^m\ 0^s.20$		$17^h\ 26^m\ 15^s.35$	
	22 14 .20		26 35 .85	
	22 27 .50		26 56 .00	
	22 41 .50		27 16 .25	
	22 54 .60		27 36 .00	
	23 8 .10		27 56 .20	
	+7.2—13.4		+11.8—9.1	
Corr. Dent.	$-3^m\ 4^s.40$		$-3^m\ 4^s.41$	
		50° 0′ 12″ 39		
		— 0 .66		
		— 0 .72		
		— 0 .80		
		— 0 .62		
		— 0 .86		
		φ 50 0 11 .78		

☾ 30 Juni 1890.

№ XIII.

	Nord ϰ Cephei		Süd 110 Herculis	
	+11.0—10.4		+11.5—10.0	
	$18^h\ 2^m\ 38^s.85$		$18^h\ 14^m\ 57^s.65$	
	3 1 .70		15 20 .80	
	3 24 .80		15 45 .15	
	3 48 .35		16 9 .75	
	4 12 .00		16 34 .40	
	4 35 .15		16 58 .60	
	4 58 .25		17 23 .80	
	+11.0—10.3		+11.9—9.7	
Corr. Dent.	$-3^m\ 4^s.47$		$-3^m\ 4^s.48$	
		50° 0′ 10″ 33		
		— 0 .73		
		— 0 .82		
		— 0 .11		
		— 0 .26		
		— 0 .77		
		— 0 .47		
		φ 50 0 9 .88		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♂ 1 Juli 1890.

№ VII.

	Süd		Nord
	109 Virginis		ρ Urs. mj.
	+10.0—10.2		+10.2—10.0
	15^h 51^m $16^s.00$		15^h 58^m $1^s.00$
	51 30 .80		58 12 .80
	51 45 .35		58 24 .20
	51 59 .60		58 36 .50
	52 14 .20		58 48 .35
	52 28 .50		59 0 .15
	52 42 .65		59 11 .50
	+10.0—10.2		+10.3—10.0
Corr. Dent.	-3^m $5^s.05$		-3^m $5^s.06$
		50° 0′ 11″ 40	
		—0 .55	
		+0 .19	
		—1 .68	
		—0 .15	
		+0 .06	
		—0 .65	
		φ 50 0 11 .00	

♂ 1 Juli 1890.

№ VIII.

	Süd		Nord
	μ Virginis		ο Urs. mj.
	+11.8—9.0		+11.7—9.2
	16^h 13^m $13^s.00$		16^h 20^m $51^s.80$
	13 25 .65		21 2 .95
	13 37 .00		21 14 .00
	13 49 .15		21 25 .35
	14 1 .40		21 36 .60
	14 13 .10		21 48 .15
	14 25 .25		21 59 .40
	+12.0—8.9		+11.8—9.1
Corr. Dent.	-3^m $5^s.07$		-3^m $5^s.08$
		50° 0′ 11″ 14	
		+0 .54	
		—1 .17	
		+0 .06	
		—0 .66	
		+0 .82	
		+0 .28	
		φ 50 0 11 .12	

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♂ 1 Juli 1890.

№ X.

	Süd		Nord	
	α Serpentis		35 Urs. mj.	
	+10.6—10.2		+12.2—8.8	
	15^h 29^m 57^s.10		16^h 41^m 58^s.20	
	30 15 .65		42 9 .25	
	30 34 .00		42 20 .25	
	30 52 .25		42 31 .50	
	31 11 .05		42 42 .75	
	31 29 .65		42 53 .90	
	31 47 .40		43 5 .00	
	+10.6—10.2		+12.2—8.7	
Corr. Dent.	—3^m 5^s.09		—3^m 5^s.10	
		50° 0′ 11″ 73		
		— 0 .63		
		— 0 .64		
		— 0 .64		
		— 0 .41		
		— 0 .99		
		— 0 .47		
		φ 50 0 11 .19		

♂ 1 Juli 1890.

№ XI.

	Nord		Süd	
	4 H. Draconis		β Serpentis	
	+11.0—9.9		+13.0—8.0	
	16^h 47^m 8^s.30		16^h 56^m 15^s.75	4 H. Draconis scheint schwächer als 5 Grösse zu sein, trotzdem der Himmel ganz klar ist.
	47 26 .00		56 26 .70	
	47 42 .90		56 37 .70	
	48 0 .50		56 49 .10	
	48 18 .80		57 0 .65	
	48 36 .25		57 12 .00	
	48 53 .25		57 22 .60	
	+11.6—9.3		+13.0—7.9	
Corr. Dent.	—3^m 5^s.11		—3^m 5^s.12	
		50° 0′ 11″ 08		
		— 0 .02		
		+ 0 .99		
		+ 0 .47		
		+ 0 .25		
		— 0 .45		
		— 0 .01		
		φ 50 0 11 .26		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

♂ 1 Juli 1890.

№ XII.

	Nord ψ Cassiop.		Süd η Serpentis
	+13.6—7.7		+12.9—8.4
	$17^h\ 21^m\ 48^s.80$		$17^h\ 25^m\ 54^s.90$
	22 2 .10		26 13 .85
	22 15 .90		26 34 .50
	22 30 .00		26 54 .50
	22 43 .50		27 15 .35
	22 56 .35		27 34 .90
	23 10 .20		27 55 .35
	+14.4—6.9		+12.4—8.9
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.15$		$-3^m\ 5^s.15$
		$50^0\ 0'\ 9''\ 98$	
		+1 .15	
		+0 .55	
		+1 .16	
		+1 .12	
		+1 .56	
		+0 .98	
		φ 50 0 10 .91	

♂ 1 Juli 1890.

№ XIII.

