Communications de la Société mathématique de Kharkow
Série 4. Tome II

СООБЩЕНИЯ ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЧЕТВЕРТАЯ СЕРИЯ
Том II

(Печатается на средства, отпущенные Главнаукою УССР)

ХАРКІВ
1928

Communications de la Société mathématique de Kharkow
Série 4. Tome II

СООБЩЕНИЯ ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЧЕТВЕРТАЯ СЕРИЯ
Том II

(Печатается на средства, отпущенные Главнаукою УССР)

ХАРЬКОВ
1928

Библиографическое описание и шифры для библиотечных каталогов на эту книгу помещены в „Літопису Українського Друку“ и в „Карт-ковому Репертуарі“ Украинской Книжной Палаты

Трест „Харків-Друк“
Третя Друк. ім. т. Фрунзе.
Харк. Окрліт. ч. 369/к.
Зам. ч. 1746. Прим. 500.

Том II.

СОДЕРЖАНИЕ.

О некоторых свойствах регулярно монотонных функций

С. Н. Бернштейн

§ 1.

Я называю функцию $f(x)$ *регулярно монотонной в промежутке* (o, b), *если* $f(x)$, *а также ни одна из ее производных не меняет знака в этом промежутке**.

Частным и весьма важным классом таких функций являются функции абсолютно монотоные, все производные которых имеют одинаковый знак; к этому же классу заменой x на $(b-x)$ приводятся и те функции, которых последовательные производные противоположных знаков**. Я посвятил абсолютно монотонным функциям обширную статью, помещенную в Acta Mathematica, t. 52. Настоящая статья имеет целью установить несколько основных свойств, присущих всем регулярно монотонным функциям.

Каждая регулярно монотонная функция характеризуется рядом целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$, который будем называть *типом* функции и определим следующим образом. В виду возможности замены x через $b-x$ можем допустить, для определенности, что $f(x) \,.\, f'(x) \geqslant 0$; тогда первое типовое число λ_1 обладает свойством, что

$$\begin{aligned} &f^{(i-1)}(x) \,.\, f^{(i)}(x) \geqslant 0, \text{ при } i \leqslant \lambda_1, \\ &f^{(\lambda_1)}(x) \,.\, f^{(\lambda_1+1)}(x) \leqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Мы будем говорить, что $f(x), f'(x), \ldots, f^{(\lambda_1)}(x)$ образуют *перманакс* порядка λ_1.

Второе типовое число λ_2 должно обладать свойством, что

$$\begin{aligned} &f^{(i-1)}(x) \,.\, f^{(i)}(x) \leqslant 0, \text{ при } \lambda_1 < i \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 = b_2, \\ &f^{(b_2)}(x) \,.\, f^{(b_2+1)}(x) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Производные $f^{(\lambda_1)}(x), f^{(\lambda_1+1)}(x), \ldots, f^{(b_2)}(x)$ образуют *альтернанс* порядка λ_2.

---

* Leçons sur les propriétés extrémales etc.. стран. 196. В дальнейшем мне прийдется неоднократно ссылаться на эту книгу, которую я буду коротко обозначать буквами Р. Е.

** Ibidem.

Аналогичным образом определяются последовательные типовые числа $\lambda_3 \ldots$, $\lambda_n \ldots$, которые не могут, очевидно, быть равны 0. Только для абсолютно монотонных функций и их интегралов конечного порядка, число типовых чисел будет ограничено и последнее из них $\lambda_n = \infty$.

Из выше сказанного следует, что типовым числам λ_1, $\lambda_3, \ldots$, $\lambda_{2k-1}, \ldots$ соответствуют *перманансы*, а числам λ_2, $\lambda_4, \ldots$, $\lambda_{2k}, \ldots$ соответствуют *альтернансы* тех же порядков.

Если порядок i производной $f^{(i)}(x)$ удовлетворяет неравенству

$$b_{2k-1} < i < b_{2k},$$

где $b_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, то $f^{(i)}(x)$ является *внутренним членом альтернанса порядка* λ_{2k-1}; если

$$b_{2k} < i < b_{2k+1},$$

то $f^{(i)}(x)$ является *внутренним членом пермананса порядка* λ_{2k+1}.

Если $i = b_{2k-1}$, то $f^{(i)}(x)$ *является последним членом пермананса и в то же время первым членом альтернанса; если же* $i = b_{2k}$, *то* $f^{(i)}(x)$ *будет первым членом пермананса и последним членом альтернанса.*

1-я Лемма. *Все члены пермананса, за исключением последнего, возрастают по абсолютному значению, а все члены альтернанса, за исключением последнего, убывают в промежутке* (o, b).

Принимая во внимание, что замена переменной x на $b - x$ превращает перманáнс в альтернанс и обратно, достаточно заметить, что в случае пермананса, каждая из производных к нему принадлежащая, за исключением последней, имеет тот же знак, что и следующая за ней, а потому должна возрастать по абсолютному значению.

Предположим теперь, что $f^{(i)}(x) > 0$ есть внутренний или первый член пермананса порядка λ_{2k+1}, так что

$$i = b_{2k+1} - \varrho,$$

где $0 < \varrho \leqslant \lambda_{2k+1}$. В таком случае, по доказанной лемме, $f^{(b_{2k+1})}(x)$ убывает с возрастанием x. Поэтому,

$$f^{(i)}(x) \geqslant \frac{1}{(\varrho-1)!}\int_0^x (x-z)^{\varrho-1} f^{(b_{2k+1})}(z)\,dz \geqslant \frac{f^{(b_{2k+1})}(x)}{(\varrho-1)!}\int_0^x (x-z)^{\varrho-1}\,dz =$$

$$= \frac{x^\varrho}{\varrho!} f^{(b_{2k+1})}(x) \tag{3}$$

Очевидно, такое же рассуждение применимо к $f(x)$, если члены пермананса $f^{(i)}(x)$ отрицательны; следовательно, во всяком случае

$$\left| f^{(i)}(x) \right| \geqslant \frac{x^\varrho}{\varrho!} \left| f^{(b_{2k+1})}(x) \right| \tag{4}$$

для всех членов рассматриваемого пермананса, и в частности

$$\left| f^{(b_{2k})}(x) \right| \geqslant \frac{x^{\lambda_{2k+1}}}{\lambda_{2k+1}!} \left| f^{(b_{2k+1})}(x) \right| \tag{5}$$

Принимая во внимание, что замена x через $b-x$ превращает альтернанс в пермананс, заключаем, что, при $i=b_{2k}-\varrho$,

$$\left|f^{(i)}(x)\right| \geqslant \frac{(b-x)^{\varrho}}{\varrho\,!}\left|f^{(b_{2k})}(x)\right| \tag{4 bis}$$

для всех членов альтернанса порядка λ_{2k}, и в частности,

$$\left|f^{(b_{2k}-1)}(x)\right| \geqslant \frac{(b-x)^{\lambda_{2k}}}{\lambda_{2k}\,!}\left|f^{(b_{2k})}(x)\right| \tag{6}$$

Полагая

$$P_{2k-1}=P_{2k}=\lambda_1+\lambda_3+\ldots+\lambda_{2k-1}$$
$$Q_{2k+1}=Q_{2k}=\lambda_2+\lambda_4+\ldots+\lambda_{2k},$$

так что

$$b_n=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=P_n+Q_n,$$

получаем из неравенств (5) и (6), что

$$\left|f(x)\right| > \frac{x^{P_n}(b-x)^{Q_n}}{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\ldots\lambda_n\,!}\left|f^{(b_n)}(x)\right|, \tag{7}$$

отбрасывая знак равенства, т. к. в (3) знак равенства имеет место лишь тогда, когда правые части постоянны.

Неравенство (7) может быть написано и в таком виде

$$\left|f^{(b_n)}(x)\right| < \frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\ldots\lambda_n\,!}{x^{P_n}(b-x)^{Q_n}}\left|f(x)\right| \tag{8}$$

Полагая, в частности, $x=\frac{b}{2}$, находим

$$\left|f^{(b_n)}\left(\frac{b}{2}\right)\right| < \lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\ldots\lambda_n\,!\left(\frac{2}{b}\right)^{b_n} f\left(\frac{b}{2}\right). \tag{9}$$

Неравенство (9) дает верхнюю границу для модулей тех лишь производных, которые являются *пограничными* членами, связывающими соседние между собой альтернанс и пермананс. Единственный случай, когда производные всех порядков обладают этим свойством, представляется, когда все $\lambda_i=1$. Этим функциям, которые я называю *циклически монотонными*, замечательным во многих отношениях и представляющим в некотором смысле противоположность классу абсолютно монотонных функций, я посвящу особую статью. Пока обратим внимание лишь на то, что в рассматриваемом случае верхняя граница для производной порядка b_n, даваемая правой частью неравенства (9), получает наименьшее значение, а именно, для любого значения m,

$$\left|f^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)\right| < \left(\frac{2}{b}\right)^{m} f\left(\frac{b}{2}\right) \tag{10}$$

Отсюда следует, что *циклически монотонная функция* $f(x)$ *должна быть целой, не выше 1-го рода и конечной степени* не выше* $\frac{2e}{b}$.

---

* См. Р. Е., стр. 80.

В общем же случае, когда имеются $\lambda_n > 1$, необходимо еще вывести неравенство аналогичное (8) для производных, являющихся *внутренними* членами пермананса или альтернанса.

Итак, пусть $m = b_n + k$, где $0 < k < \lambda_{n+1}$. В силу сделанных выше замечаний, можем ограничиться предположением, что $f^{(m)}x > 0$ принадлежит пермanансу. В таком случае для всякого $y > x$, имеем

$$f^{(b_n)}(y) \geqslant \frac{1}{(k-1!)}\int_x^y (y-z)^{k-1} f^{(m)}(z)\,dz > \frac{f^{(m)}(x)}{k-1\,!}\int_x^y (y-z)^{k-1} dz = \frac{f^{(m)}(x)(y-x)^k}{k\,!},$$

откуда

$$f^{(m)}(x) = f^{(b_n+k)}(x) < \frac{k\,!\,f^{(b_n)}(y)}{(y-x)^k}, \tag{11}$$

и принимая во внимание неравенство (8), получаем

$$f^{(b_n+k)}(x) < \frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,\,.\,\lambda_n\,!\,k\,!}{y^{P_n}(b-y)^{Q_n}(y-x)^k}\left|f(y)\right|.$$

Таким образом, вообще,

$$\left|f^{(b_n+k)}(x)\right| < \lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,.\,.\,\lambda_n\,!\,k\,!\left|\frac{f(y)}{y^{P_n}(b-y)^{Q_n}(y-x)^k}\right| \tag{12}$$

где y можно придавать любое значение $> x$ или $< x$ в промежутке $(0, b)$ в зависимости от того, принадлежит ли $f^{(b_n+k)}(x)$ пермanансу или альтернансу.

Из неравенства (12) заключаем, что

$$\sqrt[m]{\left|\frac{f^m(x)}{m\,!}\right|} < \sqrt[m]{\frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,\,.\,\lambda_n\,!\,k\,!}{m\,!}}\left|\frac{1}{y^\alpha(b-y)^\beta(y-x)^\gamma}\right| \tag{13}$$

для больших значений m, где $\alpha = \frac{P_n}{m}$, $\beta = \frac{Q_n}{m}$, $\gamma = \frac{k}{m}$, так что $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Из (13), благодаря замечанию, что, при $x = \frac{b}{2}$, можем положить $y = x \pm \frac{b}{4}$, получаем для *любого* m,

$$\sqrt[m]{\left|\frac{f^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)}{m\,!}\right|} < \sqrt[m]{\frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,.\,.\,\lambda_n\,!\,k\,!}{m\,!}}\,\frac{4}{b},$$

откуда вытекает

1-я Теорема. *Если типовые числа удовлетворяют условию, что*

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[b_n]{\frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,.\,.\,\lambda_n\,!}{b_n\,!}} = 0, \tag{14}$$

то функция $f(x)$ есть функция целая.

Можно показать напротив, что, если это условие для некоторого типа регулярно монотонных функций не соблюдено, то к нему принадлежат также и не целые функции.

Следствие. *Если*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{b_n} = 0\,, \tag{15}$$

то функция $f(x)$ *целая.*

Действительно, из (13) выводим, что существует число N такое, что

$$\overline{\lim} \sqrt[m]{\left| \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \right|} \leqslant \sqrt[m]{\frac{\lambda_1^{\lambda_1} \lambda_2^{\lambda_2} \ldots \lambda_n^{\lambda_n} k^k}{m^m}}\, N\,. \tag{16}$$

В силу (15), можем взять m достаточно большим, чтобы, при заданном произвольно малом ε, иметь

$$\frac{\lambda_i}{m} = \theta_i < \varepsilon, \ \frac{k}{m} = \varphi < \varepsilon\,;$$

поэтому

$$\overline{\lim} \sqrt[m]{\left| \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \right|} \leqslant N\, \theta_1^{\theta_1} \theta_2^{\theta_2} \ldots \theta_n^{\theta_n} \varphi^{\varphi} < N \varepsilon^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n+\varphi} = N\varepsilon\,.$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что функция $f(x)$ должна быть *конечного рода*, если при возрастании n,

$$\lim \frac{\lambda_n^p}{b_n} = 0\,,$$

где $p > 1$ данное независимое от n число.

Если $p > 2$, то функция $f(x)$ должна быть *первого* рода.

В частности, из (16) видно сразу, что $f(x)$ будет кроме того и *конечной степени*, если *числа* λ_n *ограничены.*

Таким образом, по доказанной теореме, регулярно монотонная функция лишь в том случае может оказаться не целой, т. е. иметь особенности на конечном расстоянии, если *тип* ее таков, что

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{b_n} = T > 0.$$

§ 2.

Займемся теперь исследованием случая, когда рассматриваемая нами функция $f(x)$ не целая. Как известно, в таком случае радиус сходимости $R(x)$ в какой-нибудь точке x отрезка $(0, b)$ определяется равенством

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right|} = \frac{1}{R(x)} \tag{17}$$

Будем называть *характеристической* последовательностью производных функции $f(x)$ в точке x всякую последовательность производных порядков $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, обладающую свойством, что

$$lim \sqrt[k_n]{\left|\frac{f^{(k_n)}(x)}{k_n!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

Докажем следующее предложение:

2-я Лемма. *На отрезке монотонности (o, b) не может быть более одной точки, для которой к характеристической последовательности принадлежало бы, как безконечное множество производных, входящих в альтернансы, так и безконечное множество производных, входящих в перманансы.*

Точку, обладающую указанным свойством, мы назовем *нейтральной*.

Пусть x точка, обладающая свойством, что к ее характеристической последовательности принадлежит безконечное множество производных, являющихся либо первыми, либо внутренними членами пермананса: $f^{(k_1^0)}(x), f^{(k_2^0)}(x), \ldots f^{(k_n^0)}(x), \ldots$; пусть $y > x$; тогда, вследствие 1-й Леммы имеем

$$\left|\frac{f^{(k_n^0)}(y)}{k_n^0!}\right| > \left|\frac{f^{(k_n^0)}(x)}{k_n^0!}\right|,$$

поэтому

$$\overline{lim} \sqrt[m]{\left|\frac{f^{(m)}(y)}{m!}\right|} \geqslant \frac{1}{R(x)},$$

откуда

$$\frac{1}{R(y)} \geqslant \frac{1}{R(x)},$$

т. е.

$$R(x) \geqslant R(y) \tag{18}$$

Аналогичным образом убеждаемся, что, если в точке y к характеристической последовательности принадлежит безконечное множество внутренних или первых членов альтернансов, то должно иметь место неравенство

$$R(x) \leqslant R(y) \tag{18 bis}$$

Таким образом, необходимо, чтобы

$$R(x) = R(y) = R.$$

Кроме того, так как (18) остается в силе, если вместо $R(y)$ взять $R(\xi)$, где $\xi > x$, а (18 bis) остается в силе, если заменить x, через $\xi < y$, то мы должны иметь также

$$R(\xi) = R, \tag{19}$$

при всяком ξ в промежутке (x, y).

Покажем, что соблюдение равенства (19) в целом промежутке (x, y), длина которого $2h > 0$, невозможно.

Действительно, известно *, что наилучшее приближение $E_n f(x)$ при помощи многочленов степени n на отрезке длины $2h$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n f(x) < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1},$$

если на этом отрезке

$$0 < N < f^{(n+1)}(\xi) < M,$$

поэтому

$$\frac{h}{2}\sqrt[n+1]{\frac{2N}{(n+1)!}} < \sqrt[n+1]{E_n f(x)} < \frac{h}{2}\sqrt[n+1]{\frac{2M}{(n+1)!}} \tag{20}$$

Из правого неравенства (20), принимая во внимание (17) и (19), находим

$$\overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)} \leqslant \frac{h}{2R}.$$

Но, кроме того, если $f^{(n+1)}(x)$ есть производная характеристической последовательности в точке x, являющаяся внутренним или первым членом пермананса, то

$$lim\sqrt[n+1]{\frac{N}{(n+1)!}} = \frac{1}{R},$$

т. к. для этих значений n имеем $N = f^{(n+1)}(x)$.

Следовательно, также

$$\frac{h}{2R} \leqslant \overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)},$$

а потому

$$\overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)} = \frac{h}{2R}. \tag{21}$$

Но, с другой стороны, известно **, что

$$\overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)} = \frac{h}{\varrho}, \tag{22}$$

где ϱ есть полусумма осей эллипса, имеющего фокусами концы отрезка (x, y), внутри которого функция $f(x)$ голоморфна и на котором она имеет по крайней мере одну особенную точку. Поэтому нетрудно видеть, что в данном случае мы должны были бы иметь $\varrho = R + \sqrt{R^2 + h^2}$. Действительно, функция $f(x)$, у которой радиус

* Р. Е. стр. 10.

** Р. Е. стр 113.

сходимости на всем отрезке равен R, имеет особыми значениями все точки $z = \xi \pm iR$, где $x \leqslant \xi \leqslant y$; кроме того, если замкнуть составленные таким образом два особенных отрезка полукругами радиуса R с соответственными центрами в точках x и y, то внутри полученного замкнутого контура функция $f(x)$ не имеет особенности; отсюда ясно, что рассматриваемый нами эллипс проходит через точки $\frac{x+y}{2} \pm Ri$, так что малая полуось равна R, а большая полуось равна $\sqrt{R^2 + h^2}$.

Таким образом формула (22) противоречит формуле (21), которая требует, чтобы $\varrho = 2R$.

Следовательно, если в точке x к характеристической последователь ности принадлежат производные, являющиеся внутренними членами пермanансов, то в точке $y > x$ к характеристической последовательности не принадлежат ни внутренние, ни первые члены альтернансов. Остается показать, что и последние члены альтернанса также не могут входить в характеристическую последовательность производных в точке y.

Действительно, из

$$\left| f^{(b_{2k}-1)}(y) \right| \geqslant (b-y) \left| f^{(b_{2k})}(y) \right|$$

получаем

$$\sqrt[b_{2k}]{\frac{|f^{(b_{2k})}(y)|}{b_{2k}!}} \leqslant \sqrt[b_{2k}]{\frac{1}{(b-y)b_{2k}}} \sqrt[b_{2k}]{\frac{|f^{(b_{2k}-1)}(y)|}{(b_{2k}-1)!}};$$

следовательно,

$$\lim \sqrt[b_{2k}]{\frac{|f^{(b_{2k})}(y)|}{b_{2k}!}} \leqslant \lim \sqrt[b_{2k}-1]{\frac{|f^{(b_{2k}-1)}(y)|}{(b_{2k}-1)!}},$$

а потому, раз $f^{(b_{2k}-1)}(y)$ не принадлежит к характеристической последовательности, то $f^{(b_{2k})}(y)$ также не входит в нее.

3-я Лемма. *Если в характеристическую последовательность точки x входит лишь безконечное множество членов пермanансов $f^{(n)}(x)$, которые можем считать положительными*, где $n = b_{2k} + h$ $(0 < h < \lambda_{2k+1})$, то

$$\frac{n}{h} \leqslant \frac{R(x)}{(b-x)}(1 + \alpha_n), \tag{23}$$

при чем α_n стремится к нулю с возрастанием n.

Действительно, допущение, что $f^{(n)}(x)$ входит в характеристическую последовательность, означает, что

$$\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}} = \frac{1}{R(1+\varepsilon_n)}, \tag{24}$$

где $R = R(x)$ радиус сходимости в точке x, а ε_n стремятся к 0 с возрастанием n.

Пусть $y=x+\delta<b$ и $f^{(n-h)}(y)$ член того же пермананса, что и $f^{(n)}(y)$.

В таком случае,

$$f^{n-h}(x+\delta)>\frac{\delta^h}{h!}f^{(n)}(x) \tag{25}$$

В частности, пусть $n-h=b_{2k}$. Тогда, по только что доказанному, $f^{n-h}(y)$ не войдет, при b_{2k} достаточном большом, в характеристическую последовательность, а потому можем положить

$$f^{(b_{2k})}(y)<\frac{b_{2k}!}{(P-\delta)^{b_{2k}}}, \tag{26}$$

при чем

$$P-\delta\geqslant R(y)+\varrho R,$$

где $\varrho>0$ определенное достаточно малое число. С другой стороны,

$$R(y)\geqslant R-\delta\,, \tag{27}$$

поэтому

$$P\geqslant R(1+\varrho). \tag{28}$$

Из (26) и (25) получаем, благодаря (24),

$$\frac{(n-h)!}{(P-\delta)^{n-h}}>\frac{n!\ \delta^h}{h!}\frac{1}{[R(1+\varepsilon_n)]^n},$$

т. е.

$$\frac{(n-h)!\ h!}{n!\left(\dfrac{\delta}{P}\right)^h\left(1-\dfrac{\delta}{P}\right)^{n-h}}>\left[\frac{P}{R(1+\varepsilon_n)}\right]^n.$$

Отсюда, беря δ достаточно малым, видим (благодаря (28)), что h не может оставаться конечным, при возрастании $b_{2k}=n-h$. Поэтому, применяя формулу Стирлинга, получаем при n достаточно большом

$$\frac{\left(\dfrac{h}{n}\right)^{\frac{h}{n}}\left(1-\dfrac{h}{n}\right)^{1-\frac{h}{n}}}{\left(\dfrac{\delta}{P}\right)^{\frac{h}{n}}\left(1-\dfrac{\delta}{P}\right)^{1-\frac{h}{n}}}>\frac{P}{R(1+\varepsilon)}, \tag{29}$$

как бы мало ни было заданное число $\varepsilon>0$. Неравенство (29) должно иметь место при всяком $\delta<b-x$; поэтому, необходимо иметь

$$\frac{b-x}{P}<\frac{h}{n}, \tag{30}$$

чтобы не прийти в противоречие с неравенством (28), т. к., при $\dfrac{\delta}{P}=\dfrac{h}{n}$ неравенство (29) обращается в $R(1+\varepsilon)>P$.

Замечая, что неравенство (30) должно быть соблюдено при всяком определенном значении P, удовлетворяющем (28), где $\rho > \varepsilon$, мы приходим к неравенству (23).

1-е Следствие. *Радиус сходимости R в точке x, в которой характеристическая последовательность не содержит членов альтернансов, не может быть менее $b - x$; радиус сходимости R в точке, в которой характеристическая последовательность не содержит членов перманансов, не менее x.*

Действительно, левая часть неравенства (23) не может быть менее 1.

2-е Следствие. *Всякая регулярно монотонная на отрезке $(0, b)$ функция $f(x)$ голоморфна внутри круга построенного на $(0, b)$ как на диаметре. Если $x = \frac{b}{2}$ не является нейтральной точкой, то $f(x)$ голоморфна по крайней мере в одном конце отрезка монотонности, а именно в том конце, к которому нейтральная точка a ближе; радиус сходимости в точке a не менее ее расстояния до наиболее удаленного от нее конца.*

3-е Следствие. *Точка b не может быть особенной, если*

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_{2k+1}}{b_{2k+1}} = \theta < 1; \tag{31}$$

точка 0 не может быть особенной, если

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_{2k}}{b_{2k}} = \theta' < 1. \tag{31 bis}$$

Радиус сходимости в нейтральной точке a не меньше наибольшего из чисел $\frac{b-a}{\theta}$ и $\frac{a}{\theta'}$.

4-е Следствие. *Если $\theta = 0$ и $\theta' > 0$, то функция $f(x)$ не имеет нейтральной точки внутри отрезка.*

2-я теорема. *Если характеристическая последовательность в точке x содержит члены перманансов, то круг сходимости этой точки проходит через действительную особенную точку $z \geqslant b$ функции $f(x)$; если характеристическая последовательность содержит члены альтернансов, то круг сходимости проходит через действительную особенную точку $z' \leqslant 0$.*

В самом деле, пусть $R(y)$ радиус сходимости в точке $y = x + \delta$. По прежнему, не нарушая общности, можем ограничиться случаем, когда в точке x характеристическая последовательность состоит из членов перманансов. В таком случае для доказательства теоремы, достаточно показать, что

$$R(y) = R - \delta. \tag{32}$$

Полагая $n - \mu$ достаточно большим, имеем, при $\varepsilon > 0$ произвольно малом,

$$f^{(n-\mu)}(x + \delta) < \frac{(n-\mu)!}{(P-\delta)^{n-\mu}},$$

где $P - \delta = (1 - \varepsilon) R(y)$.

Поэтому, если $f^{(n-\mu)}(x)$ входит в тот же пермананс, что и $f^{(n)}$, то находим, подобно предыдущему,

$$\frac{\left(\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{1-\frac{\mu}{n}}}{\left(\frac{\delta}{P}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left(1-\frac{\delta}{P}\right)^{1-\frac{\mu}{n}}} > \frac{P}{R(1+\varepsilon)} \tag{29 bis}$$

Но благодаря (23), можем удовлетворить равенству

$$\frac{\mu}{n}=\frac{\delta}{P},$$

взявши, например, $\delta=\frac{b-x}{2}$. В таком случае, из (29^{bis}) заключаем, что

$$P<R(1+\varepsilon)\,,$$

откуда

$$R(y)<\frac{R(1+\varepsilon)-\delta}{1-\varepsilon}\,,$$

но, т. к. ε может быть взято произвольно малым, то

$$R(y)\leqslant R-\delta\,,$$

и, вследствие (27), получаем (32). Ч. и т. д.

1-е следствие. *Регулярно монотонная на отрезке (o, b) функция есть целая функция, если у нее нет действительных особенностей.*

2-е следствие. ***Если ряд Тейлора $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$, имеющий радиус сходимости R, не имеет особенностей ни в одной из точек $\pm R$, то совокупность нулей его последовательных производных везде густа на отрезке $(-R, +R)$.***

О минимальном среднем квадратичном отклонении от нуля полинома в данном интервале.

Я. Л. Геронимус

§ 1.

Задача, которую я рассматриваю, формулируется следующим образом: *найти полином, степени не выше n, для которого среднее квадратичное отклонение от нуля в данном интервале было бы минимальным если для $x=\xi$ известно или 1) значение одной производной нашего полинома напр. i-ой; или 2) значение самого полинома и его m первых производных.*

Путем замены переменных можно свести задачу к интервалу — -1, $+1$.

Итак, если обозначим наш полином через $y(x)$, то

$$L=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2\,dx$$

должно быть минимальным, при выполнении условий или 1) $y^{(i)}(\xi)=S_i$ или 2) $y^{(j)}(\xi)=S_j$ $(j=0,\ 1,\ 2\ldots\ m)$.

Разложим наш полином по полиномам Legendre'а

$$y=\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Тогда

$$L=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k{}^2}{2k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ибо, по известному свойству полиномов Legendre'а

$$\int_{-1}^{1} P_r(x)P_s(x)\,dx \begin{cases} = \quad 0 \quad \text{при } r\neq s \\ = \dfrac{2}{2s+1} \text{ при } r=s. \end{cases}$$

Таким образом задача сводится к нахождению минимума выражения (1), при выполнении условий

$$\sum_{k=j}^{n} a_k P_k^{(j)}(\xi)=S_j\,,$$

где j в первой задаче равно i, а во второй задаче изменяется от 0 до m. (Под $P_k^{(o)}(\xi)$ подразумевается значение самого полинома).

Тогда условия extremum'а для первой задачи напишутся:

$$\frac{2a_k}{2k+1} + \lambda P_k^{(i)}(\xi) = 0 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots m). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Отсюда умножая на a_k и суммируя по всем k, получим:

$$2L + \lambda S_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Если же мы избавимся от знаменателя, помножим на $P_k^{(i)}(\xi)$ и просуммируем по всем k, то

$$2S_i + \lambda \sum_{k=i}^{n} (2k+1)\left[P_k^{(i)}(\xi)\right]^2 = 0,$$

или, обозначая

$$a_{ii}(\xi) = \sum_{k=i}^{n} (2k+1)\left[P_k^{(i)}(\xi)\right]^2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

получим

$$2S_i + \lambda a_{ii} = 0. \text{ Отсюда } L = \frac{S_i^2}{a_{ii}(\xi)} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Во второй задаче условия extremum'а запишутся;

$$\frac{2a_k}{2k+1} + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j P_k^{(j)}(\xi) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Умножая на a_k и суммируя, получим

$$2L + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j S_j = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Если же избавимся от знаменателя, помножим на $P_k^{(l)}(\xi)$ и просуммируем по k, то получим

$$2S_l + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j a_{jl}(\xi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$(l = 0, 1, 2 \ldots m) \quad \text{где} \quad a_{jl}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k^{(j)}(\xi) P_k^{(l)}(\xi) \quad \ldots \quad (9)$$

Уравнения (7) и (8) представляют систему $m+2$ уравнений с $m+1$ неизвестными λ_j. Условие совместности этих уравнений запишется так:

$$\begin{vmatrix} L & S_0 & S_1 & \ldots\ldots & S_m \\ S_0 & a_{00} & a_{10} & \ldots\ldots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & \ldots\ldots & a_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & \ldots\ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (10)$$

§ 2

Из написанных уравнений можно вычислить a_k — коэффициенты разложения нашего полинома по полиномам Legendre'a. Из уравнений (8) мы можем вычислить все λ_j. Обозначая через a определитель, составленный из a_{jl} получим:

$$\lambda_j = -\frac{2}{a} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{j-1,\,0} & S_0 & a_{j+1,\,0} & \dots & a_{m0} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{j-1,\,1} & S_1 & a_{j+1,\,1} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0m} & a_{1m} & \dots & a_{j-1,\,m} & S_m & a_{j+1,\,m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

На месте j-ой вертикали стоят S.

Переставим эту вертикаль на место нулевой — легко видеть, что для этого понадобится j перестановок и λ_j будут:

$$\lambda_j = (-1)^{j+1}\,\frac{2}{a} \begin{vmatrix} S_0 & a_{00} & a_{10} & \dots & a_{j-1,0} & a_{j+1,0} & \dots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & \dots & a_{j-1,1} & a_{j+1,1} & \dots & a_{m1} \\ S_2 & a_{02} & a_{12} & \dots & a_{j-1.2} & a_{j+1,2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & \dots & a_{j-1,m} & a_{j+1,m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots m)$$

но из уравнения (6)

$$a_k = -\frac{2k+1}{2} \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \, P_k^{(j)}(\xi)$$

откуда

$$a_k = -\frac{2k+1}{a} \begin{vmatrix} O & P_k^{(0)}(\xi) & P_k^{(1)}(\xi) & P_k''(\xi) & \dots & P_k^{(m)}(\xi) \\ S_0 & a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

§ 3.

Приступаем к решению уравнения (10).

Раскрывая по элементам нулевой горизонтали, имеем

$$La = \sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} a_{jl} \, S_j \, S_l \, ,$$

где a_{jl} некоторые коэффициенты, которые мы сейчас определим.

При разложении по элементам нулевой горизонтали S_j будет умножаться на

$$(-1)^{j+1}\cdot\begin{vmatrix} S_0 & a_{00} & a_{10} & \ldots & a_{j-1,0} & a_{j+1,0} & \ldots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{j-1.1} & a_{j+1,1} & \ldots & a_{m1} \\ S_2 & a_{02} & a_{12} & \ldots & a_{j-1,2} & a_{j+1,2} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & \ldots & a_{j-1,m} & a_{j+1,m} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

При разложении по элементам нулевой вертикали S_j будет умножаться на S_l и на $(-1)^{0+j+1+l+0}A_{jl}$, где A_{jl} минор определителя a, соответствующий элементу a_{jl}. Окончательно

$$L=\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{j+l}S_j\,S_l\frac{A_{jl}}{a}\;\ldots\ldots\ldots\;(11)$$

§ 4.

Таким образом, в обоих случаях мы встречаемся с суммами

$$a_{jl}(\xi)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,P_k^{(j)}(\xi)\,P_k^{(l)}(\xi).$$

Перейдем к их вычислению. Пусть для определенности $j>l$. Тогда суммирование по k начинается с $k=j$. Введем обозначение: $f(k)=$

$$=\frac{(k+j+1)(k+l+1)\,P_k^{(j)}\,P_k^{(l)}+(1-\xi^2)\,P_k^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)}}{j+l+1}$$

Из рекуррентной формулы

$$P'_{k+1}-\xi\,P'_k=(k+1)\;P_k$$

получим, дифференцируя j раз:

$$P_{k+1}^{(j+1)}-\xi\,P_k^{(j+1)}=(k+j+1)\,P_k^{(j)}.$$

Проделав то же самое для l и подставив в $f(k)$, получим

$$f(k)=\frac{P_{k+1}^{(j+1)}\,P_{k+1}^{(l+1)}-\xi\,P_k^{(j+1)}P_{k+1}^{(l+1)}-\xi\,P_{k+1}^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)}+P_k^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)}}{j+l+1}$$

Найдем теперь

$$f(k-1)=\frac{P_k^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)}-\xi\,P_{k-1}^{(l+1)}\,P_k^{(j+1)}-\xi\,P_{k-1}^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)}+P_{k-1}^{(j+1)}\,P_{k-1}^{(l+1)}}{j+l+1}.$$

Отсюда $\Delta f = f(k) - f(k-1) =$

$$= \frac{P_{k+1}^{(j+1)} P_{k+1}^{(l+1)} - P_{k-1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)} - \xi P_k^{(j+1)} [P_{k+1}^{(l+1)} - P_{k-1}^{(l+1)}] - \xi P_k^{(l+1)} [P_{k+1}^{(j+1)} - P_{k-1}^{(j+1)}]}{j+l+1} =$$

$$= \frac{-(2k+1)\,\xi\,[P_k^{(j+1)} P_k^{(l)} + P_k^{(j)} P_k^{(l+1)}] + P_{k+1}^{(j+1)} P_{k+1}^{(l+1)} - P_{k+1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)}}{j+l+1} +$$

$$+ \frac{P_{k+1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)} - P_{k-1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)}}{j+l+1} =$$

$$= \frac{(2k+1)\,[-\xi P_k^{(j+1)} P_k^{(l)} - \xi P_k^{(l+1)} P_k^{(j)} + P_{k+1}^{(j+1)} P_k^{(l)} + P_{k-1}^{(l+1)} P_k^{(j)}]}{j+l+1} =$$

$$= \frac{(2k+1)\left\{P_k^{(l)} [P_{k+1}^{(j+1)} - \xi P_k^{(j+1)}] + P_k^{(j)} [P_{k-1}^{(l+1)} - \xi P_k^{(l+1)}]\right\}}{j+l+1},$$

или, при помощи рекуррентных формул

$$\Delta f = \frac{(2k+1)\,[(k+j+1)\,P_k^{(l)} P_k^{(j)} - (k-l)\,P_k^{(l)} P_k^{(j)}]}{j+l+1} = (2k+1)\,P_k^{(l)} P_k^{(j)}.$$

Таким образом

$$a_{jl} = \sum_{k=j}^{n} [f(k) - f(k-1)] = f(n) - f(j-1)\,.$$

Но $f(j-1) = 0$ и окончательно

$$a_{jl}(\xi) = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\,P_n^{(j)}(\xi)\,P_n^{(l)}(\xi) + (1-\xi^2)\,P_n^{(j+1)}(\xi)\,P_n^{(l+1)}(\xi)}{j+l+1}\,. \quad (12)$$

§ 5.

Займемся теперь подробнее первой задачей, когда дана одна производная.

По формуле (5) $L = \frac{S_i^2}{a_{ii}(\xi)}$, а коэффициенты a_k по (2):

$$a_k = \frac{-\lambda(2k+1)}{2} P_k^{(i)}(\xi) = \frac{L(2k+1)}{S_i} P_k^{(i)}(\xi) \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

Из последней формулы видно, что при $i = n$ искомый полином будет отличаться лишь постоянным множителем от n-го полинома Legendre'a. Если $P_n^{(i)}(\xi) = 0$, то полином наш будет степени $n-1$, ибо старший коэффициент обращается в нуль. В частности при $\xi = 0$, если $n - i$ нечетное число, то полином будет степени $n-1$; кроме того полином будет разложен только по четным, или только по нечетным полиномам Legendre'a, в зависимости от того, будет ли i четным или нечетным числом.

Прежде чем приступить к исследованию получившейся формулы (5) для отклонения L, сделаем несколько замечаний относительно нашего получившегося полинома

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Прежде всего ясно, что площадь, ограниченная кривой $y = y(x)$, равна нулю, ибо площадь

$$S = \int_{-1}^{1} y dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} P_k(x) dx = 2a_0 = 0, \text{ ибо при } i \geqslant 1 \ a_0 = 0.$$

Выясним теперь число корней нашего полинома в интервале — $-1, +1$.

Воспроизводя классическое доказательство Чебышева, можно показать, что *при* $|\xi| > 1$ *по крайней мере* $n - i$ *корней нашего полинома лежат в данном интервале.* Обозначая через α_p корни, для которых $|\alpha_p| \leqslant 1$, а через β_p соответствующие кратности, докажем, что $\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_r \geqslant n - i$. Допустим противное. Пусть $\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_r < n - i$. Рассмотрим отношение

$$\frac{y(x)}{(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}}.$$

Для всех значений $-1 \leqslant x \leqslant 1$ это отношение сохраняет знак. Если $|\xi| > 1$, то наше отношение будет заключаться между двумя конечными, отличными от нуля величинами. Обозначая меньшую по абсолютной величине из них через l, видим, что

$$\left|\frac{y(x)}{(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}} - l\right| < \left|\frac{y(x)}{(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}}\right|$$

т. е. полином $y - l(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}$ дает среднее квадратическое отклонение от нуля меньшее, чем L. Этот полином, по допущенному, степени не выше $n - i - 1 + i + 1 = n$, и i-ая производная его в точке ξ равна тому же, чему для нашего полинома. Таким образом, при $\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_r \leqslant n - i - 1$, отклонение можно было бы еще уменьшить. Если i число нечетное, то ξ может быть каким угодно, ибо $(x-\xi)^{i+1}$ не меняет знака.

Если же i число четное, то, не налагая никаких ограничений на ξ, можно доказать, что по крайней мере $n - i - 1$ корней нашего полинома лежат в интервале $-1, +1$. Наконец воспользуемся одной теоремой Laguerre'а для выяснения положения корней нашего полинома. В заметке*): „Sur une propriété des polynomes de Legendre“ Laguerre доказывает следующую теорему: если полином разложен по полиномам Legendre'а $y = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$, то число корней уравнения $y(x) = 0$,

*) Laguerre Oeuvres v. I p. 144—146.

больших или равных единице, не больше числа перемен знака в ряде $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$. Если $\xi \geqslant 1$, то $P_k^{(i)}(\xi) > 0$ и все a_k одного знака. Таким образом, ***если $\xi \geqslant 1$, то наш полином не может иметь корней равных единице или больших единицы.***

§ 6.

Приступим теперь к исследованию получившейся величины отклонения:

$$L = \frac{S_i^2}{a_{ii}(\xi)} = \frac{S_i^2}{\sum\limits_{k=i}^{n}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2} = \frac{S_i^2(2i+1)}{(n+i+1)^2[P_n^{(i)}]+(1-\xi^2)[P_n^{(i+1)}]^2} \quad (5')$$

В знаменателе стоит полином относительно ξ степени $2n-2i$, содержащий, как не трудно видеть, лишь четные степени ξ.

Чтобы выяснить, где будут extrema L, возьмем производную знаменателя:

$$a'_{ii}(\xi) = 2\sum_{k=i+1}^{n}(2k+1)\,P_k^{(i)}(\xi)\,P_k^{(i+1)}(\xi)\,.$$

Воспользуемся формулой

$$(2k+1)\,P_k = P'_{k+1} - P'_{k-1}\,.$$

Тогда

$$a'_{ii}(\xi) = 2\sum_{k=i+1}^{n} P_k^{(i+1)}\,[P_{k+1}^{(i+1)} - P_{k-1}^{(i+1)}] = 2P_n^{(i+1)}\,P_{n+1}^{(i+1)}\,.$$

Таким образом extrema L будут в точках, где $P_n^{(i+1)} = 0$ или $P_{n+1}^{(i+1)} = 0$. Каждый из этих полиномов имеет все вещественные корни, и все они лежат внутри интервала $-1, +1$. Кроме того, так как корни $(n+1)$-ого и n-ого полиномов Legendre'а перемежаются, то на основании теоремы В. Маркова, перемежаются и корни их производных.

Выясним, где именно будут maxima и где minima. Возьмем вторую производную:

$$a''_{ii}(\xi) = 2P_n^{(i+2)}\,P_{n+1}^{(i+1)} + 2P_{n+1}^{(i+2)}\,P_n^{(i+1)}\,.$$

Рассмотрим сначала те точки ξ_k, где $P_n^{(i+1)}(\xi_k) = 0$.

В этих точках

$$a''_{ii}(\bar\xi_k) = 2P_{n+1}^{(i+1)}(\bar\xi_k)\,P_n^{(i+2)}(\bar\xi_k)\,.$$

Применим формулу

$$P'_{n+1} - \xi P'_n = (n+1)P_n.$$

Дифференцируя i раз получим:

$$P_{n+1}^{(i+1)} - \xi\,P_n^{(i+1)} = (n+i+1)\,P_n^{(i)}.$$

Таким образом

$$a''_{ii}(\bar\xi_k) = 2(n+i+1)\,P_n^{(i)}(\bar\xi_k)\,P_n^{(i+2)}(\bar\xi_k).$$

Для выяснения знака продифференцируем i раз дифференциальное уравнение n-го полинома Legendre'а

$$(\xi^2-1)P_n''+2\xi P_n'=n(n+1)P_n.$$

В точках $\bar{\xi}_k$

$$P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)=-\frac{(n-i)(n+i+1)P_n^{(i)}(\bar{\xi}_k)}{1-\bar{\xi}_k^2},$$

т. е.

$$P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)P_n^{(i)}(\bar{\xi}_k)<0,$$

ибо $|\bar{\xi}_k|<1$. (Если $i=n$, то вторая производная равна нулю, но при $i=n$ знаменатель будет постоянной величиной).

Итак, в тех точках, где $P_n^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)=0$, $a_{ii}''(\bar{\xi}_k)<0$, т. е. L достигает минимума.

Точно также докажем, что *в точках, в которых обращается в нуль $P_{n+1}^{(i+1)}$, отклонение достигает максимума.*

Таким образом, внутри интервала -1, $+1$ отклонение имеет $n-i$ maxima и $(n-i-1)$ minima. Исследуем, что будет при нуле. В нуль обращается та производная, которая нечетной степени, т. е. при нуле будет максимум, если $n-i$ нечетное число и минимум, если $n-i$ четное. Последний extremum — для наибольшего значения ξ — всегда максимум.

Таким образом, при $P_n^{(i+1)}=0$

$$L_{\min}=\frac{S_i^2(2i+1)}{(n+i+1)^2[P_n^{(i)}]^2}=\frac{S_i^2(2i+1)}{[P_{n+1}^{(i+1)}]^2}, \qquad (14)$$

а при $P_{n+1}^{(i+1)}=0$

$$L_{\max}=\frac{S_i^2(2i+1)}{[P_n^{(i+1)}]^2}=\frac{S_i^2(2i+1)}{(n-i+1)^2[P_{n+1}^{(i)}]^2}. \qquad (15)$$

§ 7.