	Nord ϰ Cephei		Süd 110 Herculis
	+12.0—9.2		+11.8—9.8
	$18^h\ 2^m\ 42^s.30$		$18^h\ 15^m\ 1^s.70$
	3 5 .15		15 25 .00
	3 28 .40		15 48 .90
	3 52 .35		16 13 .15
	4 15 .75		16 38 .50
	4 38 .50		17 2 .85
	5 2 .35		17 27 .95
	+12.3—8.9		+11.7—9.8
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.19$		$-3^m\ 5^s.21$
		$50^0\ 0'\ 10''\ 60$	
		+0 .78	
		+0 .83	
		+0 .78	
		+0 .76	
		+0 .84	
		+0 .11	
		φ 50 0 11 .19	

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

☿ 2 Juli 1890.

№ VII.

	Süd		Nord
	109 Virginis		ρ Urs. mj.
	+9.8—9.2		+9.0—10.1
	15^h 51^m $16^s.75$		15^h 58^m $1^s.90$
	51 31 .75		58 13 .70
	51 45 .60		58 25 .25
	52 0 .65		58 37 .00
	52 15 .10		58 49 .00
	52 29 .65		59 1 .00
	52 43 .35		59 12 .60
	+9.1—10.0		+9.0—10.1
Corr. Dent.	-3^m $5^s.77$		-3^m $5^s.78$
		50° 0′ 9″ 65	
		+1 .19	
		+0 .41	
		+1 .22	
		+0 .52	
		+0 .74	
		+1 .56	
		φ 50 0 10 .46	

☿ 2 Juli 1890.

№ VIII.

	Süd		Nord
	μ Virginis		o Urs. mj.
	+10.6—8.9		+8.3—11.0
	16^h 13^m $12^s.15$		16^h 20^m $51^s.75$
	13 24 .30		21 3 .15
	13 36 .10		21 13 .75
	13 48 .40		21 25 .00
	14 0 .35		21 37 .00
	14 12 .55		21 47 .80
	14 24 .10		21 58 .90
	+10.6—8.8		+8.3—11.0
Corr. Dent.	-3^m $5^s.79$		-3^m $5^s.80$
		50° 0′ 10″ 37	
		+1 .56	
		+1 .78	
		+0 .69	
		+2 .15	
		+0 .34	
		+0 .93	
		φ 50 0 11 .43	

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

☿ 2 Juli 1890.

№ X.

	Süd	Nord	
	α Serpentis	35 Urs. mj.	
	+10.0—9.5	+9.0—10.7	
	16^h 29^m $49^s.60$	16^h 41^m $54^s.75$	
	30 8 .75	42 5 .70	
	30 26 .70	42 16 .75	
	30 45 .25	42 28 .20	
	31 4 .00	42 39 .50	
	31 22 .50	42 50 .75	
	31 41 .00	43 1 .65	
	+10.0—9.7	+9.0—10.7	
Corr. Dent.	-3^m $5^s.80$	-3^m $5^s.81$	

50° 0′ 11″ 38
— 0 .44
— 1 .60
— 0 .76
— 0 .13
— 0 .20
— 1 .36
φ 50 0 10 .74

☿ 2 Juli 1890.

№ XI.

	Süd	Nord	Bemerkungen
	4 H. Draconis	β Serpentis	
	+10.0—9.9	+12.2—7.5	
	16^h 47^m $5^s.25$	16^h 56^m $14^s.20$	4 H. Draconis scheint schwächer als 5-ter Grösse zu sein.
	47 23 .50	56 25 .50	
	47 40 .65	56 36 .40	
	47 58 .20	56 47 .80	
	48 15 .85	56 59 .10	
	48 33 .50	57 10 .40	
	48 50 .50	57 21 .05	
	+10.0—9.8	+12.3—7.4	
Corr. Dent.	-3^m $5^s.82$	-3^m $5^s.82$	

50° 0′ 10″ 96
— 0 .65
+ 0 .37
+ 0 .53
— 0 .17
— 0 .39
— 0 .07
φ 50 0 10 .91

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.

☿ 2 Juli 1890.

№ XII.

	Nord		Süd	
	ψ Cassiop.		η Serpentis	
	+11.1—9.0		+10.5—9.9	
	$17^h\ 21^m\ 52^s.75$		$17^h\ 25^m\ 59^s.85$	
	22 5 .90		26 19 .70	
	22 19 .40		26 39 .90	Beide Sterne unruhig.
	22 33 .50		27 0 .10	
	22 47 .15		27 20 .15	
	23 0 .15		27 40 .50	
	23 13 .90		28 0 .65	
	+11.9—8.2		+9.6—10.9	
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.84$		$-3^m\ 5^s.84$	
		$50^0\ 0'\ 11''\ 47$		
		— 0 .56		
		+ 0 .40		
		+ 0 .93		
		— 0 .40		
		+ 0 .80		
		— 0 .06		
		φ 50 0 11 .63		

☿ 2 Juli 1890.

№ XIII.

	Nord		Süd
	$\varkappa$ Cephei		110 Herculis
	+12.0—10.8		+11.2—11.6
	$18^h\ 2^m\ 33^s.35$		$18^h\ 14^m\ 51^s.10$
	2 55 .85		15 14 .80
	3 19 .75		15 38 .65
	3 43 .15		16 3 .35
	4 6 .75		16 28 .10
	4 29 .65		16 51 .50
	4 53 .20		17 17 .40
	+13.8—9.0		+10.6—12.3
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.87$		$-3^m\ 5^s.88$
		$50^0\ 0'\ 11''\ 92$	
		— 0 .81	
		+ 0 .25	
		— 0 .51	
		0 .00	
		— 1 .01	
		— 0 .38	
		φ 50 0 11 .57	

§ 10.