Докажем теперь, что $L(1)<L(\xi)$, если $|\xi|<1$.

Если взять полином Legendre'а в форме:

$$P_n(\cos\varphi)=2\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.n!}\Big[\cos n\varphi+\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\varphi+$$
$$+\frac{1.3}{1.2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\varphi+\ldots\Big]$$

то ясно, что $P_n(1)>|P_n(\cos\varphi)|$, ибо каждый член достигает своего наибольшего значения при значении косинуса равном единице, т. е. при $\varphi=0$.

Докажем также, что $P_k^{(i)}(1)>|P_k^{(i)}(\xi)|$, если $|\xi|<1$.

Применим метод математической индукции: докажем, что, если для полинома Legendre'а степени n любая производная при единице больше, чем в любой точке внутри интервала, то тем же свойством будет обладать полином Legendre'а степени $n+1$.

Из формулы $P'_{n+1} = \xi P'_n + (n+1) P_n$ получим, дифференцируя i раз:

$$P_{n+1}^{(i+1)}(\xi) = \xi P_n^{(i+1)}(\xi) + (n+i+1) P_n^{(i)}(\xi).$$

Возводя в квадрат и вычитая получившееся равенство из аналогичного равенства для $\xi = 1$, получим

$$[P_{n+1}^{(i+1)}(1)]^2 - [P_{n+1}^{(i+1)}(\xi)]^2 = \left\{[P_n^{(i+1)}(1)]^2 - \xi^2 [P_n^{(i+1)}(\xi)]^2\right\} +$$

$$+ (n+i+1)^2 \left\{[P_n^{(i)}(1)]^2 - [P_n^{(i)}(\xi)]^2\right\} + 2(n+i+1)[P_n^{(i+1)}(1) P_n^{(i)}(1) -$$

$$- \xi P_n^{(i+1)}(\xi) P_n^{(i)}(\xi)] \geqslant 0.$$

Знак равенства будет только при $i = n$.

Из доказанного вытекает, что

$$a_{ii}(1) = \sum_{k=i}^{n} (2k+1) [P_k^{(i)}(1)]^2 > a_{ii}(\xi), \text{ а } L(1) < L(\xi).$$

Таким образом ***при единице отклонение меньше, чем в любой точке внутри интервала***. При возрастании ξ, если $\xi > 1$, отклонение все время убывает.

§ 8.

Докажем теперь, что ***в интервале*** 0, 1 ***каждый максимум*** L ***больше последующего***.

Maxima будут там, где $P_{n+1}^{(i+1)}(\xi) = 0$.

Пусть

$$\frac{P_n^{(i)}(\xi)}{P_{n+1}^{(i+1)}(\xi)} = C + \sum_{k=1}^{n-i} \frac{\mu_k}{\xi - \xi_k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Здесь через ξ_k обозначены корни $P_{n+1}^{(i+1)}(\xi) = 0$. Я хочу доказать, что

$$J = 2 \int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} P_n^{(i+1)} P_{n+1}^{(i+1)} d\xi > 0,$$

ибо тогда

$$J = a_{ii}(\xi_{r+1}) - a_{ii}(\xi_r) > 0,$$

т. е.

$$a_{ii}(\xi_{r+1}) > a_{ii}(\xi_r) \quad \text{а} \quad L(\xi_{r+1}) < L(\xi_r).$$

Как известно

$$\mu_k = \frac{P_n^{(i)}(\xi_k)}{P_{n+1}^{(i+2)}(\xi_k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Продифференцируем (16) — тогда получим:

$$P_{n+1}^{(i+1)} P_n^{(i+1)} - P_n^{(i)} P_{n+1}^{(i+2)} = -[P_{n+1}^{(i+1)}]^2 \sum_{k=1}^{n-i} \frac{\mu_k}{(\xi - \xi_k)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Тогда

$$J = 2\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} P_n^{(i+1)} P_{n+1}^{(i+1)}\, d\xi = 2\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} P_n^{(i)} P_{n+1}^{(i+2)}\, d\xi - 2\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} [P_{n+1}^{(i+1)}]^2 \sum_{k=1}^{n-i} \frac{\mu_k}{(\xi - \xi_k)^2},$$

или, после интегрирования по частям,

$$J = -\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} [P_{n+1}^{(i+1)}]^2 \sum_{k=1}^{n-i} \frac{\mu_k}{(\xi - \xi_k)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Дифференцируя i раз формулу $P'_{n+1} = \xi P'_n + (n+1) P_n$, найдем:

$$P_{n+1}^{(i+1)} = \xi P_n^{(i+1)} + (n+i+1) P_n^{(i)},$$

а отсюда

$$P_n^{(i)}(\xi_k) = -\frac{\xi_k P_n^{(i+1)}(\xi_k)}{n+i+1} \quad \text{и} \quad \mu_k = -\frac{\xi_k P_n^{(i+1)}(\xi_k)}{(n+i+1) P_{n+1}^{(i+2)}(\xi_k)} \quad . \quad . \quad (20)$$

Из этой формулы видно, что μ_k нечетная функция ξ_k и что при $\xi_k > 0$ $\mu_k < 0$, ибо $P_n^{(i+1)}(\xi_k) \cdot P_{n+1}^{(i+2)}(\xi_k) > 0$, так как в точке ξ_k a_{ii} достигает минимума.

Корни нашего полинома $P_{n+1}^{(i+1)}$ расположены симметрично относительно нуля; каждому ξ_k соответствует $-\xi_k$ и $\mu_k(-\xi_k) = -\mu_k(\xi_k)$.

Поэтому

$$J = -\sum \mu_k \int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} [P_{n+1}^{(i+1)}]^2 \left\{ \frac{1}{(\xi - \xi_k)^2} - \frac{1}{(\xi + \xi_k)^2} \right\} d\xi = -4 \sum \mu_k \xi_k \int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} \frac{\xi\, [P_{n+1}^{(i+1)}]^2\, d\xi}{(\xi^2 - \xi_k^2)^2},$$

где суммирование производится лишь по положительным корням. Ясно, что $J > 0$.

Докажем теперь, для $0 \leqslant \xi < 1$, *что и каждый минимум больше последующего.*

Minima будут там, где $P_n^{(i+1)} = 0$. Обозначим эти точки через $\bar{\xi}_k$.

Тогда

$$\frac{P_{n+1}^{(i)}(\xi)}{P_n^{(i+1)}(\xi)} = a\xi^2 + b + \sum_{k=1}^{n-i-1} \frac{v_k}{\xi - \bar{\xi}_k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

где

$$v_k = \frac{P_{n+1}^{(i)}(\bar{\xi}_k)}{P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

и $a > 0$.

Дифференцируя (21), получим:

$$P_n^{(i+1)} P_{n+1}^{(i+1)} - P_{n+1}^{(i)} P_n^{(i+2)} = [P_n^{(i+1)}]^2 \left\{ 2a\xi - \sum_{k=1}^{n-i-1} \frac{v_k}{(\xi - \bar{\xi}_k)^2} \right\}.$$

Обозначим

$$\bar{J}=2\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} P_n^{(i+1)} P_{n+1}^{(i+1)}\, d\xi = 2\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} P_{n+1}^{(i)}\, P_n^{(i+2)}\, d\xi + 4a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\,[P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi -$$

$$-2\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} [P_n^{(i+1)}]^2 \sum_{k=1}^{n-i-1} \frac{v_k}{(\xi-\bar{\xi}_k)^2}\, d\xi\,,$$

или, после интегрирования по частям

$$\bar{J}=2a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\,[P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi - \int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} [P_n^{(i+1)}]^2 \sum_{k=1}^{n-i-1} \frac{v_k}{[\xi-\bar{\xi}_k]^2}\, d\xi.$$

Опять надо доказать, что $\bar{J}>0$. Тогда $a_{ii}(\bar{\xi}_{r+1})>a_{ii}(\bar{\xi}_r)$, а $L(\bar{\xi}_{r+1})<L(\bar{\xi}_r)$. Из формулы (22) видно, что v_k нечетная функция $\bar{\xi}_k$ Дифференцируя i раз формулу

$$\xi P'_{n+1} = P'_n + (n+1)\, P_{n+1}\,,$$

получим

$$\xi P_{n+1}^{(i+1)} = P_n^{(i+1)} + (n-i+1)\, P_{n+1}^{(i)}.$$

Отсюда

$$P_{n+1}^{(i)}(\bar{\xi}_k) = \frac{\bar{\xi}_k\, P_{n+1}^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)}{n-i+1}\,, \quad \text{а} \quad v_k = \frac{\bar{\xi}_k\, P_{n+1}^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)}{(n-i+1)\, P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)} \qquad (23)$$

Но $P_{n+1}^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)\, P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)<0$, ибо при $\xi=\bar{\xi}_k$ a_{ii} достигает максимума. Поэтому, при $\bar{\xi}_k>0$ $v_k<0$. Отсюда так же, как и в предыдущем случае

$$\bar{J}=2a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\,[P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi - \sum v_k \int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} [P_n^{(i+1)}]^2 \left\{\frac{1}{(\xi-\bar{\xi}_k)^2} - \frac{1}{(\xi+\bar{\xi}_k)^2}\right\} d\xi =$$

$$=2a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\,[P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi - 4\sum v_k\,\bar{\xi}_k \int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \frac{\xi\,[P_n^{(i+1)}]^2}{(\xi^2-\bar{\xi}_k^2)^2}\, d\xi > 0\,.$$

Из доказанных теорем вытекает интересное свойство полиномов Legendre'а. Так как extrema L идут убывая, то, как видно из (15)

$$\left| P_{n+1}^{(i)}(\xi_{k+1}) \right| > \left| P_{n+1}^{(i)}(\xi_k) \right|$$

и точно также в точках, где

$$P_n^{(i+1)}=0 \qquad \left| P_n^{(i)}(\bar{\xi}_{k+1}) \right| > \left| P_n^{(i)}(\bar{\xi}_k) \right|,$$

т. е. *при изменении ξ от нуля до единицы экстремальные значения любой производной любого полинома Legendre'а возрастают по абсолютной величине.*

§ 9.

Если сравнить между собой $L_n(\xi)$ и $L_{n-1}(\xi)$, то так как

$$\sum_{k=i}^{n}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2 = \sum_{k=i}^{n-1}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2 + (2n+1)\,[P_n^{(i)}(\xi)]^2$$

ясно, что $L_n(\xi) \leqslant L_{n-1}(\xi)$. Знак равенства будет в точках, в которых $P_n^{(i)}(\xi)=0$. Таким образом $L_{n+1} \leqslant L_n \leqslant L_{n-1}$. Кривая L_n целиком лежит между кривыми L_{n+1} и L_{n-1}, касаясь их в тех точках, где $P_{n+1}^{(i)}=0$ или $P_n^{(i)}=0$. Действительно

$$L_n' = -\frac{2\,(2i+1)\,S_i^2\,P_n^{(i+1)}\,P_{n+1}^{(i+1)}}{\left\{\sum\limits_{k=i}^{n}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2\right\}^2} \text{ а } L_{n+1}' = -\frac{2\,(2i+1)\,S_i^2\,P_{n+1}^{(i+1)}\,P_{n+2}^{(i+1)}}{\left\{\sum\limits_{k=i}^{n+i}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2\right\}^2}.$$

Но из формулы $P_{n+2}^{(i+1)} - P_n^{(i+1)} = (2n+3)P_{n+1}^{(i)}$ видно, что там, где $P_{n+1}^{(i)}=0$ $L_n' = L_{n+1}'$ и кривые касаются.

Из предыдущих исследований ясно, что в тех случаях, когда $n-i$ число нечетное, при нуле будет maximum maximorum. Обозначим его $L_{n,0}$. Ясно, что $L_{n,0} = L_{n-1,0}$.

Если же $n-i$ четное, то при нуле будет минимум, а следующий за ним максимум будет наибольшим.

§ 10.

Выведем теперь асимптотическую формулу для отклонения. Как известно, для достаточно больших n мы имеем в интервале

$$-1+\varepsilon < \xi < 1-\varepsilon$$

$$P_n(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right]\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{*)}$$

Дифференцируем i раз. Получим:

$$P_n^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}}\cdot\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi + i\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}{(-\sin\varphi)^i}\,n^i\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

и таким образом

$$L = \frac{(2i+1)\,S_i^2}{\left\{\frac{2\cos^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi + i\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}{\pi(\sin\varphi)^{2i+1}} + \frac{2\sin^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi + i\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}{\pi(\sin\varphi)^{2i+1}}\right\} n^{2i+1}\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}}$$

т. е.

$$L \simeq \frac{\pi\,(2i+1)\,S_i^2(\sin\varphi)^{2i+1}}{2n^{2i+1}}, \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

---

*) Через $0\left(\frac{1}{n}\right)$ обозначена совокупность членов имеющих n в знаменателе.

или

$$L = L_{n,o}(\sin\varphi)^{2i+1}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

где

$$L_{n,o} = \frac{\pi(2i+1)\, S_i^2}{2n^{2i+1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

асимптотическое выражение отклонения при $\xi = 0$, т. е. maximum maximorum.

При $\xi = 1$, $\varphi = 0$ и формуле не применима. Но при приближении φ к нулю L тоже стремится к нулю, т. е. очевидно, при единице L содержит в знаменателе n в более высокой степени, чем $2i+1$.

§ 11.

Выведем формулу для $\xi = 1$.

Вычислим $P_n^{(i)}(1)$.

Как известно

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k(x).$$

Взяв от левой части i раз производную по x, получим

$$\frac{1.3.5\ldots.(2i-3)(2i-1)(2r)^i}{2^i}\left(1 - 2rx + r^2\right)^{-\frac{2i+1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k^{(i)}(x).$$

Подставляя $x = 1$ получим:

$$1.3.5\ldots.(2i-1)(1-r)^{-(2i+1)} r^i = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k^{(i)}(1).$$

Разлагаем $(1-r)^{-(2i+1)}$ по биному Newton'а и берем коэффициент при r^{n-i}. Он равен

$$\frac{(2i+1)(2i+2)\ldots\ldots(i+n)}{(n-i)!}.$$

Тогда

$$P_n^{(i)}(1) = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)(2i+1)(2i+2)\ldots.(n+i)}{(n-i)!} = \frac{(n+i)!}{2^i i!\,(n-i)!} =$$

$$= \frac{(n-i+1)(n-i+2)\ldots.(n+i-1)(n+i)}{2^i.\,i!} \qquad \ldots\ldots (27)$$

Тогда, по (5')

$$L(1) = \frac{2^{2i} i!^2\, S_i^2(2i+1)}{(n-i+1)^2(n-i+2)^2\ldots.(n+i)^2(n+i+1)^2},$$

т. е. $L(1)$ порядка $n^{-2(2i+1)}$. Асимптотически

$$L(1) \simeq \frac{2^{2i} i!^2\, S_i^2(2i+1)}{n^{4i+2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (28)$$

Если сравнить $L(1)$ и $L(0)$, то, для достаточно больших значений n

$$\frac{L(1)}{L(0)} \simeq \frac{i\,!^2}{\pi}\left(\frac{2}{n}\right)^{2i+1}.$$

§ 12.

Перейдем теперь к исследованию второй задачи, когда задан целый ряд производных. Мы получили формулу (11):

$$L = \sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} (-1)^{j+l} S_j S_l \frac{A_{jl}}{a}.$$

Таким образом задача сводится к нахождению отношения миноров определителя, составленного из a_{jl} к самому определителю. Мы нашли уже, что

$$a_{jl}(\xi) = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\,P_n^{(j)} P_n^{(l)} + (1-\xi^2)\,P_n^{(j+1)} P_n^{(l+1)}}{j+l+1}.$$

Мы видим, что формула значительно упрощается при $\xi = \pm 1$. При $\xi = 0$, если j и l различной четности, то $a_{jl} = 0$.
Если j и l одной четности с n, то

$$a_{jl}(0) = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\;P_n^{(j)}(0)\,P_n^{(l)}(0)}{j+l+1} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Если же $n-j$ и $n-l$ числа нечетные, то

$$a_{jl} = \frac{P_n^{(j+1)}(0)\,P_n^{(l+1)}(0)}{j+l+1} = \frac{(n+j)\,(n+l)\;P_{n-1}^{(j)} P_{n-1}^{(l)}}{j+l+1}$$

что следует из формулы $P_n' = \xi\,P_{n-1}' + n\,P_{n-1}$. Таким образом, если $n-j$ и $n-l$ нечетные числа, то в формуле (29) надо n заменить $n-1$. Это ясно из самого вывода формул для a_{jl}. Итак, для $\xi = \pm 1$ и $\xi = 0$ формула для a_{jl} значительно упрощается. Для этих значений ξ, т.-е. для середины и концов интервала мы дадим точное решение задачи до конца.

Для всех остальных значений ξ мы получим асимптотическую формулу.

§ 13.

При $\xi = 1$

$$a_{jl} = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\;P_n^{(j)}(1)\,P_n^{(l)}(1)}{j+l+1}$$

Мы видим, что в определителе a можно вынести за знак определителя из всех элементов j-ой вертикали $(n+j+1)\,P_n^{(j)}(1)$ и из всех элементов l-ой горизонтали $(n+l+1)\,P_n^{(l)}(1)$. Таким образом определитель a приводится к определителю b, где $b_{ik} = \frac{1}{i+k+1}$. Легко видеть, что $\frac{a}{A_{ik}} = (n+i+1)(n+k+1)\, P_n^{(i)}(1)\, P_n^{(k)}(1) \cdot \frac{b}{B_{ik}}$, где B_{ik} минор определителя b, соответствующий элементу b_{ik}. Вычислим $\frac{B_{ik}}{b}$

$$
b = \begin{vmatrix}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{i} & \frac{1}{i+1} & \frac{1}{i+2} & \dots & \frac{1}{m+1} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{i+1} & \frac{1}{i+2} & \frac{1}{i+3} & \dots & \frac{1}{m+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \dots & \frac{1}{i+k-1} & \frac{1}{i+k} & \frac{1}{i+k+1} & \dots & \frac{1}{m+k} \\
\frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} & \dots & \frac{1}{i+k} & \frac{1}{i+k+1} & \frac{1}{i+k+2} & \dots & \frac{1}{m+k+1} \\
\frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} & \frac{1}{k+4} & \dots & \frac{1}{i+k+1} & \frac{1}{i+k+2} & \frac{1}{i+k+3} & \dots & \frac{1}{m+k+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \frac{1}{m+3} & \dots & \frac{1}{m+i} & \frac{1}{m+i+1} & \frac{1}{m+i+2} & \dots & \frac{1}{2m+1}
\end{vmatrix}
$$

Из элементов каждой вертикали вычтем элементы i-ой вертикали. Получим:

$$
b = \begin{vmatrix}
\frac{i}{i+1} & \frac{i-1}{2(i+1)} & \dots & \frac{1}{i(i+1)} & \frac{1}{i+1} & \frac{-1}{(i+1)(i+2)} & \dots & \frac{-(m-i)}{(i+1)(m+1)} \\
\frac{i}{2(i+2)} & \frac{i-1}{3(i+2)} & \dots & \frac{1}{(i+1)(i+2)} & \frac{1}{i+2} & \frac{-1}{(i+2)(i+3)} & \dots & \frac{-(m-i)}{(i+2)(m+2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{i}{k(i+k)} & \frac{i-1}{(k+1)(i+k)} & \dots & \frac{1}{(k+i-1)(i+k)} & \frac{1}{i+k} & \frac{-1}{(k+i+1)(i+k)} & \dots & \frac{-(m-i)}{(k+m)(i+k)} \\
\frac{i}{(k+1)(i+k+1)} & \frac{i-1}{(k+2)(i+k+1)} & \dots & \frac{1}{(k+i)(i+k+1)} & \frac{1}{i+k+1} & \frac{-1}{(k+i+2)(i+k+1)} & \dots & \frac{-(m-i)}{(k+m+1)(i+k+1)} \\
\frac{i}{(k+2)(i+k+2)} & \frac{i-1}{(k+3)(i+k+2)} & \dots & \frac{1}{(k+i+1)(i+k+2)} & \frac{1}{i+k+2} & \frac{-1}{(k+i+3)(i+k+2)} & \dots & \frac{-(m-i)}{(k+m+2)(i+k+2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{i}{(m+1)(m+i+1)} & \frac{i-1}{(m+2)(m+i+2)} & \dots & \frac{1}{(m+i)(m+i+1)} & \frac{1}{i+m+1} & \frac{-1}{(m+i+2)(m+i+1)} & \dots & \frac{-(m-i)}{(2m+1)(m+i+1)}
\end{vmatrix}
$$

Вынося множителей по вертикалям и по горизонталям, получим:

$$b=\frac{i\,!\,(m-i)\,!\,(-1)^{m-i}}{(i+1)\,(i+2)\ldots(i+m+1)}\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{i} & 1 & \frac{1}{i+2} & \ldots & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{i+1} & 1 & \frac{1}{i+3} & \ldots & \frac{1}{m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} & \ldots & \frac{1}{i+k-1} & 1 & \frac{1}{i+k+1} & \ldots & \frac{1}{m+k} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \ldots & \frac{1}{i+k} & 1 & \frac{1}{i+k+2} & \ldots & \frac{1}{m+k+1} \\ \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} & \ldots & \frac{1}{i+k+1} & 1 & \frac{1}{i+k+3} & \ldots & \frac{1}{m+k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \ldots & \frac{1}{m+i} & 1 & \frac{1}{m+i+2} & \ldots & \frac{1}{2m+1} \end{vmatrix}$$

Теперь из элементов каждой горизонтали вычтем элементы k-ой. Получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{k}{2(k+2)} & \ldots & \frac{k}{i(k+i)} & 0 & \frac{k}{(i+2)(k+i+2)} & \ldots & \frac{k}{(m+1)(m+k+1)} \\ \frac{k-1}{2\,(k+1)} & \frac{k-1}{3(k+2)} & \ldots & \frac{k-1}{(i+1)(k+i)} & 0 & \frac{k-1}{(i+3)(k+i+2)} & \ldots & \frac{k-1}{(m+2)(k+m+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k(k+1)} & \frac{1}{(k+1)(k+2)} & \ldots & \frac{1}{(i+k-1)\,(k+i)} & 0 & \frac{1}{(i+k+1)(k+i+2)} & \ldots & \frac{1}{(m+k)(k+m+1)} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \ldots & \frac{1}{k+i} & 1 & \frac{1}{k+i+2} & \ldots & \frac{1}{k+m+1} \\ \frac{-1}{(k+1)(k+2)} & \frac{-1}{(k+2)(k+3)} & \ldots & \frac{-1}{(k+i)(k+i+1)} & 0 & \frac{-1}{(k+i+2)(i+k+3)} & \ldots & \frac{-1}{(k+m+1)(m+k+2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-(m-k)}{(k+1)\,(m+1)} & \frac{-(m-k)}{(k+2)(m+2)} & \ldots & \frac{-(m-k)}{(m+i)\,(k+i)} & 0 & \frac{-(m-k)}{(m+i+2)(i+k+2)} & \ldots & \frac{-(m-k)}{(2m+1)(m+k+1)} \end{vmatrix}$$

Вынося общих множителей по всем горизонталям и вертикалям, получим

$$b=\frac{(-1)^{i+k}(i+k+1)B_{ik}\,i\,!\,(m-i)\,!\,(-1)^{m-i}}{(i+1)(i+2)\ldots.(i+m)(i+m+1)}\cdot\frac{k\,!\,(m-k)\,!\,(-1)^{m-k}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)(k+m+1)}.$$

А так как

$$P_m^{(s)}(1) = \frac{(m-s+1)(m-s+2)\ldots.(m+s-1)(m+s)}{2^s . s\,!},$$

то

$$\frac{B_{ik}}{b} = \frac{2^{i+k}}{i!\;k!\;(i+k+1)}(i+m+1)(k+m+1)P_m^{(i)}(1)P_m^{(k)}(1)\;\ldots\;(30)$$

и

$$L = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-2)^{i+k}S_i\,S_k}{i!\;k!\;(i+k+1)}\cdot\frac{(i+m+1)(k+m+1)P_m^{(i)}(1)P_m^{(k)}(1)}{(i+n+1)(k+n+1)P_n^{(i)}(1)P_n^{(k)}(1)}.\;.\;(31)$$

Преобразуем формулу (30) еще несколько иначе:

$$\frac{B_{ik}}{b} = \frac{(m-i+1)(m-i+2)\ldots.(m+i+1)\;(m-k+1)(m-k+2)\ldots.(m+k+1)}{i!\;k!\;i!\;k!\;(i+k+1)}$$

$$L = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-2)^{i+k}S_i\,S_k}{i!\;k!\;(i+k+1)}\cdot\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2\prod_{r=1}^{r=i}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\prod_{r=1}^{r=k}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}.\;(32)$$

Из этой формулы мы видим, что член с $S_i\,S_k$ будет порядка $n^{-2(i+k+1)}$. Член с S_0^2 имеет в знаменателе n^2. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(n^2L) = S_0^2(m+1)^2 \quad \text{и} \quad L(1) \simeq \frac{(m+1)^2S_0^2}{n^2}.\;\;.\;.\;.\;(33)$$

§ 14.