Die Beobachtungen nach der Pewtzow'schen Methode sind bei sehr kleinen Azimuthen, wegen den zu langsamen Aenderungen der Sternhöhen sogar bei geringen Fädendistanzen, unbequem. Deswegen kommen bei den in der oben citirten Abhandlung von H. Pewtzow angeführten Beobachtungen die Azimuthe unter 10^0 nicht vor. Im Jahre 1877 machte Prof. Fedorenko in Charkow eine Reihe Breitenbestimmungen nach einer Methode, die er als „Methode circummeridionaler und gleicher Sternhöhen zu beiden Seiten des Zenits" *) bezeichnete. Im Grunde genommen ist diese Methode mit der hier betrachteten identisch. Nur hat Fedorenko seine Beobachtungen nach anderen Formeln als den hier auseinandergesetzten berechnet und die Beobachtungen selbst wurden ausschliesslich in grosser Nähe vom Meridian und auch theilweise auf beiden Seiten desselben ausgeführt. Der Durchgang der Sterne durch ein enges Netz von drei Fäden dauerte bei Fedorenko manchmal bis 12^m. Zwei von den 16 von Fedorenko zusammengestellten Sternpaaren habe ich benutzt, um die Lücken zwischen den vorhin angegebenen Paaren auszufüllen. Ausserdem wurden noch zwei von Fedorenko's Paaren je einmal gelegentlich beobachtet und im Ganzen wurden mit diesen Paaren elf Breitenbestimmungen erhalten. Um aber die Dauer des Durchganges jedes Sterns möglichst zu verkürzen, habe ich zwischen zwei ohnedies schon ziemlich nahen festen Fäden noch einen beweglichen Faden eingestellt, oder, bei ganz kleinen Azimuthen, einen festen Faden inmitten eines beweglichen Fadenpaares, und beobachtete die Durchgänge durch das somit entstandene sehr enge Netz von drei Fäden.

Die Beobachtungsephemeride und massgebenden Winkel für Fedorenko's Paare sind wie folgt:

№	Sternzeit.	Sternnamen.	Azimute.	Zenitdistanzen.	Azimute.	Sternnamen.	Sternzeit.	Massgeb. Winkel.
1	$15^h\ 26^m$	2 H. Urs. min.	$169^0 35'$	$16^0 47'$	$16^0\ 2'$	δ Bootis.	$15^h\ 33^m$	$87^0 11'$
2	16 20	ε Coron. bor.	15 16	23 23	167 35	γ Urs. min.	16 25	88 34
3	17 7	α Urs. min.	181 39	40 42	8 20	$\varkappa$ Ophiuchi.	17 14	85 0
4	17 40	α Urs. min.	181 47	40 33	355 27	72 Ophiuchi.	17 50	88 37

Die Beobachtungen und die daraus abgeleiteten Resultate sind in ähnlicher Weise, wie in § 9, in folgender Tabelle vereinigt:

---

*) *И. Федоренко*, „Способъ околомеридіональныхъ и равныхъ высотъ звѣздъ по обѣ стороны отъ зенита". Харьковъ. 1879.

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		☉ 22 Juni 1890.		
		№ 1.		
	Nord		Süd	
	2 H. Urs. min.		δ Bootis	
	+15.7—13.2		+14.3—14.5	
	$15^h\ 27^m\ 21^s.50$		$15^h\ 36^m\ 2^s.25$	
	27 37 .75		36 11 .50	
	27 53 .00		36 21 .35	
	+15.3—13.4		+14.6—14.4	
Corr. Dent.	$-2^m\ 56^s.51$		$-2^m\ 56^s.51$	
		$50^0\ 0'\ 12''\ 67$		
		—1 .11		
		—0 .55		
		φ 50 0 12 .12		
		☉ 22 Juni 1890.		
		№ 2.		
	Süd		Nord	
	ε Coron. bor.		γ Urs. min.	
	+13.7—15.0		+13.7—15.0	
	$16^h\ 23^m\ 7^s.75$		$16^h\ 29^m\ 4^s.15$	
	23 17 .75		29 17 .10	
	23 28 .00		29 30 .20	
	+13.7—15.0		+14.1—14.6	Ganzen Abend sehr
Corr. Dent.	$-2^m\ 56^s.53$		$-2^m\ 56^s.54$	schlechte Bilder.
		$50^0\ 0'\ 11''\ 61$		
		—0 .72		
		+0 .51		
		φ 50 0 11 .54		
		♂ 24 Juni 1890.		
		№ 4.		
	Nord		Süd	
	α Urs. min.		72 Ophiuchi	
	+11.8—11.9		+12.8—12.0	
	$17^h\ 37^m\ 32^s.35$		$17^h\ 50^m\ 20^s.70$	
	38 20 .50		50 34 .70	
	39 14 .00		50 53 .25	
	+11.8—12.1		+12.7—12.0	
Corr. Dent.	$-2^m\ 58^s.26$		$-2^m\ 58^s.27$	
		$50^0\ 0'\ 11''\ 19$		
		+0 .64		
		+0 .51		
		φ 50 0 11 .57		

Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
	⊙ 29 Juni 1890.		
	№ 3.		
Nord		Süd	
α Urs. min.		κ Ophiuchi	
+10.0—15.3		+15.0—10.8	
17^h 6^m $56^s.00$		17^h 17^m $42^s.20$	Bei α Urs. min. höchst unruhige und verschwommene Bilder. Die Durchgänge ganz unsicher.
8 44 .00		17 20 .65	
10 10 .50		17 2 .75	
+10.6—15.0		+14.9—10.9	
Corr. Dent. -3^m $2^s.71$		-3^m $2^s.73$	
	50° 0′ 10″ 51		
	— 0 .24		
	— 0 .42		
	φ 50 0 10 .57		
	⊙ 29 Juni 1890.		
	№ 4.		
Nord		Süd	
α Urs. min.		72 Ophiuchi	
+10.8—15.1		+13.9—12.0	
17^h 38^m $58^s.00$		17^h 50^m $50^s.50$	
39 42 .50		51 6 .25	
40 39 .00		51 24 .75	
+10.7—15.2		+14.0—12.0	
Corr. Dent. -3^m $2^s.76$		-3^m $2^s.77$	
	50° 0′ 10″ 86		
	— 0 .49		
	— 0 .25		
	φ 50 0 10 .61		
	☾ 30 Juni 1890.		
	№ 3.		
Nord		Süd	
α Urs. min.		κ Ophiuchi	
+10.4—10.0		+12.9—7.8	
17^h 5^m $54^s.50$		17^h 17^m $57^s.85$	
6 45 .25		17 48 .25	
7 47 .75		17 36 .35	
+9.9—10.5		+12.2—9.2	
Corr. Dent. -3^m $4^s.38$		-3^m $4^s.40$	
	50° 0′ 11″ 05		
	+ 0 .06		
	— 0 .11		
	φ 50 0 11 .03		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		☾ 30 Juni 1891.		
		№ 4.		
	Nord		Süd	
	α Urs. min.		72 Ophiuchi	
	+11.8−9.1		—	
	$17^h\ 36^m\ 7^s.25$		—	
	36 52 .25		$17^h\ 50^m\ 7^s.35$	
	37 48 .75		50 24 .50	
	+11.7−9.3		+12.4−8.9	
Corr. Dent.	$-3^m\ 4^s.43$		$-3^m\ 4^s.44$	
		$50^0\ 0'\ 10''\ 70$		
		−0 .24		
		φ 50 0 10 .58		
		♂ 1 Juli 1890.		
		№ 3.		
	Nord		Süd	
	α Urs. min.		ϰ Ophiuchi	
	+12.7−8.7		+9.3−12.0	
	$17^h\ 10^m\ 42^s.75$		$17^h\ 17^m\ 7^s.00$	
	11 32 .25		16 55 .75	
	12 31 .00		16 44 .00	
	+13.3−8.0		+9.6−11.8	
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.14$		$-3^m\ 5^s.14$	
		$50^0\ 0'\ 12''\ 78$		
		−0 .85		
		−0 .22		
		φ 50 0 12 .42		
		♂ 1 Juli 1890.		
		№ 4.		
	Nord		Süd	
	α Urs. min.		72 Ophiuchi	
	+11.3−10.0		+10.8−10.3	
	$17^h\ 41^m\ 31^s.00$		$17^h\ 51^m\ 40^s.00$	
	42 22 .00		51 55 .25	
	43 17 .25		52 14 .70	
	+11.8−9.5		+10.8−10.3	
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.17$		$-3^m\ 5^s.18$	
		$50^0\ 0'\ 11''\ 12$		
		+1 .00		
		−0 .04		
		φ 50 0 11 .44		

	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Breite aus dem Mittelfaden. Breite aus den Seitenfäden *minus* Breite aus dem Mittelfaden. Mittel aus allen Fäden.	Durchgangszeiten, Niveauablesungen und Chronometer-correction.	Bemerkungen.
		☿ 2 Juli 1890.		
		№ 3.		
	Nord		Süd	
	α Urs. min.		$\varkappa$ Ophiuchi	
	$+11.4-8.6$		$+10.1-9.9$	α Urs. min. sehr unruhig.
	$17^h\ 10^m\ 11^s.50$		$17^h\ 17^m\ 12^s.50$	
	11 5 .25		17 1 .25	
	12 3 .75		16 48 .85	
	$+12.0-8.0$		$+10.2-9.9$	
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.83$		$-3^m\ 5^s.84$	
		50° 0′ 12″ 06		
		— 0 .35		
		+ 0 .38		
		φ 50 0 12 .07		
		☿ 2 Juli 1890.		
		№ 4.		
	Nord		Süd	
	α Urs. min.		72 Ophiuchi	
	$+12.4-8.9$		$+13.2-8.9$	
	$17^h\ 41^m\ 43^s.25$		$17^h\ 51^m\ 42^s.00$	
	42 35 .50		52 3 .25	
	43 25 .75		52 19 .50	
	$+12.4-9.0$		$+13.2-8.9$	
Corr. Dent.	$-3^m\ 5^s.86$		$-3^m\ 5^s.87$	
		50° 0′ 11″ 57		
		— 1 .21		
		— 0 .82		
		φ 50 0 10 .89		

§ 11.

Stellen wir jetzt alle in den vorhergehenden §§ angeführten Beobachtungen behufs Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers der Breitenbestimmung aus einem Sternpaare nach der Pewtzow'schen Methode zusammen. Ich werde dabei diejenigen Beobachtungen, welche in grosser Nähe vom Meridian gemacht wurden, von den anderen nicht trennen, weil die Anzahl der Beobachtungen erster Art zu gering ist, um die etwaige Verschiedenheit in der Genauigkeit der Breitenbestimmungen bei verschiedenen Azimuthen mit Bestimmtheit bemerken zu können. Auch die in Bezug auf den Zustand der Sternbilder u. s. w. im Beobachtungsjournal gemachten Bemerkungen werden nicht berücksichtigt, um gewissermassen die untere Grenze für die Genauigkeit der betrachteten Methode zu erhalten. Bei meinen Beobachtungen konnte die für die Pewtzow'sche Methode möglichste Genauigkeit nicht erreicht werden, was, abgesehen von der kleinen Unsicherheit im Theilwerth des Niveau's, der ungenügenden Anzahl von Niveauablesungen und des ausnehmend ungünstigen Wetters, auch dadurch hervorgerufen wurde, dass viele von den beobachteten Sternen an der Grenze der Sichtbarkeit (bei beleuchtetem Felde) für das gebrauchte Fernrohr lagen. Nämlich in acht von den fünfzehn beobachteten Paaren war einer von beiden Sternen 5ter oder 5.1 Grösse *), wodurch bei nicht vollkommen heiterem Himmel die Beobachtungen ungemein erschwert wurden.