Общий случай, — когда интервал какой угодно — легко свести к этому.

Пусть требуется найти полином, для которого при $x=\beta$ задано значение его самого и его m первых производных

$$z^{(i)}(\beta) = \overline{S}_i\;(i=0,\;1,\;2\ldots\;m)$$

так, чтобы

$$\overline{L} = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} z^2dx$$

было минимальным. Введем

$$x = \frac{\beta-\alpha}{2}\;u\;\;+\frac{\beta+\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\overline{L} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} z^2du$$

должно быть минимально, при выполнении условий:

$$\frac{d^{(i)}z}{dx^i} = \frac{d^{(i)}z}{du^i}\left(\frac{2}{\beta-\alpha}\right)^i = \overline{S}_i\,.$$

Отсюда

$$\frac{d^{(i)}z}{du^i} = S_i = \overline{S}_i\,.\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^i$$

$$L = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\alpha-\beta)^{i+k}\,\overline{S}_i\,\overline{S}_k}{i!\;k!\;(i+k+1)}\cdot\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2\prod_{r=1}^{r=i}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\prod_{r=1}^{r=k}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\,. \quad (34)$$

Асимптотическая формула будет по прежнему

$$L \simeq \frac{(m+1)^2\,S_0^2}{n^2}\,.$$

Если $\alpha = 1$ $\beta = -1$, то

$$L(-1) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{2^{i+k}S_i\,S_k}{i!k!(i+k+1)}\cdot\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2\prod_{r=1}^{r=i}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\prod_{r=1}^{r=k}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\,. \quad (35)$$

§ 15.

Рассмотрим теперь случай $\xi = 0$.

Мы видели, что

$$a_{jl} = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\,P_n^{(j)}(0)\,P_n^{(l)}(0)}{j+l+1}\,,$$

для j и l одной четности с n. Если j и l различной четности с n, то вместо n берется $n-1$.

Легко видеть, что в определителе a можно вынести ряд множителей по горизонталям и по вертикалям. Определитель a приведется к определителю c, общий член которого

$$c_{ik} = \frac{1+(-1)^{i+k}}{2\,(i+k+1)}.$$

Тогда

$$\frac{a}{A_{ik}} = (n+i+1)\,(n+k+1)\,P_n^{(i)}(0)\,P_n^{(k)}(0)\,\frac{c}{C_{ik}}\,,$$

где C_{ik} минор определителя c, соответствующий элементу c_{ik}. Тогда

$$\frac{A_{ik}}{a} = \frac{1}{(n+i+1)\,(n+k+1)\,P_n^{(i)}(0)\,P_n^{(k)}(0)}\cdot\frac{C_{ik}}{c}\;.\;.\;.\;.\;.\; (36)$$

для i и k одной четности с n. Если i и k различной четности друг с другом, то $A_{ik} = 0$. Действительно, если проделать вычисление с самого начала без полиномов Legendre'а, то легко убедиться в том, что в выражение для L входят только произведения S с одними четными или с одними нечетными индексами.

Таким образом задача снова свелась к нахождению отношения минора некоторого числового определителя к самому определителю,

Положим для определенности, что i, k, m четные числа. Тогда

$$c = \begin{vmatrix}
1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \cdots 0 & \frac{1}{i+1} & 0 & \frac{1}{i+3} \cdots & 0 & \frac{1}{m+1} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \cdots & \frac{1}{i+1} & 0 & \frac{1}{i+3} & 0 \cdots & \frac{1}{m+1} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \cdots 0 & \frac{1}{i+3} & 0 & \frac{1}{i+5} \cdots & 0 & \frac{1}{m+3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \frac{1}{k+1} & 0 & \frac{1}{k+3} & \frac{1}{i+k-1} & 0 & \frac{1}{i+k+1} & 0 \cdots & \frac{1}{m+k-1} & 0 \\
\frac{1}{k+1} & 0 & \frac{1}{k+3} & 0 \cdots 0 & \frac{1}{i+k+1} & 0 & \frac{1}{i+k+3} \cdots & 0 & \frac{1}{m+k+1} \\
0 & \frac{1}{k+3} & 0 & \frac{1}{k+5} \cdots & \frac{1}{i+k+1} & 0 & \frac{1}{i+k+3} & 0 \cdots & \frac{1}{m+k+1} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{m+1} & 0 & \frac{1}{m+3} & 0 \cdots & \frac{1}{m+i+1} & 0 & \frac{1}{m+i+3} & 0 \cdots & 0 & \frac{1}{2m+1}
\end{vmatrix}$$

Из всех элементов четных горизонталей вычтем элементы k-ой.

$$c = \begin{vmatrix}
\frac{k}{k+1} & 0 & \frac{k}{3(k+3)} \cdots & 0 & \frac{k}{(i+1)(i+k+1)} & 0 \cdots & 0 & \frac{k}{(m+1)(m+k+1)} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 \cdots & \frac{1}{i+1} & 0 & \frac{1}{i+3} \cdots & \frac{1}{m+1} & 0 \\
\frac{k-2}{3(k+1)} & 0 & \frac{k-2}{5(k+3)} \cdots & 0 & \frac{k-2}{(i+3)(i+k+1)} & 0 \cdots & 0 & \frac{k-2}{(m+3)(m+k+1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \frac{1}{k+1} & 0 \cdots & \frac{1}{i+k-1} & 0 & \frac{1}{i+k+1} \cdots & \frac{1}{m+k-1} & 0 \\
\frac{1}{k+1} & 0 & \frac{1}{k+3} \cdots & 0 & \frac{1}{i+k+1} & 0 \cdots & 0 & \frac{1}{m+k+1} \\
0 & \frac{1}{k+3} & 0 \cdots & \frac{1}{i+k+1} & 0 & \frac{1}{i+k+3} \cdots & \frac{1}{m+k+1} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{-(m-k)}{(m+1)(k+1)} & 0 & \frac{-(m-k)}{(m+3)(k+3)} \cdots & 0 & \frac{-(m-k)}{(m+i+1)(i+k+1)} & 0 \cdots & 0 & \frac{-(m-k)}{(2m+1)(m+k+1)}
\end{vmatrix}$$

За знак определителя вынесем:

$$\frac{k(k-2)(k-4)\;.\;.\;.\;2.(-2)(-4)\;.\;.\;.\;[-(m-k)]}{(k+1)(k+3)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(k+m+1)}=$$

$$=\frac{2^{\frac{k}{2}}\,2^{\frac{m-k}{2}}\left(\frac{k}{2}\right)!\left(\frac{m-k}{2}\right)!(-1)^{\frac{m-k}{2}}}{(k+1)(k+3)\;.\;.\;.\;(k+m-1\,(k+m+1)}=$$

$$=\frac{k\,!\,(-1)^{\frac{m-k}{2}}\,.\,2^m\,.\left(\frac{m-k}{2}\right)!\left(\frac{m+k}{2}\right)!}{(m+k+1)\,!}=\frac{k\,!}{(m+k+1)\,P_m^{(k)}(0)}.$$

После этого получим прежний определитель — только в k-ой горизонтали будут чередоваться единицы и нули. Если теперь из элементов всех четных вертикалей вычесть элементы i-ой вертикали, то за знак определителя можно будет вынести еще

$$\frac{i\,!}{(m+i+1)\,P_m^{(i)}(0)}\cdot(i+k+1) \quad \text{и} \quad \frac{C_{ik}}{c}=\frac{(m+i+1)\,(m+k+1)\,P_m^{(i)}(0)\,P_m^{(k)}(0)}{i\,!\,k\,!\,(i+k+1)}\,. \tag{37}$$

Легко видеть, что для m нечетного пришлось бы подставить $m-1$. Совершенно аналогично выводим формулу для i и k нечетных. Получится та же формула (37) для m одной четности с i и k.

Окончательно:

$$L(0)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{S_i\,S_k\quad(i+m+1)\,(k+m+1)\,P_m^{(i)}(0)\,P_m^{(k)}(0)}{i\,!\,k\,!\,(i+k+1)\,(i+n+1)\,(k+n+1)\,P_n^{(i)}(0)\,P_n^{(k)}(0)}\,. \tag{38}$$

§ 16.

Рассматривая формулы (32), (35) и (38) мы видим, что все три случая $\xi=+1,\,-1,\,0$ можно об'единить в одной общей формуле: Пусть

$$S_r'=S_r\,\frac{(m+r+1)\,P_m^{(r)}(\xi)}{(n+r+1)\,P_n^{(r)}(\xi)}$$

и введем полином

$$z=\sum_{r=0}^{m}\frac{(x-\xi)^r\,S_r'}{r\,!}.$$

Тогда

$$L=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}z^2\,dx.$$

§ 17.

Выведем теперь асимптотическую формулу для всех

$$-1+\varepsilon<\xi<1-\varepsilon.$$

Воспользуемся опять формулой

$$P_n(cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}}\cdot \operatorname{Cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Тогда

$$P_n^{(i)}=\sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{(-\sin\varphi)^i}\cdot n^i\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Тогда

$$a_{ik}=\left\{\frac{2\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{(-1)^{i+k}\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}(i+k+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{(-1)^{i+k}\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}(i+k+1)}\right\}n^{i+k+1}\cdot\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Отсюда

$$a_{ik}=\frac{2(-1)^{i+k}\cos\left[(i-k)\frac{\pi}{2}\right]}{\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}(i+k+1)}n^{i+k+1}\cdot\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Тогда

$$\frac{a}{A_{ik}}=\frac{2(-1)^{i+k}}{\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}}\cdot\frac{d}{D_{ik}}\cdot n^{i+k+1}\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

где d определитель, общий член которого

$$d_{ik}=\frac{\cos\left[(i-k)\frac{\pi}{2}\right]}{i+k+1}.$$

Ясно, что для i и k одной четности

$$d_{ik}=\frac{(-1)^{\frac{i+k}{2}}}{i+k+1};$$

если же i и k различной четности, то $d_{ik}=0$. Таким образом

$$\frac{A_{ik}}{a}=\frac{(-1)^{i+k}\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}}{2}\cdot\frac{D_{ik}}{d}\cdot\frac{1}{n^{i+k+1}}\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Таким образом коэффициент в L при $S_i\,S_k$ будет порядка $n^{-(i+k+1)}$.

Асимптотически

$$L \simeq S_0^2 \frac{\pi \sin\varphi}{2n} \cdot \frac{D_{00}}{d} = L_0 \sin\varphi\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (39)$$

где $L_0 = \frac{\pi S_0^2}{2n} \cdot \frac{D_{00}}{d}$ — асимптотическая величина отклонения при $\xi = 0$.

Из формулы (38) видим, что

$$L_0 = \frac{(m+1)^2 [P_m(0)]^2 S_0^2}{(n+1)^2 [P_n(0)]^2} \left\{1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{S_0^2 \left\{\dfrac{(m+1)!}{2^m \left(\dfrac{m}{2}\right)!^2}\right\}^2}{\left\{\dfrac{(n+1)!}{2^n \left(\dfrac{n}{2}\right)!^2}\right\}^2} \left[1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Отсюда

$$L_0 \simeq \frac{\pi S_0^2}{2n} \left\{\frac{(m+1)!}{2^m \left(\dfrac{m}{2}\right)!^2}\right\} \text{ для четного } m\,.$$

Для m нечетного его нужно заменить $m-1$.

Тот же результат дает, конечно, и непосредственное вычисление

$$\frac{D_{00}}{d}.$$

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность академику С. Н. Бернштейну за интерес, проявленный им к моей работе и за ценные указания, которые он мне делал.

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de résoudre deux problèmes suivants: construire un polynome, dont le degré ne dépasse pas n qui rende minimal l'écart moyen quadratique de zéro dans l'intervalle $-1, +1$ à condition qu'en un certain point $x = \xi$ est donné:

I) la derivée de notre polynome d'ordre i

$$y^{(i)}(\xi) = S_i \qquad \text{ou}$$

II) la valeur du polynome et de ses m derivées premières

$$y^{(j)}(\xi) = S_j \quad (j = 0, 1, 2 \ldots m).$$

L'analyse du premier problème nous offre des résultats suivants: l'écart minimal cherché

$$L = \frac{(2i+1) S_i^2}{(n+i+1)^2 \, [P_n^{(i)}(\xi)]^2 + (1-\xi^2) \, [P_n^{(i+1)}(\xi)]^2}$$

où P_n est le polynome de Legendre de degré n.

Notre polynome cherché est developpé en série de polynomes de Legendre:

$$y(x) = \frac{L}{S_i} \sum_{k=i}^{n} (2k+1) P_k^{(i)}(\xi) P_k(x).$$

En les points où $P_n^{(i)}$ s'annule le degré de notre polynome s'abaisse à $n-1$.

L'ecart L est une fonction paire de ξ.

L'ecart atteint dans l'intervalle $-1, +1$ $n-i-1$ minima (en les points où $P_n^{(i+1)}$ s'annule) et $n-i$ maxima (en les points où $P_{n+1}^{(i+1)}$ s'annule).

Les valeurs minimales sont:

$$L_{\min} = \frac{S_i^2 (2i+1)}{(n+i+1)^2 [P_n^{(i)}]^2} = \frac{S_i^2 (2i+1)}{[P_{n+1}^{(i+1)}]^2}.$$

Les valeurs maximales sont:

$$L_{\max} = \frac{S_i^2 (2i+1)}{(n-i+1)^2 [P_{n+1}^{(i)}]^2} = \frac{S_i^2 (2i+1)}{[P_n^{(i+1)}]^2}.$$

Quand ξ croît de zéro à un toutes les valeurs maximales et toutes les valeurs minimales diminuent. Quand ξ croît d'un à l'infini L diminue constamment.

La valeur de L pour $\xi = 1$ est plus petite qu'en tous les points de l'intervalle.

Zéro sera le point où le maximum maximorum est atteint si $n-i$ est un nombre impair. Dans le cas contraire le zéro de $P_{n+1}^{(i+1)}$ dont le module est le moindre sera le point où le maximum maximorum est atteint.

Pour $-1+\varepsilon < \xi < 1-\varepsilon$ nous avons pour les grandes valeurs de n:

$$L(\xi) = L\ (\cos\varphi) \simeq \frac{\pi (2i+1) S_i^2}{2n^{2i+1}} (\sin\varphi)^{2i+1}$$

ou $L = L_{n,0} (\sin\varphi)^{2i+1}$ où $L_{n,0}$ est la valeur asymptotique du maximum maximorum.

Pour $\xi = \pm 1$

$$L \simeq \frac{S_i^2\, 2^{2i}\, i!^2 (2i+1)}{n^{4i+2}}$$

pour les grandes valeurs de n.

En comparant les écarts au même point mais pour les valeurs differentes de n nous aurons $L_{n+1} \leqslant L_n \leqslant L_{n-1}$ c'est-à-dire la courbe de L_n se trouve tout entière entre les courbes de L_{n+1} et L_{n-1} touchant la courbe première aux points où $P_{n+1}^{(i)}$ s'annule et la seconde où $P_n^{(i)} = 0$.

L'analyse du second problème donne: pour $\xi = 1$

$$L = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-2)^{i+k} S_i S_k}{i!\,k!\,(i+k+1)} \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=i} \frac{(m+1)^2 - r^2}{(n+1)^2 - r^2} \prod_{r=1}^{r=k} \frac{(m+1)^2 - r^2}{(n+1)^2 - r^2}.$$

Pour les grandes valeurs de n

$$L(1) \simeq \frac{(m+1)^2}{n^2} S_0^2.$$

Ou peut réunir les trois cas $\xi = +1, -1, 0$ sous la formule générale: si nous designons

$$S_r' = S_r \frac{(r+m+1)\, P_m^{(r)}(\xi)}{(r+n+1) P_n^{(r)}(\xi)}$$

et construisons un polynome de degré m

$$z = \sum_{r=0}^{m} \frac{(x-\xi)^r S_r'}{r\,!},$$

nous aurons

$$L = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} z^2\, dx,$$

c'est-à-dire l'ecart quadratique de zéro de ce polynome z est égal à celui de notre polynome cherché. Enfin pour $-1+\varepsilon < \xi < 1-\varepsilon$ nous aurons pour les grandes valeurs de n

$$L \simeq \frac{\pi S_0^2}{2n} \cdot \left\{ \frac{(m+1)!}{2^m \left(\frac{m}{2}\right)!^2} \right\}^2 \sin\varphi\,, \text{ où } \xi = \cos\varphi.$$

Si m est impair il faut le remplacer par $m-1$.

Autrement dit $L = L_0 \sin\varphi$, où L_0 est la valeur asymptotique de L pour $\xi = 0$.

Про монотонний поліном, що найменше відхиляється від нуля

Я. Геронимус

Розгляньмо таку задачу: знайти монотонний ростучий поліном (в інтервалі $-1, +1$) непарного ступеня не вище від $n=2m+1$, коли відомо значіння похідної в кінцях інтервалу.

Маємо

$$y=\int_{-1}^{x}\varphi(x)dx \quad y'(-1)=a^2 \quad y'(+1)=b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

(припускаючи що $y(-1)=0$)

Функція $\varphi(x)$ не від'ємна в інтервалі $-1, +1$. Ясно, що вона не має коренів ± 1, бо тоді було б $y'(\pm 1)=0$. Хай $u^2(x)$ буде сукупність коренів, що лежать унутри інтервалу — кожний з них матиме парну кратність.

Хай $g(x)$ буде поліном, що має корені по-за інтервалом.

Тоді $\varphi(x)=u^2(x)g(x)$. Доведемо, що $g(x)$ буде постійна величина.

Розгляньмо

$$\varphi_1(x)=u^2(x)g(x)-\lambda^2u^2(x)(1-x^2).$$

Завжди можна знайти таке число λ, щоб $\varphi_1(x)$ була більша від нуля та менша проти $\varphi(x)$. Крім того $\varphi_1(\pm 1)=\varphi(\pm 1)$. Тоді, як що ступінь g більший від двох або рівний двом. то поліном

$$y_1=\int_{-1}^{x}\varphi_1(x)dx$$

ступеня не вище від n, задовольняє умовам (1) та дає відхил від нуля менший від полінома $y(x)$. Звідси ясно, що наш поліном матиме форму:

$$y(x)=\int_{-1}^{x}u^2(x)dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Отже треба знайти minimum інтегралу

$$L=\int_{-1}^{1}u^2(x)dx \quad \text{при} \quad u(1)=\pm b=\beta \quad u(-1)=\pm a=\alpha \; . \; . \; . \quad (3)$$

Розкладемо $u(x)$ за поліномами Legendre'а. Тоді

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x).$$

Наш інтеграл рівняється

$$L = \sum_{k=0}^{m} \frac{2a_k^2}{2k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Треба знайти minimum його при

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = \beta \quad \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k = \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

бо

$$P_k(1) = 1, \; P_k(-1) = (-1)^k$$

Умови extremum'а напишуться

$$\frac{4a_k}{2k+1} + \lambda_1 + (-1)^k \lambda_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Помножаючи (6) на a_k та сумуючи по всіх k, одержимо

$$2L + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Помножаючи (6) на $(2k+1)$ та сумуючи по k, знайдемо

$$4\beta + \lambda_1 (m+1)^2 + \lambda_2 (-1)^m (m+1) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Помножаючи (6) на $(2k+1)(-1)^k$ та сумуючи по k, знайдемо

$$4\alpha + \lambda_1 (-1)^m (m+1) + \lambda_2 (m+1)^2 = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

З рівнань (7), (8), (9) легко виключити λ_1 та λ_2 та знайти L.