In der nachfolgenden Tabelle giebt die Col. 1 die laufenden Nummern jeder Polhöhe, Col. 2 die Nummern der Paare, Col. 3 die Zeit der Bestimmung der Polhöhe, Col. 4 die einzelnen Polhöhen φ', Col. 5 die Mittelwerthe der Polhöhen aus jedem Paare φ'' und Col. 6 und 7 die ersten und zweiten Potenzen der Abweichungen vom Mittelwerth für jedes Paar.

№	№ der Paare.	Zeit der Bestimmung d. Polh.	φ'	φ''	v	vv
1		29 Mai	50° 0′ 10″.28		−0″.88	0.7744
2	II	30 „	12 .52	50° 0′ 11″.16	+1 .36	1.8496
3		31 „	10 .70		−0 .46	0.2116
4		13 Mai	50 0 12 .36		+0 .57	0.3249
5		21 „	12 .01		+0 .22	0.0484
6		29 „	11 .43		−0 .36	0.1296
7		30 „	12 .31		+0 .52	0.2704
8	III	31 „	11 .04	50 0 11 .79	−0 .75	0.5625
9		12 Juni	11 .94		+0 .15	0.0225
10		17 „	11 .51		−0 .28	0.0784
11		18 „	11 .52		−0 .27	0.0729
12		22 „	12 .02		+0 .23	0.0529
13	IV	17 Juni	50 0 11 .00	50 0 11 .00	—	—
14	VI	18 Juni	50 0 10 .21	50 0 10 .82	−0 .61	0.3721
15		29 „	11 .42		+0 .60	0.3600
16		17 Juni	50 0 11 .46		+0 .24	0.0576
17		18 „	12 .29		+1 .07	1.1449
18	VII	22 „	11 .36	50 0 11 .22	+0 .14	0.0196
19		29 „	10 .77		−0 .45	0.2025
20		1 Juli	11 .00		−0 .22	0.0484
21		2 „	10 .46		−0 .76	0.5776
22		31 Mai	50 0 11 .14		−0 .12	0.0144
23	VIII	28 Juni	11 .35	50 0 11 .26	+0 .09	0.0081
24		1 Juli	11 .12		−0 .14	0.0196
25		2 „	11 .43		+0 .17	0.0289
26	IX	17 Juni	50 0 11 .08	50 0 11 .08	—	—

*) Es sind die Paare: II, IV, VII, IX, X, XI, XII und 1. Zwar ist der Stern 4 H. Draconis, welcher in den Paaren IV und XI vorkommt, im Berliner Jahrbuch als 4.6 Grösse bezeichnet; jedoch ist er, oder (falls er veränderlich ist) war er während meiner Beobachtungen entschieden nicht heller, als 5.1 Grosse. Auch in der Bonner Durchmusterung ist für die Grösse dieses Sternes der Werth von 5,1 angegeben.

№	№ der Paare.	Zeit der Bestimmung d. Polh.	φ′	φ″	v	vv
27		17 Juni	50 0 10 .99		+0 .06	0.0036
28		28 „	10 .83		−0 .10	0.0100
29	X	29 „	10 .92	50 0 10 .93	−0 .01	0.0001
30		1 Juli	11 .19		+0 .26	0.0676
31		2 „	10 .74		−0 .19	0.0361
32		17 Juni	50 0 11 .74		+0 .35	0.1225
33		22 „	12 .58		+1 .19	1.4161
34		28 „	11 .43		+0 .04	0.0016
35	XI	29 „	10 .87	50 0 11 .39	−0 .52	0.2704
36		30 „	10 .92		−0 .47	0.2209
37		1 Juli	11 .26		−0 .13	0.0169
38		2 „	10 .91		−0 .48	0.2304
39		29 Juni	50 0 11 .96		+0 .39	0.1521
40		30 „	11 .78		+0 .21	0.0441
41	XII	1 Juli	10 .91	50 0 11 .57	−0 .66	0.4356
42		2 „	11 .63		+0 .06	0.0036
43		24 Juni	50 0 11 .33		+0 .36	0.1296
44		29 „	10 .90		−0 .07	0.0049
45	XIII	30 „	9 .88	50 0 10 .97	−1 .09	1.1881
46		1 Juli	11 .19		+0 .22	0.0484
47		2 „	11 .57		+0 .60	0.3600
48	1	22 Juni	50 0 12 .12	50 0 12 .12	—	—
49	2	22 Juni	50 0 11 .54	50 0 11 .54	—	—
50		29 Juni	50 0 10 .57		−0 .95	0.9025
51		30 „	11 .03		−0 .49	0.2401
52	3	1 Juli	12 .42	50 0 11 .52	+0 .90	0.8100
53		2 „	12 .07		+0 .55	0.3025
54		24 Juni	50 0 11 .57		+0 .55	0.3025
55		29 „	10 .61		−0 .41	0.1681
56	4	30 „	10 .58	50 0 11 .02	−0 .44	0.1936
57		1 Juli	11 .44		+0 .42	0.1764
58		2 „	10 .89		−0 .13	0.0169

Arithmetisches Mittel aus allen Bestimmungen . . . . 50° 0′ 11″.31 $[vv] = 15.1269$

§ 12.

Für die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers der Breite aus einmaliger Beobachtung eines Sternpaares, nach der Formel:

$$e = 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}},$$ wo n—Anzahl der Beobachtungen und m—Anzahl der Paare ist,

entnimmt man aus der vorausgehenden Tabelle:

$$[vv] = 15.1269\,, \quad n - m = 43$$

Aus diesen Zahlen bekommt man:

$$e = 0''40$$

Zur Vergleichung führe ich hier einige Bestimmungen desselben Fehlers für verschiedene Instrumente und Beobachter bei Breitenbestimmungen nach der Talcott'schen Methode:

Wahrsch. Fehler.	Objectivöffnung.	Beobachter.	Quellenangabe.
$\pm 0''37$	67^{mm}	W. Schur	Astr. Nachr. № 2497
± 0.47	$2\frac{1}{2}$ Z. ($63^{mm}.5$)	A. Hall	„ „ № 2625
± 0.32	130^{mm}(5 Z)	W. Schur	„ „ № 2857—58
± 0.50		Observers of Coast Survey	*W. Chauvenet*, A manual of. sper. and pract. Astron. Vol. II, p. 353.

Wird vorläufig der wahrscheinliche Fehler $\pm 0'',32$ ausgeschlossen, welcher für ein fünfzölliges Instrument gilt, so sieht man, dass im Mittel die Breitenbestimmung nach Pewtzow'scher Methode, wenigstens ebenso sicher ist, wie eine solche nach Talcott. Es muss aber in Betracht gezogen werden, dass meine Beobachtungen mit einem sehr lichtschwachen Fernrohr von nur 47^{mm} Objectivöffnung und theilweise bei ganz ausserordentlich ungünstigen meteorologischen Bedingungen angestellt wurden *). Als besonders unsicher sind im Journal alle Beobachtungen vom 18 und 22 Juni und die Breitenbestimmungen aus dem Paare II vom 29 und 30 Mai bezeichnet. Am 18 und 22 Juni machten Nebel und Thau, welcher fortwährend die Gläser und das Niveau bedeckte, sichere Bestimmungen ganz unmöglich, und wenn trotzdem beobachtet wurde, so geschah es nur in der Absicht um zu sehen, in wie weit derartige Bedingungen die Genauigkeit der Breitenbestimmung vermindern können. Schliesst man die soeben bezeichneten Beobachtungen aus, so wird die Summe der Fehlerquadrate gleich 8.2541 und der wahrscheinliche Fehler $e = 0''33$, d. h. fast derselbe Fehler, welcher bei Schur (siehe oben) für die Beobachtungen mit einem fünfzölligen Fernrohr nach der Talcott'schen Methode herauskommt.

Die Ungunst der Witterung hat mir nur vier Mal erlaubt während eines Abends mehr als drei—fünf Breitenbestimmungen zu erhalten. Um die bei sechs oder mehr Bestimmungen an einem Abend erreichte Genauigkeit übersichtlich darzustellen, führe ich hier die am 17 und 29 Juni, 1 und 2 Juli angestellten Beobachtungen nochmals an:

---

*) Wie bedeutend der Einfluss der meteorologischen Verhältnisse ist, ersieht man u. a. aus dem bei Chauvenet (l. c. p. 351 ff.) angeführten Beispiel der Breitenbestimmung nach Talcott in Roslyn: Der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung war nur $0''30$. Chauvenet bemerkt dabei: „Possibly an unusually favorable state of the atmosphere may have conspired to give this series an unusual degree of precision, as the average experience of the observers of the Coast Survey gives the value of e somewhat greater.

17 Juni			29 Juni		
Paar №	III	50° 0′ 11″.51	Paar №	VI	50° 0′ 11″.42
„	IV	11 .00	„	VII	10 .77
„	VII	11 .46	„	X	10 .92:
„	IX	11 .08	„	XI	10 .87:
„	X	10 .99	„	XII	11 .96
„	XI	11 .74	„	XIII	10 .90:
			„	3	10 .57:
			„	4	10 .61
Mittel		40° 0′ 11″.30			50° 0′ 11″.00

1 Juli			2 Juli		
Paar №	VII	50° 0′ 11″.00	Paar №	VII	50° 0′ 10″.46
„	VIII	11 .12	„	VIII	11 .43
„	X	11 .19	„	X	10 .74
„	XI	11 .26	„	XI	10 .91
„	XII	10 .91	„	XII	11 .63:
„	XIII	11 .19	„	XIII	11 .57
„	3	12 .42	„	3	12 .07:
„	4	11 .44	„	4	10 .89
Mittel		50° 0′ 11″.32			50° 0′ 11″.21

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung der Mittelwerthe der Breite für jeden Abend eine befriedigende, trotzdem am 29 Juni vier und am 2 Juli zwei Bestimmungen durch Wolken und Nebel theilweise verhindert wurden. Eine bedeutende, aber vielleicht gar nicht zufällige Abweichung von einander zeigen die Mittelwerthe der Bestimmungen am 22 und 30 Juni:

22 Juni			30 Juni		
Paar №	III	50° 0′ 12″.02	Paar №	XI	50° 0′ 10″.92
„	VII	11 .36	„	XII	11 .78
„	XI	12 .58	„	XIII	9 .88
„	1	12 .12	„	3	11 .03
„	2	11 .54	„	4	10 .58
Mittel		50° 0′ 11″.92			50° 0′ 10″.84

Am 22 Juni war nämlich ein sehr kühler und feuchter Abend nach einem verhältnissmässig warmen Tage. Am 30 Juni erfolgte umgekehrt, im Vergleich mit dem vorangegangenen Tage, eine starke Temperaturerhöhung. Es ist jedenfalls bemerkenswerth und für die richtige Beurtheilung der Pewtzow'schen Methode nicht unwichtig dass, wie mann aus der früher angeführten Zusammenstellung sämmtlicher Beobachtungen ersehen kann, alle von dem Mittel bedeutend abweichenden Breitenwerthe mit den Tagen zusammenfallen, an welchen starke Störungen atmospherischer Zustände eintrafen *). Von der hart an der Stadtgrenze liegenden Charkower Uni-