Пригадуючи значіння α та β знайдемо відшукуваний найменший відхил

$$L = \frac{2(a^2 + b^2)}{m(m+2)} - \frac{4ab}{m(m+1)(m+2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Цікаво порівняти вислід що ми одержали з розвязкою задачі академіка С. Н. Бернштейна: *) знайти монотонний ростучий поліном непарного ступеня, що найменше відхиляється від нуля, коли його похідна при $x = 1$ рівняється b^2.

Розвязка цієї задачі буде

$$L = \frac{2b^2}{(m+1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Вислід що ми знайшли звичайно більший від (11). Коли в нашій задачі знайти a так, щоб (10) було minimum, то легко знайдемо, що

$$a = \frac{b}{m+1}$$

та формула (10) зливається з (11).

*) „Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle" professées á la Sorbonne par S. Bernstein p. p. 47 — 50.

RÉSUMÉ

Parmi tous les polynomes de degré impaire $n = 2m + 1$ non décroissants sur le segment $-1, +1$, pour lesquels la valeur de la première dérivée aux bords est connue, celui qui s'écarte le moins possible de zéro est représenté par l'expression

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)dx$$

(en admettant, comme nous le pouvons, que $y(-1) = 0$).

L'écart minimum cherché

$$L = \frac{2(a^2 + b^2)}{m(m+2)} - \frac{4ab}{m(m+1)(m+2)}$$

où

$$y'(-1) = a^2 \quad \text{et} \quad b^2 = y'(+1)$$

Об одной геометрической задаче, связанной с теорией функций

В. Л. Гончаров

Пусть $f(x)$ есть бесконечно-дифференцируемая функция вещественного переменного x: она называется аналитической в точке $x=t$, если в этой точке разлагается в ряд Тэйлора, сходящийся для $|x-t|<\varrho$, где ϱ — положительное число. Верхняя граница R чисел ϱ называется радиусом сходимости функции $f(x)$ в точке $x=t$ и является, очевидно, функцией от t:

$$R\equiv R(t),$$

заданной для всех значений t, где $f(x)$ — аналитическая функция. Ряд Тейлора дает „продолжение“ функции в комплексной области.

Нас интересуют следующие вопросы:

1) Какие свойства характеризуют функцию $R(t)$? иначе: какие условия являются необходимыми и достаточными, чтобы данная функция $R(t)$ могла быть рассматриваема, как радиус сходимости некоторой функции $f(x)$?

2) Если задана функция $R(t)$, удовлетворяющая этим условиям, то что можно сказать о комплексных особенностях функции $f(x)$?

Т. к. совокупность точек, где $f(x)$ — не аналитическая, т. е. совокупность вещественных особенностей $f(x)$, — замкнутая, то достаточно ограничиться рассмотрением промежутка смежности, где $f(x)$ — аналитическая.

Выведем сначала необходимые условия, которым удовлетворяет функция $R(t)$. Прежде всего:

$$R(t)>0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Известно, что радиус сходимости в точке t равен расстоянию этой точки от ближайшей особенности функции. Внутри круга с центром t_1 и радиусом $R(t_1)$ поэтому нет особенностей. Пусть точка t_2 находится внутри этого круга, т. е. $|t_2-t_1|<R(t_1)$; тогда не должно быть особенностей внутри круга с центром t_2 и радиусом $R(t_1)-|t_2-t_1|$, и, следовательно, $R(t_2)\geqslant R(t_1)-|t_2-t_1|$, или $R(t_1)-R(t_2)\leqslant|t_1-t_2|$. Вследствие (I) неравенство это справедливо и для значений t_2 таких, что $|t_2-t_1|\geqslant R(t_1)$, а потому — для всех значений t_1 и t_2. Меняя роли

t_1 и t_2, получим $R(t_2)-R(t_1)\leqslant|t_1-t_2|$, и наконец, для всех значений t_1 и t_2:

$$|R(t_1)-R(t_2)|\leqslant|t_1-t_2|. \qquad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

Допустим теперь, что $t_1<t_2<t_3$, $t_3-t_1\leqslant R(t_1)+R(t_3)$. Обозначим через C_i круг с центром t_i и радиусом $R(t_i)$ $(i=1, 2, 3)$. Круги C_1 и C_3 взаимно пересекаются*) в точках, координаты которых даются уравнениями:

$$(x-t_1)^2+y^2=R^2(t_1),\quad (x-t_3)^2+y^2=R^2(t_3).$$

Функция $f(x)$ не имеет особенностей внутри кругов C_1 и C_3, т. к. ближайшая к t_2 точка контура, ограничивающего фигуру, составленную из внутренностей этих кругов, есть точка их взаимного пересечения, то $R(t_2)$ не может быть меньше, чем расстояние t_2 до этой точки. Квадрат этого расстояния равен

$$\frac{1}{t_3-t_1}\left[R^2(t_1)(t_3-t_2)+R^2(t_3)(t_2-t_1)-(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)\right],$$

откуда получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ R^2(t_1)-t_1^2 & R^2(t_2)-t_2^2 & R^2(t_3)-t_3^2 \end{vmatrix}\leqslant 0 \qquad \ldots\ldots (\mathrm{III})$$

Неравенство (III) доказано при условии $t_3-t_1\leqslant R(t_1)+R(t_3)$. Пусть, теперь: $t_3-t_1>R(t_1)+R(t_3)$. В этом случае из (II) вытекает, если допустим $t_2\leqslant t_1+R(t_1)$:

$$R^2(t_2)\geqslant[R(t_1)-(t_2-t_1)]^2,$$

и т. к в наших предположениях

$$[R(t_1)-(t_2-t_1)]^2>\frac{1}{t_3-t_1}\left[R^2(t_1)(t_3-t_2)+R^2(t_3)(t_2-t_1)-(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)\right],$$

то неравенство (III) доказано для $t_2\leqslant t_1+R(t_1)$. Подобным же образом оно распространяется на случай $t_2\geqslant t_3-R(t_3)$, принимая во внимание, что, вследствие (II):

$$R_2(t_2)\geqslant[R(t_3)-(t_3-t_2)]^2.$$

Выражение

$$R_2(t_1)(t_3-t_2)+R^2(t_3)(t_2-t_1)-(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)$$

не больше нуля при $t_2=t_1+R(t_1)$ и $t_2=t_3-R(t_3)$, и т. к. оно представляет собою трехчлен 2-й степени с положительным старшим коэффициентом относительно t_2, то оно отрицательно для $t_1+R(t_1)<t_2<t_3-R(t_3)$, и неравенство (III) опять-таки соблюдено. Итак, (III) имеет место при единственном условии $t_1\leqslant t_2\leqslant t_3$.

(Заметим, что (II) не следует из (III): так, для $R(t)\equiv\sqrt{t}$, $0<t_1<t_2<t_3<1$, (III) удовлетворяется, тогда как (II) — нет).

*) В самом деле, с одной стороны $t_3-t_1\leqslant R(t_1)+R(t_3)$, и, с другой, вследствие (II), $t_3-t_1\geqslant|R(t_3)-R(t_1)|$.

Выведем некоторые следствия из (I-III).

Вследствие (II) функция $R(t)$, очевидно, непрерывна.

Условие (III) означает, что функция $R^2(t) - t^2$ конвексная.

Этого достаточно, чтоб утверждать, что функция эта (а, следовательно, и функция $R(t)$) имеет всюду правую и левую производные, которые могут быть различными только в исчислимом ансамбле точек x. Мы будем обозначать через $R'_d(t)$ и $R'_g(t)$ правую и левую производную от $R(t)$.

Производные $R'_d(t)$ и $R'_g(t)$ удовлетворяют некоторым неравенствам, которые вытекают из (III). Именно, заменяя t_1, t_2, t_3 через t_1, t_1+h, t_2 $(h>0)$ и переходя к пределу при $h \to 0$, получим:

$$S'_d(t_1) \geqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} - (t_2-t_1) \quad . \; . \; . \; . \quad . \; . \; . \; (1)$$

Так же точно, заменяя t_1, t_2, t_3 через $t_1 - h, t_1, t_2$:

$$S'_g(t_1) \geqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} - (t_2-t_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

И еще:

$$S'_d(t_2) \leqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} + (t_2-t_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

$$S'_g(t_2) \leqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} + (t_2-t_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Все четыре неравенства предполагают $t_1 \leqslant t_2$. Но из них вытекает для всех t_1 и t_2:

$$(t_1-t_2)^2 - (t_1-t_2)\, S_{g,d}(t_1) + [S(t_1) - S(t_2)] \geqslant 0\,^{*)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Заменим в (2) t_1 и t_2 через t и $t+h$, и пусть $h \to 0$:

$$S'_g(t) \geqslant S'_d(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Отсюда следует:

$$R'_g(t) \geqslant R'_d(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Вычтем (1) из (4):

$$S'_g(t_2) - S'_d(t_1) \leqslant 2\,(t_2 - t_1) \quad (\text{при } t_1 < t_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Поэтому:

$$t_1 - R(t_1)\, R'_d(t_1) \leqslant t_2 - R(t_2)\, R'_g(t_2) \quad (\text{при } t_1 < t_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Общеприняты обозначения: $\lim\limits_{\substack{h>0\\ h\to 0}} \varphi(t+h) = \varphi(t+0)$, $\lim\limits_{\substack{h<0\\ h\to 0}} \varphi(t+h) = \varphi(t-0)$.

Покажем, что пределы $R'_d(t+0)$ и $R'_g(t+0)$ существуют и равны $R'_d(t)$. Положим временно:

$$F_d(t) \equiv t - R(t)\, R'_d(t)\,, \quad F_g(t) \equiv t - R(t)\, R'_g(t)\,.$$

(7) и (9) дают:

$$F_g(t) \leqslant F_d(t)\,,$$

при $t_1 < t_2$:

$$F_d(t_1) \leqslant F_g(t_2)\,.$$

---

*) $S'_{g,d}(t)$ означает, что неравенство справедливо, как для $S'_d(t)$, так и для $S'_g(t)$.

Отсюда:

$$F_g(t_1) \leqslant F_d(t_1) \leqslant F_g(t_2) \leqslant F_d(t_2),$$

т. е. $F_g(t)$ и $F_d(t)$ — не убывающие функции, так что существуют пределы $F_d(t+0)$ и $F_g(t+0)$.

Неравенства

$$F_g(t+h) \leqslant F_d(t+h) \leqslant F_g(t+2h)$$

в пределе при $h \to 0$ дают:

$$F_d(t+0) = F_g(t+0).$$

Поэтому

$$R'_d(t+0) = R'_g(t+0), = L.$$

Это означает, что для h положительных и достаточно малых $(h < h_\varepsilon)$:

$$L - \varepsilon < R'_d(t+h) \leqslant R'_g(t+h) < L + \varepsilon.$$

Отсюда ясно, что для $0 < h_1,\ h_2 < h_\varepsilon$:

$$L - \varepsilon < \frac{R(t+h_1) - R(t+h_2)}{h_1 - h_2} < L + \varepsilon.^{*)}$$

Заставляя стремиться к нулю сначала h_2, потом h^1, получим:

$$L - \varepsilon \leqslant R'_d(t) \leqslant L + \varepsilon,$$

откуда, окончательно, вытекает:

$$R'_d(t+0) = R'_g(t+0) = R'_d(t). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Совершенно так же:

$$R'_d(t-0) = R'_g(t-0) = R'_g(t). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Мы займемся теперь вторым из поставленных вопросов — о разыскании комплексных особенностей функции $f(x)$, если $R(t)$ предполагается заданной. Предполагается, что $R(t)$ удовлетворяет необходимым условиям (I-III), а, следовательно, имеют место все вытекающие из них следствия. Т. к. комплексные особенности попарно сопряжены, то достаточно ограничиться исследованием полуплоскости $y > 0$.

Будем обозначать через $C(t)$ круг сходимости

$$(x-t)^2 + y^2 = R^2(t) \equiv S(t). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

при $|h|$ достаточно малом круг $C(t+h)$ пересекается с кругом $C(t)$ (II). Внутри $C(t)$ нет особенностей, но на самом круге — есть, впрочем, не на той дуге, которая находится внутри круга $C(t+h)$. Точки пересечения кругов имеют абсциссу

$$t + \frac{1}{2}\left[h - \frac{S(t+h) - S(t)}{h}\right].$$

*) Теорема о конечном приращении: если функция $f(x)$ в промежутке $(a \leqslant x \leqslant b)$ имеет производные $f'_d(x)$ и $f'_g(x)$, и если в этом промежутке $m \leqslant f'_{d,g}(x) \leqslant M$, то $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

При $h>0$ абсциссы особенностей не должны превышать этого числа. Выражение, стоящее в квадратных скобках, вследствие (III) убывает вместе с h. Поэтому, переходя к пределу, видим, что абсциссы особенностей удовлетворяют условию:

$$x \leqslant t - \frac{1}{2} S_d'(t).$$

Точно так же с помощью круга $C(t+h)$, $h<0$, получим:

$$x \geqslant t - \frac{1}{2} S_g'(t).$$

Значит:

$$1 - R(t)R_g'(t) \leqslant x \leqslant t - R(t)R_d'(t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Если $R_g'(t) = R_d'(t) = R'(t)$, то на круге $C(t)$ имеется одна единственная (в полуплоскости $y>0$) особенность, координаты которой —

$$\begin{aligned} x &= t - R(t)R'(t) \\ y &= R(t)\sqrt{1 - R'^2(t)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14) \end{aligned}$$

Если же $R_g'(t) \neq R_d'(t)$, то на круге $C(t)$ может быть несколько особенностей, которые все лежат на дуге, определяемой (12) и (13). Эту дугу — или, в случае вырождения, точку — будем обозначать $L(t)$.

Обратим внимание на неравенство (9). Оно позволяет утверждать, что при $t_1 < t_2$ абсцисса всякой точки дуги $L(t_1)$ не превышает абсциссы любой точки дуги $L(t_2)$. В частности, если дуги $L(t_1)$ и $L(t_2)$ вырождаются в точки, то эти точки могут и совпадать, и в этом случае совпадают все точки $L(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$. Тогда дифференциальные уравнения (14) дают:

$$R(t) = \sqrt{(t+x)^2 + y^2}\,.$$

Это происходит, напр., если особенности — изолированные точки.

Я утверждаю, что в случае, если $R_g'(t) \neq R_d'(t)$, т. е. дуга $L(t)$ не вырождается в точку, обе крайние ее точки, имеющие абсциссы $t - R(t)R_g'(t)$ и $t - R(t)R_d'(t)$, являются особенностями. Чтоб убедиться в этом, достаточно принять во внимание, что совокупность особенностей — замкнутая, и что в любой окрестности рассматриваемой точки имеются особенности. В самом деле, мы знаем, что на дуге $L(t+h)$ имеется особенность P_h с координатами

$$(P_h) \quad \begin{aligned} x &= (t+h) - R(t+h)\varrho_h \\ y &= R(t+h)\sqrt{1 - \varrho_h^2}\,, \end{aligned}$$

при чем

$$R_d'(t+h) \leqslant \varrho_h \leqslant R_g'(t+h) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Квадрат расстояния точки P с координатами

$$(P) \quad \begin{aligned} x &= t - R(t)R_d'(t) \\ y &= R(t)\sqrt{1 - R_d'^2(t)} \end{aligned}$$

от точки P_h $(h > 0)$ равен

$$[(R(t+h)\varrho_h - R(t)R_d'(t)) - h]^2 + [R(t+h)\sqrt{1-\varrho_h^2} - R(t)\sqrt{1-R_d'^2(t)}]^2 .$$

Так как при $h \to 0$ ϱ_h стремится к $R_d'(t)$ (вследствие неравенств (10) и (15)), то и расстояние $\overline{PP_h}$ стремится к нулю.

Из предшествующего ясно, что все дуги (или точки) $L(t)$ образуют кривую Жордана, которую всякая прямая, параллельная мнимой оси, пересекает не более, чем в одной точке. Пусть M и N — точки пересечения такой прямой соотв. с вещественной осью и этой кривой. Тогда на всем отрезке MN, кроме, может-быть, точки N, функция $f(x)$ — аналитическая; точка же N в том только случае может не быть особенностью $f(x)$, если она — внутренняя точка одной из дуг $L(t)$. В частности, если функция $R(t)$ дифференцируема во всем рассматриваемом промежутке, то наша кривая — в этом случае обертка кругов сходимости $C(t)$ — является естественной границей функции $f(x)$.

Теперь мы можем видеть, что условия (I - III) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы $R(t)$ была равна радиусу сходимости некоторой функции $f(x)$. Раз условия (I - III) выполнены, то можно построить дуги (или точки) $L(t)$ указанным выше способом. Пусть E—совокупность точек, составленных из крайних точек дуг $L(t)$:

$$x = t - R(t)\, R_{g,d}'(t)$$
$$y = R(t)\sqrt{1 - R_{g,d}'^2(t)}\, .$$

Т. к. эта совокупность, как вытекает непосредственно из предыдущего, — замкнутая, то можно указать функцию $f(x)$, для которой совокупность особенностей есть E. Мы убедимся теперь, что такая функция $f(x)$ в точке $x = t'$ имеет радиус сходимости $R(t')$. В самом деле, радиус сходимости $f(x)$ в точке $M(t, 0)$ равен minimum'у расстояний $\overline{MP}$, когда P пробегает всю совокупность E. Но

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 &= [(t-t') - R(t)\, R_{g,d}'(t)]^2 + R^2(t)\,[1 - R_{g,d}'^2(t)] \\ &= (t-t')^2 - (t-t')\, S_{g,d}'(t) + S(t), \\ &= \Psi_{g,d}(t).\end{aligned}$$

Для $t = t'$

$$\Psi_{g,d}(t') = S(t') = R^2(t').$$

Для всех других значений t, вследствие первенства (5),

$$\Psi_{g,d}(t) - R^2(t') = (t-t')^2 - (t-t')\, S_{g,d}'(t) + S(t) - S(t') \geqslant 0,$$
$$\Psi_{g,d}(t) \geqslant R^2(t').$$

Поэтому min. $\overline{MP}^2 = R(t')$, что и требовалось проверить.

В заключение — несколько общих замечаний об обертках кругов с центрами на вещественной оси. Обозначая, как прежде, через $R(t)$

радиус круга, центр которого есть t, получаем уравнения обертки в параметрической форме (14). Отсюда следует:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{R'(t)}{\sqrt{1-R'^2(t)}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{R''(t)}{(1-R(t)R''(t)-R'^2(t))\,(1-R'^2(t))^{3/2}}.$$

Интересно, что $\frac{dy}{dx}$ не зависит от $R''(t)$, а $\frac{d^2y}{dx^2}$ — от $R'''(t)$; знак $\frac{dy}{dx}$ — всегда тот же, что и знак $R'(t)$, так что в соответствующих точках обертка $y=y(x)$ относительно возрастания и убывания ведет себя так, же, как данная кривая $R=R(t)$. То же самое справедливо относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $R''(t)$, если

$$1-R(t)\,R''(t)-R'^2(t)=1-(R^2(t))''>0.$$

Это последнее неравенство, между прочим, есть следствие (III).

Любопытны итеративные свойства oберток „высшего порядка“.

Пусть $y=y(x)$ есть начальная кривая (L). Пусть кривая (L_1) определяется параметрическими уравнениями:

$$(L_1)\begin{cases} x_1=x-yy' \\ y_1=y\sqrt{1-y'^2}\end{cases},\quad \text{где } y'=\frac{dy}{dx},$$

и, дальше, (L_{n+1}) $(n=1,2,\ldots)$ определяются уравнениями:

$$(L_{n+1})\begin{cases} x_{n+1}=x_n-y_ny_n' \\ y_{n+1}=y_n\sqrt{1-y_n'^2}\end{cases},\quad \text{где } y_n'=\frac{dy_n}{dx_n}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_n=x-nyy' \\ y_n=y\sqrt{1-ny'^2}\end{cases},\quad y_n'=\frac{y'}{\sqrt{1-ny'^2}},\quad y_n''=\frac{d^2y_n}{dx_n^2}=\frac{y''}{(1-n\,(y^2)'')\,(1-ny'^2)^{3/2}}.$$

Но более подробное исследование oберток кругов не входит в нашу задачу.

W. Gontcharoff. Sur un problème géometrique fourni par la théorie des fonctions.

Résumé. Soit $f(x)$ une fonction analytique d'une variable réclle x, définie dans un intervalle quelconque fini ou infini; soit $R\equiv R(t)$ le rayon de convergence du développement Taylorien au point $x=t$. La fonction $R(t)$ satisfait nécessairement aux inégalités suivantes:

$$R(t)>0 \quad \text{(I)}$$
$$|R(t_1)-R(t_2)|\leqslant|t_1-t_2| \quad \text{(II)}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ R^2(t_1)-t_1^2 & R^2(t_2)-t_2^2 & R^2(t_3)-t_3^2\end{vmatrix}\leqslant 0 \quad \text{(III) *)}.$$

Inversement, une fonction $R(t)$ ètant donnée qui satisfait à (I-III), il est possible de construire une fonction analytique $f(x)$ dont le rayon de convergence au point $x=t$ soit égal à $R(t)$.

---

*) La condition (III) nous apprend que la fonction $R^2(t)-t^2$ est convexe. Cette remarque est due à M. P. Montel.

La connaissance de la fonction $R(t)$ permet de faire certaines conclusions relatives à des singularités de $f(x)$. On forme l'ensemble des points de coordonnées $(t - R(t)R'(t), + R(t)\sqrt{1 - R'^2(t)})$ pour les valeurs de t où $R(t)$ est dérivable et des points des arcs de cercles

$$(L(t)) \begin{cases} (x-t)^2 + y^2 = R^2(t) \\ t - R(t)R'_g(t) \leqslant x \leqslant t - R'_d(t) \end{cases}$$

pour les valeurs de t où $R(t)$ n'est pas derivable, l'existence des dérivées droite et gauche $R_d(t)$ et $R'_g(t)$ étant une conséquence de la condition (III). Cet ensemble est une courbe de Jordan que chaque droite parallèle à l'axe imaginaire ne rencontre qu'en un seul point, La fonction $f(x)$ est holomorphe dans la région située entre cette courbe et l'axe réel; d'autre part, la courbe elle-même consiste des points singuliers de $f(x)$, excepté les points intérieurs aux arcs $L(t)$ au sujet desquels on ne sait rien. En particulier, si la fonction $R(t)$ est dérivable dans l'intervalle entier, la courbe de Jordan considérée est une coupure pour la fonction $f(x)$.

Sur la détermination des fonctions par les zéros de leurs dérivées

par W. Gontcharoff.

§ 1.

Soit (D) un domaine (complexe on réel) et (F) une classe de fonctions définies dans (D). Je désigne par $E(f)$ l'ensemble des zéros de la fonction $f(x)$ qui se trouvent dans (D), en tenant compte de leurs ordres de multiplicité. On peut étudier les conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'il existe une fonction $f(x)$ de la classe considérée (F) telle que l'on ait $E(f^{(n)}) \equiv E_n$ pour un certain nombre (fini ou infini) d'indices de dérivation n *), où les E_n sont des ensembles donnés; on pourrait aussi chercher à construire des fonctions de cette espèce. Dans ce qui suit, ce n'est pas la question *d'existence* mais la question *d'unicité* que j'essaierai de résoudre dans quelques cas particuliers: *les relations* $E(f^{(n)}) \equiv E(\varphi^{(n)})$ (où $f(x)$ et $\varphi(x)$ appartiennent à (F)) *entrainent-t-elles* $\varphi(x) \equiv Cf(x)$?

On sait bien que la réponse est affirmative, par exemple, si l'on prend comme (D) le plan de la variable x tout entier, et pour (F), la classe des polynomes ou des fonctions entières de genre zéro, et que l'on se borne à s'imposer une seule relation: $E(f) \equiv E(\varphi)$.

Je vais généraliser ce résultat en étudiant *le cas où* (D) *est, comme précédemment, le plan de* x, (F) *la classe des fonctions méromorphes d'ordre fini et à multiplicité bornée, ayant leurs pôles fixes* **) (le cas des fonctions entières n'étant pas exclu). Je dis qu'une fonction méromorphe est *à multiplicité bornée* s'il existe un nombre positif $K \equiv K(f)$ tel que tous les zéros et tous les pôles de $f(x)$ sont d'ordres de multiplicité non supérieurs à K. Dans ces hypothèses, *deux relations* $E(f) \equiv E(\varphi)$ *et* $E(f') \equiv E(\varphi')$ *suffisent pour qu'il s'en suive* $\varphi(x) \equiv Cf(x)$. Il ne se présente que deux cas exceptionnels:

(I) $f(x) = Ae^{\alpha P(x)}, \quad \varphi(x) = Be^{\beta P(x)}$ ($P(x)$ polynome)

(II) $f(x) = A\,[1 + e^{P(x)}]^m, \quad \varphi(x) = B\,[1 + e^{-P(x)}]^m$ ($P(x)$ polynome, m entier).

*) On considère la fonction $f(x)$ elle-même comme la dérivée d'ordre $n = 0$.

**) On tient compte des multiplicités des pôles.

En voici la démonstration. En vertu de

$$E(f) \equiv E(f) \quad \ldots\ldots\ldots (1) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{1}{f}\right) \equiv E\left(\frac{1}{\varphi}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1^1)$$

on a

$$\varphi(x) \equiv f(x)\, e^{P(x)}, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

où $P(x)$ est un polynome. Ensuite, les relations

$$E(f') \equiv E(\varphi') \quad \ldots\ldots\ldots (3) \text{ et } E\left(\frac{1}{f'}\right) \equiv E\left(\frac{1}{\varphi'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3^1)$$

nous donnent:

$$\varphi'(x) \equiv f'(x)\, e^{P(x)+Q(x)}, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

où $Q(x)$ est aussi un polynome. En prenant la dérivée de (2) et en éliminant $\varphi'(x)$ à l'aide de (4), on obtient l'équation différentielle:

$$f'(x)\left[e^{Q(x)} - 1\right] = P'(x) f(x) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

En admettant que $Q(x)$ est identiquement égal à une constante (que l'on peut évidemment supposer différente de $2n\pi i$), on est ramené au cas exceptionnel (I).

Soit $Q(x)$ un polynome qui ne se réduit pas à une constante. Ecrivons (5) sous la forme:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{P'(x)}{e^{Q(x)} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots (5^1)$$

Le premier membre étant une fonction méromorphe qui n'a que des pôles simples dont les résidus sont des nombres entiers bornés, il doit en être de même pour le second membre. L'équation $e^{Q(x)} - 1 = 0$ possède une infinité de racines avec un seul point-limite à l'infini; il est possible d'en extraire une suite infinie $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ($\lim a_n = \infty$) telle que: (1) a_n est une racine simple de $e^{Q(x)} - 1$ (car $(e^{Q(x)} - 1)' \equiv Q'(x) e^{Q(x)}$ n'a qu'un nombre fini de zéros), (2) $P'(a_n) \neq 0$ (car $P'(x)$ n'a qu'un nombre fini de zéros). Les résidus

$$A_n = \left.\frac{P'(x)}{(e^{Q(x)} - 1)'}\right|_{x=a_n} = \left.\frac{P'(x)}{Q'(x)}\right|_{x=a_n}$$

doivent avoir une limite déterminée pour $n \to \infty$, puisque $\dfrac{P'(x)}{Q'(x)}$ est une fonction rationnelle; or, les A_n étant bornés, cette limite est finie. D'autre part, les A_n étant entiers, on doit avoir nécessairement, pour des valeurs de n assez grandes:

$$A_n = m,$$

où m est un nombre entier. Il s'ensuit, identiquement:

$$\frac{P'(x)}{Q'(x)} = m.$$

Alors, l'équation (5^1) nous fournit:

$$f(x) = C\,(1 - e^{-Q(x)})^m, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

et d'après (2):

$$\varphi(x) = C'\,(e^{\varrho(x)} - 1)^m, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6^1)$$

et nous sommes ramenés, à notations près, au cas exceptionnel (II).

Il importe de remarquer que la restriction qui concerne la multiplicité bornée est très essentielle. Soit, par exemple, $F(t)$ la fonction génératrice des nombres de Bernoulli:

$$F(t) = \frac{t}{2}\,\frac{e^t + 1}{e^t - 1},$$

et posons:

$$f(x) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int_0^x F(t)dt + \frac{x^2}{8\pi i}}, \quad \varphi(x) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int_0^x F(t)dt - \frac{x^2}{8\pi i}}.$$

Les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont holomorphes dans tout le plan sauf les points $x = 2n\pi i$ (n entier) qui sont des pôles simples avec les résidus n de la fonction $\frac{1}{2\pi i}F(x)$; donc, le point $x = 2n\pi i$ est un zéro d'ordre n (si $n > 0$) ou un pôle d'ordre $|n|$ (si $n < 0$) des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$. Par conséquent (d'ailleurs, on le voit immédiatement): $E(f) \equiv E(\varphi)$. D'un autre côté:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi i}F(x) + \frac{x}{4\pi i}, \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2\pi i}F(x) - \frac{x}{4\pi i};$$

donc:

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} : \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2F(x) - x}{2F(x) + x} = e^{-x},$$

d'où l'on obtient, $E(f') \equiv E(\varphi')$. D'ailleurs il est facile d'établir que la fonction $\psi(x) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int_0^x F(t)dt}$ (et par conséquent $f(x)$ et $\varphi(x)$) est d'ordre 2*).

*) Je m'appuie sur la théorie de M. R. Nevanlinna (Zur Théorie der meromorphen Funktionen, Acta Mathematica, 46 (1925)). L'ordre ρ de $\psi(x)$ est égal à

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{lg\,T(r)}{lg\,r},$$

où

$$T(r) = m(r) + N(r), \quad m(r) = \frac{1}{r\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{lg} \left|\psi(re^{i\theta})\right| d, \quad N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$

$\overset{+}{lg}\,A$ désignant $lg\,A$ ou 0 suivant que $A > 1$ ou $A \leqslant 1$, $n(t)$ le nombre des pôles de $\psi(x)$ dont les modules ne dépassent par t. Dans notre cas, on vérifie immédiatement que

$$m(r) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| lg \left|\psi(re^{i\theta})\right| \right| d\theta \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^r \left|F(re^{i\theta})\right| dr d\theta = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{|z|<r} \left|\frac{F(z)}{z}\right| dx\,dy < k_1 r^2,$$

$$n(t) = 1 + 2 + \ldots + \left[\frac{t}{2\pi}\right] \sim \frac{t^2}{8\pi^2}, \quad N(r) \sim \frac{r^2}{16\pi^2} < k_2 r^2;$$

donc, $T(r) < (k_1 + k_2)\,r^2 = kr^2$, ce qui nous donne: $\rho = 2$.

En ajoutant la troisième relation $E(f'') \equiv E(\varphi'')$, *même sans exclure les fonctions à multiplicité non bornée,* on obtient les cas exceptionnels plus restreints:

(I') $f(x) = Ae^{ax}, \quad \varphi(x) = Be^{bx},$

(II') $f(x) = A\,(1 + e^{ax+b}), \quad \varphi(x) = B\,(1 + e^{-ax-b}),$

(III') $f(x) = A\,\dfrac{e^{P(x)}}{e^{P(x)} - 1}, \quad \varphi(x) = B\,\dfrac{1}{e^{P(x)} - 1}$

($P(x)$ étant un polynome quelconque).

En effet, en multipliant (5^1) par $f(x)$ et en prenant les dérivées on obtient:

$$f''(x) = \frac{f(x)}{(e^{Q(x)} - 1)^2}\,[P'^2(x) + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)\,e^{Q(x)}]\,.\;.\;.\;(7)$$

D'une manière analogue, en se servant de (2) et (4), on a:

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x)\,e^{Q(x)}}{(e^{Q(x)} - 1)^2}\,[P'^2(x)\,e^{Q(x)} + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)]\;.\;.\;.\;(8)$$

Grâce à $E(f'') = E(\varphi'')$, on obtient l'identité:

$$\frac{P'^2(x)\,e^{Q(x)} + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)}{P'^2(x) + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)\,e^{Q(x)}} = e^{R(x)}$$

(où $R(x)$ est un polynome) ou bien:

$$(P'(x)\,Q'(x) - P''(x))\,e^{Q(x)+R(x)} + (P''(x) - P'^2(x))\,e^{R(x)} + (P''(x) + P'^2(x))\,e^{Q(x)} +$$
$$+ (-P''(x) - P'(x)\,Q'(x)) = 0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

Dans ce qui suit, je me sers du résultat classique suivant: l'identité $\sum\limits_{1}^{n} A_i(x)\,e^{G_i(x)} \equiv 0$, où des $A_i(x)$ et $G_i(x)$ sont des polynomes tels que $G_i(x) - G_k(x) \not\equiv \text{const.}$ $(i \neq k)$, entraîne $A_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Faisons d'abord l'hypothèse que $Q(x)$ est une constante, et posons $e^{Q(x)} = \lambda$; d'ailleurs on peut admettre $\lambda \neq 1$. L'identité (9) se réduit à la suivante:

$$[\lambda P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x)] - [P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x)]\,e^{R(x)} \equiv 0\quad .\;.\;(10)$$

Si $R(x) \not\equiv \text{const.}$, on doit avoir séparément:

$$\lambda P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x) = 0$$

$$P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x) = 0,$$

d'où il s'ensuit $P'(x) = 0$, donc $f(x) \equiv \text{const.}$

Soit $R(x)$ égal à une constante, et posons $e^{R(x)} = \mu$; alors, on tire de (10):

$$(1 - \mu)(1 - \lambda)\;P''(x) = (\lambda - \mu)\,P'^2(x)\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

Si μ était égal á 1, on aurait $P'(x) = 0$, $P(x) = \text{const.}$ (car $\lambda \neq 1$); en écartant cette dernière hypothèse, on obtient

$$\left(\frac{1}{P'(x)}\right)' = -\frac{\lambda - \mu}{(1-\mu)(1-\lambda)},$$

où l'on doit avoir nécessairement $\lambda = \mu$, ce qui nous ramène an cas (I').

Supposons maintenant que $Q(x)$ n'est pas une constante. Alors, $R(x)$ est une constante. En effet, plaçons-nous dans le cas contraire. Si $R(x) \equiv -Q(x) + C$, on dèduira de (9)

$$P''(x) - P'^2(x) = 0, \; P''(x) + P'^2(x) = 0, \; \ldots \ldots \quad (12)$$

et ensuite $P'(x) = 0$. Si $R(x) \equiv Q(x) + C$, on trouvera d'une manière analogue

$$P'(x)Q'(x) - P''(x) = 0, \; P'(x)\,Q'(x) + P''(x) = 0, \; \ldots \ldots \quad (13)$$

d'où il s'ensuivra toujours $P'(x) = 0$ (car $Q'(x) \neq 0$). Enfin si ni $R(x) + Q(x)$ ni $R(x) - Q(x)$ ne sont des constantes, on aura simultanément (12) et (13), avec la même conséquence $P'(x) = 0$.

Posons : $e^{R(x)} = \mu$. Alors, (9) se réduit à

$$[\mu\,(P'(x)\,Q'(x) - P''(x)) + (P''(x) + P'^2(x))]\,e^{Q(x)} + [\mu\,(P''(x) - P'^2(x)) +$$
$$+ (-P''(x) - P'(x)\,Q'(x))] \equiv 0, \; \ldots \ldots \quad (14)$$

ce qui entraîne deux identités:

$$\mu\,(-P'(x)\,Q'(x) - P''(x)) + (P''(x) + P'^2(x)) = 0 \; \ldots \ldots \quad (15)$$

$$\mu\,(P''(x) - P'^2(x)) + (-P''(x) - P'(x)\,Q'(x)) = 0 \; \ldots \ldots \quad (16)$$

Ajoutons (15) et (16):

$$(\mu - 1)\,P'(x)\,(P'(x) - Q'(x)) = 0 \; \ldots \ldots \quad (17)$$

Si $\mu \neq 1$, $P'(x) \neq 0$, on a $P'(x) - Q'(x) = 0$, et (15) et (16) deviennent:

$$(1-\mu)\,P''(x) + (1+\mu)\,P'^2(x) = 0: \; \ldots \ldots \quad (18)$$

donc, $\left(\frac{1}{P'(x)}\right)' = \frac{\mu+1}{\mu-1}$. On a nécessairement $\mu = -1$, puis $\frac{1}{P'(x)} = \text{const}$, $P'(x) = Q'(x) = a$, ce qui nous donne le cas (II').

Enfin, en admettant $\mu = 1$, on écrit (15) et (16) sous la forme:

$$P'(x)\,(P'(x) + Q(x)) = 0;$$

on pose $P'(x) = -Q'(x)$ dans (5'), et l'intégration de (5') ainsi que la formule (2) nous ramènent au cas (III').

Je tiens à remarquer que dans les cas (I'—III') on a même les relations:

$$E(f^{(n)}) \equiv E(\varphi^{(n)})$$

pour toutes les valeurs de n.

Au sujet des fonctions d'ordre infini, je me bornerai à signaler ceci: quelle que soit la fonction méromorphe $f(x)$, on peut en indiquer une autre $\varphi(x)$ $(\varphi(x) \not\equiv Cf(x))$, possédant les mêmes pôles et vérifiant les conditions $E(f) \equiv E(\varphi)$, $E(f') \equiv E(\varphi')$. Telle est, par exemple:

$$\varphi(x) = f(x)\, e^{\int \frac{f'(x)}{f(x)} (e^{F(x)} - 1)\, dx}$$

où l'on choisira $F(x)$ parmi les fonctions entieres qui possèdent comme zéros tous les zéros et tous les pôles de $f(x)$.

§ 2.

Passons maintenant dans le domaine réel. Soit (D) l'axe réel et (F) la classe des fonctions réelles indéfiniment dérivables et périodiques, de période 2π. Je vais démontrer le théorème suivant.

$f(x)$ étant un polynome trigonométrique réel (de période 2π, $f(x) \not\equiv const.$) et $\varphi(x)$ une fonction quelconque de la classe (F), si, pour toutes les valeurs de la variable réelle x et pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de n, on a

$$f^{(n)}(x)\, \varphi^{(n)}(x) \geqslant 0,$$

il existe entre $f(x)$ et $\varphi(x)$ une relation linéaire:

$$\varphi(x) \equiv Cf(x) + C'.$$

La constante C' peut effectivement être différente de zéro, comme le montre l'exemple

$$f(x) = 1 + \cos x, \quad \varphi(x) = 3 + 2\cos x.$$

Cependant, si l'on sait que $f(x)\,\varphi(x) \geqslant 0$ et que $f(x)$ s'annule en changeant de signe pour une valeur de x, on obtient immédiatement $C' = 0$.

Il faut établir préalablement certaines inégalités que doivent vérifier les coefficients du développement de Fourier d'une fonction supposée non négative. Soit

$$F(x) \equiv \frac{A_0}{2} + \sum_1^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

la série étant uniformément convergente. Les coefficients A_n et B_n sont donnés par les formules

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos nx\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin nx\, dx \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Nous admettons: $F(x) \geqslant 0$. Par conséquent:

$$\left| A_n \cos nt + B_n \sin nt \right| = \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(r) \cos n(x-t)\, dx \right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, dx = A_0 \,. \quad (3)$$

Donc:

$$\sqrt{A_n^2 + B_u^2} \leqslant A_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Remarquons, maintenant, que, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux fonctions périodiques qui se laissent développer en une série trigonométrique uniformément convergente:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x), \\ \varphi(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum (\alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

leur produit $f(x)\,\varphi(x)$ est susceptible d'un développement de la même nature:

$$f(x)\,\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum (A_\nu \cos\nu x + B_\nu \sin\nu x), \quad \ldots\ldots (9)$$

où les coefficients sont donnés par les formules:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum (a_\nu\alpha_\nu + b_\nu\beta_\nu) \\ 2A_\nu &= (a_0\alpha_\nu + \alpha_0 a_\nu) + \sum_{p+q=\nu}(a_p\alpha_q - b_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu}(a_p\alpha_q + b_p\beta_q) + \sum_{p-q=-\nu}(a_p\alpha_q + b_p\beta_q) \\ 2B_\nu &= (a_0\beta_\nu + \alpha_0 b_\nu) + \sum_{p+q=\nu}(b_p\alpha_q + a_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu}(b_p\alpha_q - a_p\beta_q) - \sum_{p-q=-\nu}(b_p\alpha_q - a_p\beta_q), \end{aligned}\right\} \quad . (10)$$

les sommations étant toujours étendues à toutes les valeurs entières et positives des indices p et q qui vérifient les égalités placées sons les signes $\sum$.

Supposons ainsi qu'il est exigé dans l'énoncé de notre théorème que $f(x)$ est un polynome trigonométrique dont le degré soit désigné par $N(\geqslant 1)$ de manière que, dans la formule (8), on pourra poser:

$$a_{N+1} = b_{N+1} = a_{N+2} = b_{N+2} = \ldots = 0 \quad \ldots\ldots (11)$$

par contre, on a:

$$a_N^2 + b_N^2 > 0 \quad \ldots\ldots (11')$$

L'inégalité $f^{(n)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$ est satisfaite pour une infinité d'indices n. Admettons, pour fixer les idées, qu'il est possible d'en extraire une suite d'indices croissant indéfiniment et qui sont tous multiples de 4. Pour ces valeurs de n, nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum \nu^n (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x \\ \varphi^{(n)}(x) &= \sum \nu^n (\alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12)$$

En vertu des formules (9), on a

$$f^{(n)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) = \frac{A_0^{(n)}}{2} + \sum (A_\nu^{(n)} \cos\nu x + B_\nu^{(n)} \sin\nu x), \quad \ldots (13)$$

où

$$\left.\begin{aligned} A_0^{(n)} &= \sum \nu^{2n} (a_\nu\,\alpha_\nu + b_\nu\,\beta_\nu) \\ 2A_\nu^{(n)} &= \sum_{p+q=\nu} p^n q^n (a_p\alpha_q - b_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu} p^n q^n (a_p\alpha_q + b_p\beta_q) + \sum_{p-q=-\nu} p^n q^n (a_p\alpha_q + b_p\beta_q) \\ 2B_\nu^{(n)} &= \sum_{p+q=\nu} p^n q^n (b_p\alpha_q + a_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu} p^n q^n (b_p\alpha_q - a_p\beta_q) - \sum_{p-q=-\nu} p^n q^n (b_p\alpha_q - a_p\beta_q) \end{aligned}\right\} \quad . (14)$$

Nous allons voir que $\varphi(x)$ est aussi un polynome trigonométrique de degré N.

En tenant compte de (11), il est facile de déterminer l'ordre de croissance et les parties principales de $A_\nu^{(n)}$ et $B_\nu^{(n)}$, lorsque $n \to \infty$:

$$\left.\begin{array}{l} A_0^{(n)} = (a_N\alpha_N + b_N\beta_N)\, N^{2n} + o\,(N^{2n}) \\ 2A_\nu^{(n)} = (a_N\alpha_{N+\nu} + b_N\beta_{N+\nu})\,[N(N+\nu)]^n + o\,([N(N+\nu)]^n) \\ 2A_\nu^{(n)} = (-\,b_N\alpha_{N+\nu} + a_N\beta_{N+\nu})\,[N(N+\nu)]^n + o\,([N(N+\nu])^n \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (16)$$

Soit p un nombre entier positif quelconque.