*) Die bedeutenden Abweichungen vom Mittel, welche beide Beobachtungen des II[ten] Paares am 29 und 30 Mai zeigen, sind theilweise durch schlechten Zustand der Sternbilder hervorgerufen. Aber auch die Lufttemperatur machte an diesen Tagen starke

versitätssternwarte dehnt sich nach Norden eine waldlose Hochebene und nach Süden die ansehnliche Stadt aus, was einen merklichen Unterschied der Refraction auf beiden Seiten des Zenits wenigstens an gewissen Tagesstunden erwarten lässt. Und in der That haben die gleichzeitigen Thermometerablesungen auf der meteorologischen Station in der Stadt und auf der Sternwarte eine bedeutende und hauptsächlich mit den Tagesstunden veränderliche Differenz gezeigt. Durch jeden raschen Umschlag der Lufttemperatur wird der Betrag dieser Differenz beeinflusst. Nehmen wir nun an, dass die Lufttemperatur in kurzer Zeit stark gestiegen sei, so werden die Luftschichten über der Stadt in Folge der thermischen Einwirkung ihrer massiven Gebäude weniger erwärmt, als jene Schichten, welche über der freien Hochebene sich ausbreiten. Das gerade Gegentheil (und vielleicht mit noch grösseren Temperaturdifferenzen zwischen Norden und Süden) wird bei rascher Luftabkühlung erfolgen. Im ersten Falle wird die Refraction nach Süden grösser als nach Norden, und die aus der Verschiedenheit der Refraction entstehende Breitencorrection, wie man aus der Formel 11) ersehen kann, in diesem Falle *positiv* und zwar $= \frac{\varrho}{\cos a - \cos a'}$ wo ϱ Refractionsunterschied zwischen Süden und Norden ist. Im entgegengesetzten Falle wird diese Correction durch die nämliche Formel ausgedrückt, aber *negativ*.

Berechnet man nach dieser Formel, bei plausibeler Annahme einer Temperaturdifferenz von 2° R., die Breitencorrectionen für 22 und 30 Juni, so wird dadurch nur etwas über ein drittel der wirklich stattfindenden Abweichungen aufgehoben. Aber wir haben dabei 1ns, die in Folge der Temperaturverschiedenheit nach Norden und Süden eintretenden Deformationen der Niveauflächen der Atmosphaere gar nicht in Betracht gezogen und 2ns, die Beobachtungen selbst sind zu wenig zahlreich und sicher für die genaue Ermittelung der durch die Refractionsänderungen bedingten Breitenfehler.

Für die Ableitung des wahrscheinlichsten Werthes der Breite aus allen von mir nach der Pewtzow'schen Methode gemachten Bestimmungen habe ich den warscheinlichen Fehler beider Coordinaten der Sterne zu 0″.2 angenommen. Der wahrscheinliche Fehler e' des Mittels aus n — facher Beobachtung eines Sternpaares wird dann:

Sprünge, wie män aus den folgenden Thermometerablesungen, welche um 9 Uhr Abends gemacht wurden, ersehen kann:

28	Mai	+ 17°.8 C.
29	„	+ 21 .5
30	„	+ 14 .4

Am 18 Juni waren dieselben meteorologischen Verhältnisse, wie am 22 Juni.

$$e' = \sqrt{\mu^2 + \frac{(0''40)^2}{n}}, \text{ wo}$$

$$\mu^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'} \bigtriangleup \alpha'\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \bigtriangleup \alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta'} \bigtriangleup \delta'\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} \bigtriangleup \delta\right)^2$$

Die relativen Gewichte der Bestimmungen aus jedem Paare, nach der Formel $p = \frac{(0''40)^2}{\mu^2 + \frac{(0''40)^2}{n}}$ berechnet, und die Berechnung des wahrscheinlichsten Werthes der Polhöhe sind weiter, wie folgt:

№ des Paares	φ—50° 0′ 11″	p.	$p(\varphi$—50° 0′ 11″$)$	v	pvv
II	+0″.16	2.22	+0″.36	—0″.14	0.04
III	+0 .79	5.03	+3 .97	+0 .49	1.21
IV	0 .00	0.91	0 .00	—0 .30	0.08
VI	—0 .18	1.67	—0 .30	—0 .48	0.38
VII	+0 .22	3.58	+0 .79	—0 .08	0.03
VIII	+0 .26	2.60	+0 .68	—0 .04	0.00
IX	+0 .08	0.89	+0 .07	—0 .22	0.04
X	—0 .07	3.39	—0 .24	—0 .37	0.46
XI	+0 .39	4.53	+1 .77	+0 .09	0.04
XII	+0 .57	2.74	+1 .56	+0 .27	0.20
XIII	—0 .03	3.28	—0 .10	—0 .33	0.36
1	+1 .12	0.89	+1 .00	+0 .82	0.60
2	+0 .54	0.89	+0 .48	+0 .24	0.05
3	+0 .52	3.01	+1 .57	+0 .22	0.15
4	+0 .02	3.64	+0 .07	—0 .28	0.28
		$[p]=39.27$	$[p\varphi]=11''68$		$[pvv]=3.92$

$$\varphi = 50^0\ 0'\ 11''30 \pm 0''.06$$

Der Unterschied zwischen diesem Resultat und dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen (50⁰ 0′ 11″31) ist, wie zu erwarten war, ganz unbedeutend.

Da der Meridiankreis von dem Beobachtungsort um 1″80 südlicher liegt, so folgt

Breite des Meridiankreises der Charkower Sternwarte=**50⁰0′9″50±0″06.**

Januar 1891.
Charkow.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

ГОДИЧНОЕ ОБЩЕЕ СОБРАНІЕ

14-го Сентября 1889 г.

1. Предсѣдатель доложилъ о исполнившемся десятилѣтіи со дня возникновенія Общества, первое собраніе котораго было 8-го сентября 1879 года.

2. Доложенъ отчетъ о дѣятельности Общества и о состояніи его матеріальныхъ средствъ за 1888—89 академическій годъ.

3. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета на 1889—90 годъ. Избраны:

Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, профессоръ университета.

Товарищами предсѣдателя: В. Л. Кирпичевъ, директоръ Харьк. технологич. института и М. А. Тихомандрицкій, профессоръ университета.