L'inégalité $f^{(n)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$ ayant lieu, on doit avoir, grâce à (7):

$$\sqrt{A_p^{(n)2} + B_p^{(n)2}} \leqslant A_0^{(n)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

or, en s'appuyant sur (16), on s'aperçoit que le second membre de cette inégalité est d'ordre $O(N^{2n})$, tandisque la partie principale du premier membre est égale à

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a_N\alpha_{N+p} + b_N\beta_{N+p})^2 + (-\,b_N\alpha_{N+p} + a_N\beta_{N+p})^2}\;[N(N+p)]^n.$$

Par conséquent, il est nécessaire que l'on ait:

$$\left.\begin{array}{r} a_N\alpha_{N+p} + b_N\beta_{N+p} = 0 \\ -\,b_N\alpha_{N+p} + a_N\beta_{N+p} = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Le déterminant $a_N^2 + b_N^2$ ne s'annulant pas (11'), ou en conclut: $\alpha_{N+p} = \beta_{N+p} = 0$. Donc, $\varphi(x)$ est un polynome trigonométrique de degré N.

Si $f(x)$ possède $2N$ zéros distincts (qui sont alors forcément simples) dans la période $(0, 2\pi)$, on voit immédiatement que

$$\varphi(x) \equiv Cf(x).$$

Dans le cas général, la dérivée n'ième $f^{(n)}(x)$, pour des valeurs de n suffisamment grandes, aura nécessairement $2N$ zéros distinets; il s'en suivra que

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv Cf^{(n)}(x);$$

on remonte à

$$\varphi(x) \equiv Cf(x) + C',$$

par des intégrations répetées (en tenant compte de la périodicité).

Je ferai une application de la proposition qui précède en faisant voir qu'une fonction $\varphi(x)$, donnée sur tont l'axe réel est définie par les conditions suivantes:

(1) $\varphi(x)$ est indéfiniment dérivable;
(2) $E(\varphi^{(n)}) \equiv E(\sin^{(n)}x)$ pour $n = 0, 1. 2 \ldots .$
(3) $\varphi'(0) = 1.$

En effet, d'abord, en vertu d'un théorème de M. S. Bernstein *) la fonction $\varphi(x)$ est analytique pour toutes les valeurs réelles de x; ensuite, on voit que

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \qquad \varphi\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \varphi\left(-\frac{\pi}{2} + x\right),$$

donc $\varphi(x)$ est périodique de période 2π ; on s'appuie alors, sur la proposition précédente, en posant $f(x) = sinx$, et l'on en conclut $\varphi(x) \equiv Csinx$; enfin, de (3), on tire $C = 1$.

*) Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, p. 196 — 7, Paris, *G. — V.* 1926,

О наименьшем уклонении от нуля в данном интервале $(-1, +1)$ монотонного полинома, при заданном значении второй производной в какой-либо точке интервала

В. Ф. Бржечка

Требуется найти монотонный полином, неубывающий, степени m, наименее уклоняющийся от нуля в интервале $(-1, +1)$, если вторая производная этого полинома в какой-либо точке $x = \eta$ интервала $(-1, +1)$ имеет значение равное b^2.

Эта задача аналогична задаче академика С. Н. Бернштейна*).

Очевидно, что все полиномы $P(x) + C$ имеют одно и тоже полное изменение при каком угодно C; определяя произвольную постоянную из условий, что полином с наименьшим полным изменением при $x = -1$ обращается в ноль, имеем

$$P(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ полином степени $2n$ или $2n+1$, неотрицателен для $-1 \leq x \leq 1$ и $\varphi'(\eta) = b^2$.

Перед нами такая задача: найти minimum интеграла

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx$$

при условии $\varphi'(\eta) = b^2$.

Займемся определением вида полинома $\varphi(x)$; очевидно, что можем положить

$$\varphi(x) = u^2(x)q(x),$$

где в $u(x)$ включены корни, лежащие в интервале $-1 \leq x \leq 1$, а $q(x)$ может иметь простые корни равные -1 и $+1$ и корни вне интервала $(-1, +1)$; очевидно, что $u(\eta) \neq 0$, ибо в этом случае не выполнялось бы условие $\varphi'(\eta) = b^2$.

*) См. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle professées á la Sorbonne par Serge Bernstein, стр. 47—50.

Если идет речь о полиноме степени $2n+1$, то $q(x)$ должно быть четной степени; предположим, что $q(x)$, напр., 4-й степени и построим функцию

$$\Psi(x) = u^2(x)q(x) - \alpha u^2(x)(1-x^2)(x-\eta)^2,$$

где $\alpha > 0$ и так подобрано, чтобы $\Psi(x)$ было неотрицательно в интервале $(-1, +1)$; но $\Psi'(\eta) = \varphi'(\eta) = b^2$ и в тоже время

$$\int_{-1}^{1} \Psi(x)dx < \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx .$$

Поэтому для $\varphi(x)$ возможны такие виды:

1) $u^2(x)(x+1)(a+x)$; 2) $u^2(x)(x+1)(a-x)$;
3) $u^2(x)(1-x)(a+x)$; 4) $u^2(x)(1-x)(a-x)$;
5) $u^2(x)(1-x^2)$; 6) $u^2(x)$,

где $a > 1$ и степень розыскиваемого полинома $P(x)$ нечетная, т. е. $2n+1$; если же степень $P(x)$ четная $2n+2$, то для $\varphi(x)$ возможны такие виды:

1) $u^2(x)(1+x)$; 2) $u^2(x)(1-x)$;
3) $u^2(x)(a+x)$; 4) $u^2(x)(a-x)$;
5) $u^2(x)(1-x^2)(a+x)$; 6) $u^2(x)(1-x^2)(a-x)$.

Воспользуемся методом С. Н. Бернштейна*) и покажем, что эти виды для $\varphi(x)$, которых мы получили шесть, можно свести к двум видам.

Если наш полином

$$P(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(x+1)(a+x)dx$$

есть наименее отклоняющийся от нуля в интервале $(-1, +1)$, то взяв полином

$$Q(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1+x)dx ,$$

и полагая $Q''(\eta) > 0$, имеем

$$P''(\eta) \,.\, Q(1) > P(1) \,.\, Q''(\eta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Построим полином

$$R(x) = \frac{P(x) - (a-1)Q(x)}{P''(\eta) - (a-1)Q''(\eta)} P''(\eta)$$

имеем

$$R'(x) = \frac{u^2(x)\,(1+x)^2}{2(1+\eta)\,[u(\eta)u'(\eta)(1+\eta) + u^2(\eta)]} P''(\eta) .$$

Очевидно, что $R'(x)$ неотрицательно в интервале $(-1, +1)$, $R''(\eta) = P''(\eta)$ и вследствие (1) имеем

$$R(1) < P(1).$$

*) См. Сообщения Харьковского Математического Общества. Четвертая серия, том I, 1927 год. Sur les polynomes multiplement monotones, par Serge Bernstein, стр. 5.

Если же $Q''(\eta) < 0$, то, так как $Q(1) > 0$, имеем

$$R(1) = \frac{P(1) - (a-1)\,Q(1)}{P''(\eta) - (a-1)Q''(\eta)}\,P''(\eta) < \frac{P(1)\,.\,P''(\eta) - (a-1)P(1)\,.\,Q''(\eta)}{P''(\eta) - (a-1)\,Q''(\eta)} = P(1)\,.$$

При этом доказательстве мы исключаем тот случай, когда вторая производная задана в точке $\eta = -1$, потому что при $\eta = -1$ знаменатель в выражении для $R'(x)$ обращается в ноль; в этом случае поступим так: построим полином

$$\Psi(x) = u^2(x)(1+x)(a+x) - \alpha u^2(x)(x+1)^2$$

где $\alpha > 0$ и так подобрано, чтобы $\Psi(x)$ было неотрицательно в интервале $(-1, +1)$; но

$$\Psi'(-1) = \varphi'(-1) = b^2 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-1}^{1} \Psi(x)\,dx < \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx\,.$$

Итак если $\varphi(x)$ будет вида $u^2(x)\,(1+x)\,(a+x)$ где $a \geqslant 1$, то отклонение розыскиваемого полинома при всяком $a \neq 1$ допускало бы уменьшение, а этого согласно условию задачи быть не должно, поэтому вид $u^2\,(x)\,(1+x)\,(a+x)$ приводится к виду $u^2(x)$.

Если мы аналогичные рассуждения применим к видам 2), 3), 4), то найдем для $\varphi(x)$ следующие два вида

$$u^2(x) \quad \text{и} \quad u^2(x)\,(1-x^2);$$

при чем вид $u^2(x)\,(1-x^2)$ невозможен, если вторая производная задана в точке $\eta = 1$, ибо невыполнялось бы поставленное условие $\varphi'(1) = b^2$

Повторяя эти рассуждения для случая степени $2n+2$, найдем, для $\varphi(x)$ следующие два вида

$$u^2(x)\,(1+x) \quad \text{и} \quad u^2(x)\,(1-x),$$

второй вид невозможен, если вторая производная задана в точке $\eta = 1$.

Найдем minimum интеграла

$$L = \int\limits_{-1}^{1} u^2(x)\,dx$$

при условии $2u(\eta)\,u'(\eta) = b^2$.

Разлагая $u(x)$ по полиномам Лежандра, и пользуясь известными свойствами этих полиномов, имеем

$$u(x) = \sum_0^n a_i\,P_i(x)\,;\ L = \int\limits_{-1}^{1} u^2(x)\,dx = \sum_0^n \frac{2a_i^2}{2i+1}\,,$$

ищем extremum

$$\sum_0^n \frac{2a_i^2}{2i+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

при условии

$$\sum_0^n a_i\,P_i(\eta)\,.\,\sum_0^n a_i\,P_i'(\eta) = \frac{b^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Пользуясь известными методами дифференциального исчисления находим

$$\frac{4a_i}{2i+1} = k\,P_i(\eta)\,q + k\,P_i'(\eta)p; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots n$$

где

$$p = \sum_0^n a_i P_i(\eta) \quad \text{и} \quad q = \sum_0^n a_i P_i'(\eta); \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

умножая обе части (4) на a_i, суммируя по i от 0 до n и принимая во внимание (3) найдем

$$L = \frac{b^2 k}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

умножая обе части (4) на $P_i(\eta)$, освобождаясь от знаменателя, суммируя по i от 0 до n и принимая во внимание (5), найдем

$$4p = kq\sum_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1) + kp\sum_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1); \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

умножая обе части (4) на $P_i'(\eta)$, освобождаясь от знаменателя, суммируя по i от 0 до n и принимая во внимание (5) найдем

$$4q = kq\sum_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) + kp\sum_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1); \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

так как $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то из (7) и (8) имеем

$$\begin{vmatrix} k\sum\limits_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1), & k\sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'\,(2i+1) - 4 \\ k\sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) - 4, & k\sum P_i'^2(\eta)\,(2i+1) \end{vmatrix} = 0; \quad \ldots \quad (9)$$

Решая последнее уравнение, найдем два значения k, одно положительное, другое отрицательное; мы должны взять положительный корень

$$k = \frac{4}{\sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) + \sqrt{\sum\limits_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1)\,.\,\sum\limits_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1)}}$$

и для L на основании (6) имеем

$$L = \frac{2\,.\,b^2}{\sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) + \sqrt{\sum\limits_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1)\,.\,\sum\limits_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1)}}\,; \quad (10)$$

так как и полином Лежандра *) и его производная **) достигают наибольшего значения при $\eta = 1$, то очевидно, что отклонение будет

---

*) См. E. T. Whittaker A course of modern Analysis изд. 1927, стр. 303.

**) Что производная достигает наибольшего значения при $x = 1$, это следует из формулы Christoffel'я см. Encyclopédie des sciences mathématiques II_5, fasc 2, стр. 163.

наименьшим, если 2-я производная будет задана в точке $\eta = 1$; имеем

$$P_i(1) = 1); \quad P_i'(1) = \frac{i\,(i+1)}{2}\ ; \ ^{*})$$

вычисляя суммы, входящие в знаменатель выражения (10), найдем

$$\sum_0^n P_i(1)\,P_i'(1)\,(2i+1) = \frac{n\,(n+1)^2\,(n+2)}{4}; \quad \sum_0^n P_i^2(1)\,(2i+1) = n+1)^2;$$

$$\sum_0^n P_i'^2(1)\,(2i+4) = \frac{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2}{12};$$

подставляя последние значения в (10), для L получим

$$L = 8b^2\,\frac{\sqrt{12}-3}{n\,(n+1)^2\,(n+2)}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (11)$$

найдем теперь асимптотическое выражение для L, имея в виду внутренние точки, т. е. для $-1 < \eta < 1$.

С этой целью воспользуемся такой формулой

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)\,P_k^{(i)}(x)\,P_k^{(j)}(x) =$$

$$= \frac{(n+i+1)\,(n+j+1)\,P_n^{(i)}(x)\,P_n^{(j)}(x) + (1-x^2)\,P_n^{(i+1)}(x)\,P_n^{(j+1)}(x)}{i+j+1}; \ ^{**}) \quad (12)$$

и формулой такой

$$P_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\varphi}}\cdot \mathrm{Sin}\left[(n+{}^1/_2)\varphi + \frac{\pi}{4}\right]; \ ^{***}) \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

где $P_n(x)$, $P_k(x)$ полиномы Лежандра и $x = \cos\varphi$. Имеем

$$\sum_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) = \frac{(n+1)(n+2)\,P_n(\eta)\,P_n'(\eta) + (1-\eta^2)\,P_n'(\eta)\,P_n''(\eta)}{2}.$$

Пользуясь формулой (13), найдем, что

$$\sum_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1)$$

будет порядка n; при помощи тех же формул (12) и (13) найдем

$$\sum_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1) \simeq \frac{2n}{\pi\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$\sum_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1) \simeq \frac{2n^3}{3\pi(1-\eta^2)^{3/2}}.$$

---

*) См. P'olya и Szegö Aufgaben aus der Analysis II стр. 292 и 297.

**) См. статья Я. Л. Геронимуса. О квадратичном отклонении и т. д. в этом же журнале.

***) См. Yahnke — F. Emde Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, стр. 81.

Подставляя последние значения в выражение для L, найдем

$$L \sim \frac{\pi\sqrt{3}\sin^2\varphi}{n^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

где $\cos\varphi = \eta$.

Формула (11) для больших n имеет вид

$$L \sim 8 \cdot \frac{\sqrt{12}-3}{n^4}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Найдем теперь minimum интеграла

$$L = \int^1 u^2(x)\,(1-x^2)dx$$

при условии

$$2u(\eta)u'(\eta)\,(1-\eta^2) - 2\eta u^2(\eta) = b^2;$$

разлагая $u(x)$ по полиномам Якоби

$$u(x) = a_0 P_0^{(1,1)}(x) + a_1 P_1^{(1,1)}(x) + \ldots + a_{n-1} P_{n-1}^{(1,1)}(x)$$

и пользуясь известными свойствами этих полиномов *), имеем

$$\int_{-1}^{1} u^2(x)(1-x^2)dx = \sum_0^{n-1} \frac{8a_i^2}{2i+3} \cdot \frac{i+1}{i+2};$$

ищем extremum

$$L = \sum_0^{n-1} \frac{8a_i^2}{2i+3} \cdot \frac{i+1}{i+2}$$

при условии

$$\sum_0^{n-1} a_i P_i^{(1,1)}(\eta) \cdot \left[\sum_0^{n-1} a_i P_i^{\prime(1,1)}(\eta)\,(1-\eta^2) - \eta \sum_0^{n-1} a_i P_i^{(1,1)}(\eta)\right] = \frac{b^2}{2}; \quad \ldots \quad (16)$$

имеем

$$\frac{16a_i}{2i+3} \cdot \frac{i+1}{i+2} = kqP_i^{(1,1)}(\eta) + kp\left[(1-\eta^2)P_i^{\prime(1,1)}(\eta) - \eta P_i^{(1,1)}(\eta)\right]; \quad \ldots \quad (17)$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

где

$$p = \sum_0^{n-1} a_i P_i^{(1,1)}(\eta); \quad q = \sum_0^{n-1} \left\{(1-\eta^2)a_i P_i^{\prime(1,1)}(\eta) - \eta a_i P_i^{(1,1)}(\eta)\right\}; \quad \ldots \quad (18)$$

умножая (17) на a_i, суммируя по i от 0 до $n-1$ и принимая во внимание (16), найдем

$$L = \frac{kb^2}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

умножая (17) на $P_i^{(1,1)}(\eta)$, освобождаясь от знаменателя, деля обе части на $i+1$, суммируя по i от 0 до $n-1$ и принимая во внимание (18), получим

$$16p = kq \sum_0^{n-1} P_i^{2(1,1)}(\eta)\,\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1} +$$

$$+ kp \sum_0^{n-1} \left[(1-\eta^2)\,P_i^{\prime(1,1)}(\eta)\,P_i^{(1,1)}(\eta) - \eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right] \cdot \frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}; \quad \ldots \quad (20)$$

---

*) См. Pólya - Szegö Aufgaben aus der Analysis. II, стр. 93, 292 и 297.

умножая (17) на

$$\left[(1-\eta^2)\,P_i^{'(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{(1,1)}(\eta)\right]\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}$$

суммируя получим

$$16q=kq\sum_0^{n-1}\left[(1-\eta^2)\,P_i^{(1,1)}(\eta)\,P_i^{'(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right]\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}+$$

$$+kp\sum_0^{n-1}\left[(1-\eta^2)\,P_i^{'(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{(1,1)}(\eta)\right]^2\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\,;\quad\ldots(21)$$

так как $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то из уравнений (20) и (21) следует, что

$$\begin{vmatrix} kA_1-16, & kA_0 \\ kA_2, & kA_1-16 \end{vmatrix}=0\;\ldots\ldots\ldots(22)$$

где

$$A_0=\sum_0^{n-1}P_i^{2(1,1)}(\eta)\,\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\,;$$

$$A_1=\sum_0^{n-1}\left\{\left[(1-\eta^2)\,P_i^{'(1,1)}(\eta)\,P_i^{(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right]\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\right\};$$

$$A_2=\sum_0^{n-1}\left\{\left[(1-\eta^2)\,P_i^{'(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{(1,1)}(\eta)\right]^2\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\right\};$$

Решив последнее уравнение, мы найдем два значения для k; взяв положительное значение и принимая во внимание (19), для L получим

$$L=\frac{8b^2}{\sum\limits_0^{n-1}\left[P_i^{(1,1)}(\eta)\,P_i^{'(1,1)}(\eta)\,(1-\eta^2)-\eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right]\dfrac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}+}$$

$$\frac{8b^2}{+\sqrt{\sum\limits_0^{n-1}P_i^{2(1,1)}(\eta)\cdot\dfrac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\cdot\sum\limits_0^{n-1}\left[P_i^{'(1,1)}(\eta)(1-\eta^2)-\eta P_i^{(1,1)}(\eta)\right]^2\dfrac{(2i+3)(i+2)}{i+1}}}\,;\,.(23)$$

Исследуем теперь при каком значении η L будет наименьшим; для удобства исследования перейдем к полиномам Лежандра. Между полиномами Якоби и полиномами Лежандра можно установить следующее соотношение

$$P_i^{(1,1)}(\eta)=\frac{2}{i+2}\,P_{i+1}^{'}(\eta)\,;\;{}^{*)}\quad\ldots\ldots\ldots(24)$$

где $P_{i+1}(\eta)$ есть полином Лежандра.

Рассмотрим выражение

$$A_i=P_i(\eta)P_i^{''}(\eta)(1-\eta^2)-\eta P_i^{'2}\,;$$

*) См. Encyclopedie des sciences mathematiques II_5, fesc. 2, стр. 195 и 198.

имеем

$$A_i = P_i'(\eta)P_i''(\eta)(1-\eta^2) - \eta P_i'^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\left[P_i'^2(\eta)(1-\eta^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\left[P_i'^2(\cos\varphi) \underset{\eta=\cos\varphi}{.} \sin^2\varphi\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\left[\left(\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}\right]^2 = -\frac{\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{d^2P_i(\cos\varphi)}{d\varphi^2}}{\sin\varphi};$$

но $P_i(\eta)$ можно представить в таком виде

$$\underset{\eta=\cos\varphi}{P_i(\eta)} = \sum c_k \cos(i-2_k)\varphi\ ;\ ^{*)}$$

где $c_k > 0$ и сумирование производится по k от 0 до $\frac{i}{2}$ если i — четное и от 0 до $\frac{i-1}{2}$, если i — нечетное. Имеем

$$P_i' = -\sum c_k(i-2_k)\sin(i-2_k)\varphi;\quad P_i'' = -\sum(i-2_k)^2 c_k \cos(i-2_k)\varphi\ ;$$

для A_i получим

$$A_i = -\frac{\sum c_k(i-2_k)\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi}\cdot\sum(i-2_k)^2c_k\cos(i-2_k)\varphi\ ;$$

рассмотрим выражение

$$\frac{\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi}$$

можно показать, что

$$\left|\frac{\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi}\right| \leqq i-2_k\ ^{**)}$$

Знак равенства имеет место только для $\eta = 1, -1$; полагая $\varphi = \pi$ т. е. $\eta = -1$ получим наибольшее значевие для A_i, так как при $\eta = \pi$ выражения

$$\frac{\sum c_k(i-2_k)\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad \sum(i-2_k)^2c_k\cos(i-2_k)\varphi$$

достигают наибольших значений по абсолютной величине и будут противоположных знаков; следовательно и выражение

$$\sum_0^{n-1}\left[P_i^{(1,1)}(\eta)P_i'^{(1,1)}(\eta)(1-\eta^2) - \eta P^{2(1,1)}(\eta)\right]\cdot\frac{(2_i+3)(i+2)}{i+1}$$

достигает наибольшего значения при $\eta = -1$;

рассмотрим выражение

$$B_i = P_i''(\eta)(1-\eta^2) - \eta P_i'(\eta)$$

---

*) См. Iahnke — Emde Funktionentafeln mit Formeln und kurven стр. 80.