Секретаремъ А. П. Грузинцевъ, преподаватель 1-й Харьк. гимназіи.

4. Въ этомъ засѣданіи получено въ даръ Обществу отъ М. А. Тихомандрицкаго его сочиненіе „Курсъ теоріи конечныхъ разностей“, Харьковъ, 1889.

Засѣданіе 22-го Сентября.

1. Предсѣдательствовалъ почетный членъ Общества, академикъ В. Г. Имшенецкій.

2. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе „О разысканіи особенныхъ точекъ алгебраическихъ кривыхъ“.

3. В. Г. Имшенецкій сдѣлалъ сообщеніе: „Объ основномъ предложеніи статики“.

4. Г. В. Левицкій изложилъ предварительное объясненіе его работъ по опредѣленію долготы г. Харькова.

Засѣданіе 27-го Октября.

1. Н. Д. Пильчиковъ сдѣлалъ сообщеніе: „О новомъ рефрактометрѣ для жидкостей“.

2. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу о сложеніи силъ“.

Засѣданіе 1-го Декабря.

1. Х. С. Головинъ изложилъ свою статью: „По вопросу о сложеніи силъ".

2. К. А. Андреевъ сдѣлалъ дополненія по тому же вопросу къ своему сообщенію предыдущаго засѣданія.

3. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О личныхъ ошибкахъ при наблюденіяхъ прохожденій".

4. М. А. Тихомандрицкій изложилъ содержаніе статьи г. Вороного: „О числахъ Бернулли".

Засѣданіе 5-го Февраля.

1. Предсѣдатель доложилъ о утратѣ, понесенной Обществомъ въ лицѣ его почетнаго члена, почетнаго вицепрезидента Императорской академіи наукъ Виктора Яковлевича Буняковскаго, скончавшагося въ С.Петербургѣ 30 ноября минувшаго года.

Въ отвѣтъ на это заявленіе члены Общества выразили свое прискорбіе по поводу понесенной утраты и свое почтеніе къ памяти усопшаго, вставши съ своихъ мѣстъ.

2. Предсѣдатель доложилъ Обществу о предстоящемъ 17-го февраля юбилеѣ Гамбургскаго математическаго общества, празднующаго въ этомъ году 200-лѣтіе своего существованія. Постановлено послать Гамбургскому математическому обществу поздравленіе по телеграфу.

3. К. А. Андреевъ прочелъ свое воспоминаніе о жизни и ученой дѣятельности В. Я. Буняковскаго.

4. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О вертикальномъ коллиматорѣ".

5. А. М. Ляпуновъ изложилъ начало своей работы: „О характеристическомъ уравненіи, соотвѣтствующемъ данной системѣ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами".

6. Въ этомъ засѣданіи получено въ даръ отъ Гамбургскаго математ. общества его юбилейное изданіе: „Festschrift der Hamburger Gesellschaft der Mathematischen Wissenschaften", 2 Theile, Leipzig 1890.

Засѣданіе 9-го Марта.

1. Избранъ въ члены-корреспонденты Общества Константинъ Александровичъ Тороповъ, преподаватель Пермской гимназіи (по предложенію М. А. Тихомандрицкаго и К. А. Андреева).

2. А. М. Ляпуновъ сообщилъ продолженіе своей работы: „О характеристическомъ уравненіи, соотвѣтствующемъ данной системѣ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами".

3. Г. В. Левицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О личныхъ ошибкахъ при наблюденіяхъ прохожденій" (дополненіе къ сообщенію 1-го декабря предыд. года).

4. К. А. Андреевъ сообщилъ одно геометрическое доказательство параллелограмма силъ.

5. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу отъ проф. А. А. Маркова его сочиненія: „Исчисленіе конечныхъ разностей. Отд. 1-й", Спб. 1889 и „Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева", Спб. 1889.

ГОДИЧНОЕ ОБЩЕЕ СОБРАНІЕ

23-го Сентября 1890 г.

1. Прочитанъ отчетъ о дѣятельности Общества и состояніи его матеріальныхъ средствъ за 1889—90 академическій годъ.

2. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета Общества на 1890—91 годъ. Составъ комитета остался по избраніи тотъ же, что и въ предыдущемъ году.

Засѣданіе 29-го Сентября.

1. М. П. Рудзкій сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій вида: $k_n \dfrac{d}{dx} k_{n-1} \dfrac{d}{dx} k_{n-2} \cdots k_1 \dfrac{du}{dx} = u$".

2. М. А. Тихомандрицкій изложилъ часть своего изслѣдованія подъ заглавіемъ: „Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія".

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу слѣдующія сочиненія отъ ихъ авторовъ: 1) Некрасовъ (П. А.)—„Теорема обратная теоремѣ Якова Бернулли", Москва 1890, и 2) Markoff (A)—„Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes". S.Pet. 1890.

Засѣданіе 9-го Ноября.

1. М. А. Тихомандрицкій докончилъ изложеніе своего изслѣдованія, начатое въ предыдущее засѣданіе.

2. Онъ же доложилъ замѣтку „Къ теоріи рядовъ" г. М. Лерха, привать-доцента политехнической школы въ Прагѣ, присланную ему чрезъ профессора Тиме въ Спб.

3. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О движеніи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости".

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу отъ проф. П. А. Некрасова его сочиненія: „Линейныя дифференціальныя уравненія, интегрируемыя посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ" и отъ проф. М. А. Тихомандрицкаго нѣсколько сочиненій акад. П. Л. Чебышева.

Засѣданіе 23-го Ноября.

1. А. П. Рудановскій сдѣлалъ сообщеніе: „Объ основномъ уравненіи въ теоріи жидкостей“.

2. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ системахъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій“.

Засѣданіе 14-го Декабря.

1. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О стереографической проекціи“.

2. Г. Муравьевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Способъ Остроградскаго, какъ средство отдѣленія алгебраической части интеграловъ“.