**) См. Polya u Szegö, II, стр. 76, задача 7.

имеем

$$B_i = \frac{d}{d\eta}\Big[P_i'(\eta)(1-\eta^2)\Big] + \eta P_i'(\eta) = \frac{d}{d\eta}\Big\{P_i'(\cos\varphi).\sin^2\varphi\Big\}_{\eta=\cos\varphi} +$$

$$+\cos\varphi . P_i'(\cos\varphi) = -\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}.\sin\varphi\right\} + \cos\varphi . P_i'(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi}.\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}.\sin\varphi\right\} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{d^2P_i(\cos\varphi)}{d\varphi^2};$$

последнее выражение достигает наибольшего значения по абсолютной величине при $\eta = 1, -1$, следовательно знаменатель выражения (23) достигает наибольшего значения при $\eta = -1$, а само L при $\eta = -1$ будет наименьшим. Заменяя полиномы Якоби полиномами Лежандра, в выражении (23), подставляя $\eta = -1$ и так как $P_i'^2(-1) = P_i'^2(1)$ то имеем

$$L = \frac{b^2}{\sum\limits_0^{n-1} P_i'^2(1).\frac{(2i+3)}{(i+1)(i+2)}}$$

но

$$P_{i+1}'^2(1) = \frac{(i+1)^2(i+2)^2}{4},$$

а поэтому имеем:

$$L = \frac{4b^2}{\sum\limits^{n-1}(i+1)(i+2)(2i+3)}$$

вычисляя сумму, стоящую в знаменателе, для L найдем:

$$L = \frac{8b^2}{n(n+1)^2(n+2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

сравнивая последнее выражение с выражением (11) видим, что отклонение будет наименшим тогда, когда вторая производная имеет данное значение b^2 в точке $\eta = 1$ и что наименьшее отклонение будет,

$$L_{2m+1} = 8b^2\frac{\sqrt{12}-3}{n(n+1)^2(n+2)};$$

$$L \sim 8b^2\frac{\sqrt{12}-3}{n^4}.$$

Если искать асимптотическое выражение для L из формулы (23), имея в виду точки $-1 \angle \eta \angle 1$, то получим прежний результат,

$$L \sim \frac{\pi b^2\sqrt{3}\sin^2\varphi}{n^2}. \; *)$$

Если повторить те же вычисления и те же рассуждения для полинома степени $2_n + 2$, то мы найдем, что отклонение будет наи-

---

*) Ср. с результатом Академика С. Н. Бернштейна см. Leçons sur les propriétés extrémales l. s. c. см. стр. 50 и 46.

меньшим тогда, когда вторая производная имеет данное значение b^2 в точке $\eta = 1$, при виде производной,

$$\varphi(x) = u^2(x)(1+x)$$

и это наименьшее отклонение будет

$$L_{2n+2} = \frac{24b^2}{(n+1)(n+2)\{3(n^2+3n+1)+\sqrt{3(2n^2+6n+1)(2n^2+6n+3)}\}}$$

для больших значений n имеем

$$L \sim 8b^2 \frac{\sqrt{12}-3}{n^4}.$$

Асимптотическая формула для L, имея в виду внутренние точки, будет, как при виде $u^2(x)(1+x)$ так и при виде $u^2(x)(1-x)$, прежняя т. е.

$$L \sim \frac{\pi b^2 \sqrt{3}\sin^2\varphi}{n^2}$$

RÉSUMÉ

L'auteur se propose de trouver la solution du problème suivant:

Déterminer le minimum de l'écart de zéro dans l'intervalle $(-1, +1)$ d'un polynome non décroissant de degré $m = 2n+1$, $2n+2$, si sa dérivée seconde reçoit dans un point $x = \eta$ de cet intervalle la valeur b^2.

L'auteur trouve que l'écart L sera minimum quand le point $x = \eta$ se trouve a l'une des extrémités du segment $(-1, +1)$, et pour l'écart L il donne

$$L_{2n+1} = 8b^2 \frac{\sqrt{12}-3}{n(n+1)^2(n+2)}$$

et

$$L_{2n+2} = \frac{24b^2}{(n+1)(n+2)[3(n^2+3n+1)+\sqrt{3(2n^2+6n+1)(2n^2+6n+3)}]};$$

pour les points $-1 \angle \eta \angle 1$ il trouve, pour L, la formule asymptotique

$$L \sim \frac{\pi b^2 \sqrt{3}\sin^2\varphi}{n^2}.$$

Sur quelques polynomes aux propriétés extrémales

Par V. I. Smirnoff.

§ 1.

Le but de cette note est d'indiquer une methode nouvelle pour résoudre quelques problèmes d'extrémum concernant les polynomes. Le moment intrinsèque de cette méthode est présenté par la manière de poser le problème, le polynome en question devant jouir de certaines propriétés extremales sur une circonférence du plan de la variable complexe. Remarquons, que nous supposons dans ce qui suit, que les coefficients des polynomes sont des nombres complexes.

On sait, que les polynomes trigonométriques jouissent de la propriété suivante *):

Si pour les valeurs réeles de ϑ, un polynome trigonometrique impair:

$$S(\vartheta) = \mu_1 \sin\vartheta + \mu_2 \sin 2\vartheta + \ldots + \mu_n \sin n\vartheta$$

satistait à l'inégalité

$$|S(\vartheta)| \leqq 1, \text{ on a } \left|\frac{S(\vartheta)}{\sin\vartheta}\right| \leqq n,$$

l'égalité n'ayant lieu d'ailleurs, que dans le cas où $S(\vartheta) = \pm \varepsilon \sin n\vartheta$; $|\varepsilon| = 1$. De lá suit immédiatement, comme il est bien counu, le théorème de M. S. N. Bernstein **): Si pour toutes les valeurs réeles de ϑ, un polynome trigonométrique $g(\vartheta)$ d'ordre n satistait à le condition: $|g(\vartheta)| \leqq 1$, on a $|g'(\vartheta)| \leqq n$, l'égalité n'ayant lieu que pour les polynomes de la forme: $a\cos n\vartheta + b\sin n\vartheta$. Nous appliquerons notre méthode avant tout pour étendre la propriété indiquée de polynomes trigonométriques impairs à tous les polynomes se réduisant à zéro pour $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$.

Enonçons le probléme extrémal (A):

Parmi tous les polynomes $\psi_{2n}(z)$ du dégré $2n$ satisfaisant aux conditions:

$$(1) \ldots \psi_{2n}(\pm 1) = 0; \qquad (2) \ldots |\psi_{2n}(z)| \leqq 1 \text{ pour } (z) = 1$$

trouver celui qui admet le plus grand maximum du module $\dfrac{\psi_{2n}(z)}{z^2-1}$ sur la circonférence C $(|z| = 1)$.

---

*) G. Polga und G. Szegö. Aufgaben und Leursätze aus der Analysis. A notre regret il nous à été impossible de lire l'article de M. Riesz, inséré dans les Iahresber. der Dentsch. Math. Verein., Bd. 35, S. 354 (1914), ce numéro du journal manquant á nos bibliothèques.

**) S. Bernstein: „Leçons sur les propriétes extremales etc."; Paris 1926, p.p. 38—44.

Introduisons les racines de l'équation $z^{2n}+1=0$:

$$\varepsilon_s = e^{\theta_s i}\left(\theta_s = \frac{2s+1}{2n}\pi;\ s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 2n-1\right).$$

En prenant les valeurs $z=\pm 1$ et $\varepsilon_s (s=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1)$ pour les points de l'interpolation, en vertu de la condition (1), la formule de Lagrange pour le polynome $\psi_{2n}(z)$ sera

$$\frac{\psi_{2n}(z)}{z^2-1} = \frac{1}{2n}\sum_{s=1}^{2n-1}\psi_{2n}(\varepsilon_s)\,\frac{\varepsilon_s(\varepsilon_s-\varepsilon_0)}{(1-\varepsilon_s^2)(z-\varepsilon_s)}\,\frac{z^{2n}+1}{z-\varepsilon_0}$$

Il est aisé de voir, que si z se trouve á l'intérieur de l'arc de la circonférence C, limité par les points ε_{n-1} et ε_n, les arguments des facteurs de $\psi_{2n}(\varepsilon_s)$ sont les mêmes, et, par conséquent, en vertu de la condition (2), nous recevrons la valeur maximale du module de la somme, en posant $\psi_{2n}(\varepsilon_s)=\varepsilon$, avec $|\varepsilon|=1$. Cela nous donne evidement le polynome

(3) . . . . $W_{2n}(z) = \varepsilon\,\dfrac{z^{2n}-1}{2}\quad (|\varepsilon|=1)$,

satisfaisant à la condition (2) sur toute la circonférence C. Pour ce polynomele maximum du module $\dfrac{\psi^{2n}(z)}{z^2-1}$ est atteint sur l'arc mentionné au point $z=-1$, et ce maximum est égal à $\dfrac{n}{2}$. En remplaçant z par $(-z)$ on voit aisément, que sur l'arc, limité par les points ε_{2n-1} et ε_0, le maximum mentionnè est égal aussi á $\dfrac{n}{2}$ et n'est atteint que par le polynome (3) pour $z=1$: Si z ne se trouve pas à l'intérieur des arcs $(\varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon_{2n-1},\ \varepsilon_0)$, on a $|z^2-1|\geqslant 2\sin\dfrac{\pi}{2n}$, et la condition (2) donne $\left|\dfrac{\psi_{2n}(z)}{z^2-1}\right| < \dfrac{n}{2}$.

On voit de là que *le polynome* (3) *présente la solution unique du probléme* (*A*), *et le maximum de* $\left|\dfrac{W_{2n}(z)}{z^2-1}\right|$, *étant égal à* $\dfrac{n}{2}$, *n'est atteint que pour* $z=\pm 1$. En posant $z=e^{\vartheta i}$ et en remarquant, que tout polynome trigonométrique de l'ordre n est de la forme $\psi_{2n}(e^{\vartheta i})\,.\,e^{-n\vartheta i}$ et que $|e^{2\vartheta i}-1| = 2|\sin\vartheta|$, nous pouvons énoncer le résultat obtenu de la manière suivante: *si un polynome trigonométrique* $g^n(\vartheta)$ *de l'ordre* n *se réduit à zéro pour* $\vartheta=0$ *et* $\vartheta=\pi$ *et satisfait à la condition:* $|g_n(\vartheta)|\leqq 1$ *pour toute valeur réele de* ϑ, *on a*

(4) . . . . $\left|\dfrac{g_n(\vartheta)}{\sin\vartheta}\right| \leqslant n,$

l'égalité n'ayant lieu que pour le polynome de la forme $g_n^*(\vartheta)=\varepsilon\sin n\vartheta$ $(|\varepsilon|=1)$ *et* $\vartheta=0$ *ou* π.

En introduisant au lieu de z une variable nouvelle x conformément à la formule:

(5) . . . . $x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2};\quad z=x\pm\sqrt{x^2-1},$

nous faisons correspondre le segment double $-1 \leqq x \leqslant 1$ à la circonference C, et la fonction $\frac{\psi_{2n}(z)}{z^n}$ sera équivalente à la fonction de la forme:

$$(6) \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad f(x) = P_n(x) + \sqrt{x^2-1}\, Q_{n-1}(x)$$

où $P_n(x)$ et $Q_{n-1}(x)$ sont des polynomes du dégré n et $n-1$, et où on attribue à la raçine $\sqrt{x^2-1}$ les deux signes. Donc, le résultat obtenu peut être enoncé ainsi: *si une fonction $f(x)$ de la forme* (6) *satsfait aux conditions*:

$$P_n(\pm 1) = 0; \; |f(x)| \leqslant 1 \text{ pour } -1 \leqq x \leqq +1$$

on a

$$\left| \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}} \right| \leqq n$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où

$$P_n(x) \equiv 0; \; Q_{n-1}(x) = U_{n-1}(x) = \varepsilon \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} (x = \cos\theta \text{ et } |\varepsilon| = 1)$$

et pour $x = \pm 1$.

En particulier, *si*

$$\sqrt{1-x^2}\, |Q_{n-1}(x)| \leqq 1; \; (-1 \leqq x \leqq 1),$$

on a:

$$|Q_{n-1}(x)| \leqq n$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $Q_{n-1}(x) = \varepsilon\, U_{n-1}(x)$ *et* $x = \pm 1$ *).

En se servant de la solution du problème (A) où reçoit aisement la solution du problème suivant: (B) *parmi tous les polynomes* $\psi_n(z)$ *du dégré* n, *satisfaisant aux conditions*:

$$(7) \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \psi_n(+1) = 0 \text{ et } |\psi_n(z)| \leqq 1 \text{ pour } |z| = 1$$

trouver celui, qui admet le plus grand maximum du module $\frac{\psi_n(z)}{z-1}$ *pour* $|z| = 1$.

En remplaçant z par z^2 et en se servant de la résolution du problème (A), on voit aisement, que *le polynome*

$$w_n(z) = \varepsilon \frac{z^n - 1}{2} \quad (|\varepsilon| = 1)$$

fournit le solution unique du problème (B), *d'ailleurs le maximum de* $\left|\frac{w_n(x)}{z-1}\right|$ *étant égal à* $\frac{n}{2}$, *n'est atteint que pour* $z = 1$.

Considérons un polynome arbitraire $\varphi_n(z) = \sum_{s=0}^{n} a_s z^{n-s}$ satisfaisant à la condition $|\varphi_n(z)| \leqslant 1$ pour $|z| = 1$.

Le polynome:

$$\psi_n(z) = \frac{z^n \varphi_n\left(\frac{1}{z} e^{\theta i}\right) - \varphi_n(z e^{\theta i})}{2}$$

*) G. Polya und G. Szegö. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis; Bd. II; s. 90.

satisfait à deux conditions (7), et, en vertu de la résolution du problème (B), on a:

$$\left|\frac{\psi_n(z)}{z-1}\right| \leqq \frac{n}{2} \text{ pour } z=1,$$

c'est-à-dire:

$$\left|\sum_{s=0}^{n}(n-2s)\,a_{n-s}e^{s\theta i}\right| \leqq n$$

ou

(8) . . . . $|n\varphi_n(z)-2z\varphi_n'(z)| \leqq n$ pour $|z|=1$.

Cettr inégalité peut être ecrite sous forme:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi_n(z)}{z^{\frac{n}{2}}}\right] \leqq \frac{n}{2} \text{ pour } |z|=1,$$

ce qui donne pour n pair le théorème ci-dessus mentionné de M. S. N. Bernstein. L'inégalite (8) avec les conditions $|\varphi_n(z)| \leqq 1$ pour $|z|=1$ donne également la solution du problème de A. A. Markoff pour la circonférence C: précisément

$$|\varphi_n'(z)| \leqq n.$$

Il est aisé d'enoncer et de résoudre le problème (A) dans le cas d'une circonférence C_R ($|z|=R$), le rayon R étant arbitraire. En passant sur le plan de le variable

$$x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

nous récevons la résolution du problème, pour le cas d'un ellipse E_R aux foyers ± 1 sur l'axe réel et avec le grand axe $\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)$, ce dernier problème étant analogue au précédent pour le segment $(-1, +1.)$

Les résultats des problèmes (A) et (B) donnent immédiatement la résolution du problème de A. A. Markoff pour le segment $(-1, +1)$. On doit seulement utiliser ce fait que en vertu de (5) le polynome $p_n(x)$ est équivalent à l'expression $\psi_{2n}(z).z^{-n}$, où $\psi_{2n}(z)$ est le polynome réciproque.

§ 2.

Indiquons encore une application de la méthode d'une variable complexe à la resolution du probléme extrémal. Enonçons le problème suivant: (C) *parmi tous les polynomes du dégré n*

$$\alpha_n(z)=Az^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_{n-1}z+B$$

à coefficients donnés A et B trouver celui, dont le maximum du module sur le circonférence C_R est le plus petit. L'existence d'une solution du problème est évidente. Soit $\beta_n(z)$ le polynome, qui fournit cette solution et soit $g_n=\max|\beta_n(r)|$ sur C_R. Considérons un polynome transformé:

(9) . . . . $\beta_{n,k}(z)=\dfrac{\beta_n(z)+\beta_n(e^{k\frac{2\pi}{n}i}z)}{2}$,

k étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, n-1$.

Il est clair, que le polynome $\beta_{n,k}(z)$ du dégré n jouit des propriétés suivantes: 1) les coefficients extremes du polynome $\beta_{n,k}(z)$ sont A et B; 2) sur la circonférence C_R on a: $|\beta_{n,k}(z)| \leq g_n$, l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où

$$\beta_n(z) = \beta_n(e^{k\frac{2\pi i}{n}} z) \quad \text{et} \quad |\beta_n(z)| = |\beta_n(e^{k\frac{2\pi i}{n}} z)| = g_n.$$

Il suit de là immediatement, que le module du polynome $\beta_n(z)$ atteint le maximum en points de la forme:

$$(10) \; . \; . \; . \; . \; . \quad z_0; \quad z_0 e^{\frac{2\pi}{n}i}; \quad z_0 e^{\frac{4\pi}{n}i}; \ldots \quad z_0 e^{(n-1)\frac{2\pi}{n}i}; \quad (|z_0| = R)$$

et que les valeurs du polynome $\beta_n(z)$ dans tous ces points sont les mêmes. En effet, si un tel systéme de points n' existait pas, en faisant plusieures fois sur le polynome $\beta_n(z)$ le trausformation (9), le nombre k étant choisi couvenablement, nous aurions pu recevoir un polynome du dégré n aux coefficients extrémes A et B, dont le maximum du module sur C_R serait plus petit que g_n, ce qui est en contradiction avec la condition, que le polynome $\beta_n(2)$ fournit la résolution du problème (C).

Mais si la valeur du polynome $\beta_n(z)$ aux points (10) est ia même, ce polynome ne contient que le terme en z^n et le terme constant; donc,

$$(11) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \beta_n(z) = Az^n + B,$$

et *ce polynome donne la solution unique du problème* (C).

Appliquons la résolution du problème (C) à un polynome du dégré pair. Si on fait le changement des variables (5), la fonction $a_{2n}(z)z^{-n}$ sur C_R est équivalente à une fonction de la forme (6) sur l'ellipse E_R, la fixation des coefficients extrèmes du polynome $a_{2n}(z)$ étant equivalente à la fixation des coefficients des polynomes $P_n(x)$ et $Q_{n-1}(x)$ d'aprés les puissances les plus elevées de x. Si $R = 1$, l'ellipse E_R se transforme en segment double $(-1, +1)$. La résolution definitive du probléme (C) nous conduit au résultat suivant sur le plan x: *Parmi toutes les fonctions de la forme* (6) *aux coefficients donnés*: a_0 *et* b_0 *des polynomes* $P_n(x)$ *et* $Q_{n-1}(x)$ *des puissances les plus élevées de* x, *la fonction*:

$$\frac{a_0+b_0}{2^n} z^n + \frac{a_0-b_0}{2^n} z^{-n} =$$

$$= \frac{a_0}{2^n}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right] + \frac{b_0}{2^n}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x^2-\sqrt{x^2-1})^n\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2^{n-1}} T_n(x) + \frac{b_0}{2^{n-1}} \sqrt{x^2-1}\,.\, U_{n-1}(x)$$

où

$$T_n(x) = \cos n\theta; \quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{T_n'(x)}{n}; \quad (x = \cos\theta)$$

admet le maximum du module le plus petit sur le segment double $(-1, +1)$ *ou sur l'ellipse* E_R.

Pour $b_0 = 0$ on reçoit la resolution bien connue du probléme de Tchebycheff concernant le polynome de la forme $x^n + p, x^{n-1} + \ldots + p_n$ à l'écart minimal de zéro sur le segment $(-1, +1)$ ou sur l'ellipse E_R. En posant $a_0 = 0$, la résolution du problème sera fournie par la fonction de la forme

$$\frac{b_0}{2^{n-1}} \sqrt{x^2-1} \ \ U_{n-1}(x).$$

On peut, au contraire, fixer le maximum du module de la fonction et chercher la valeur maximale du coefficient de la puissance de x la plus élevée. De nos considérations concérnant le cas où $a_0 = 0$, on reçoit immédiatement par exemple le résultat suivant: *pour toutes les fonctions de la forme*:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \sqrt{x^2-1}\,.\ \ Q_{n-1}(x)\,,$$

telles que: $|f(x)| \leqq 1$ *sur le segment* $(-1, +1)$, *le coefficient de* $Q_{n-1}(x)$ *de le puissance la plus élevée satisfait à la condition* $|b_0| \leqslant 2^{n-1}$ *l'égalité n'ayant lieu que pour* $\varepsilon \sqrt{x^2-1} \ \ U_{n-1}(x)\,(|\varepsilon| = 1)$ *).

Remarquons que dans tous les problèmes concérnant le segment il faut prendre le signe double d'aprés $\sqrt{x^2-1}$, tandis que dans les problèmes concernant l'ellipse E_R on prend la détermination fixée de $\sqrt{x^2-1}$ sur cet ellipse.

En appliquant de nouveau la résolution du problème (C) au polynome du degré pair et en posant $z = e^{\vartheta i}$ dans l'expression $\alpha_{2n}(z)\,.\ z^{-n}$, nous recevons le resultat suivant: *parmi tous les polynomes trigonométriques d'ordre n*

$$\lambda_0 + \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \cos s\vartheta + \mu_s \sin s\vartheta)$$

à coefficients donnés λ_n et μ_n, *le polynome*

$$\lambda_n \cos n\vartheta + \mu_n \sin n\vartheta$$

est celui, dont l'écart de zéro est minimal.

Si nous fixons dans ce probléme un seul coefficient λ_n, nous devons fixer dans le problème (C) seulement la somme $A + B = \lambda_n$. Il est aisé de voir que dans ce cas la solution du problème sera aussi $\alpha_{2n} A z^{2n} + B$, où $A + B = \lambda_n$. D'ailleurs, le maximum du $|Az^{2n} + B|$ pour $|z| = 1$ est evidemment égal à $|A| + |B|$. Donc il nous reste à choisir les nombres complexes A et B d'une telle façon, que $A + B = \lambda_n$ et que la somme $|A| + |B|$ soit la plus petite possible. Il est evident que la solution est fournit par $A = B = \frac{\lambda_n}{2}$, et par suite le polynome trigonométrique cherché à l'écart minimal de zéro pour le coefficient λ_n fixé est présenté par $\lambda_n \cos n\vartheta$. D'une manière analogue, en fixant μ_n, nous recevons $\mu_n \sin n\vartheta$.

---

*) Pour un cas particulier de ce résultat voir G. Polya und G. Szegö op. cit. Bd. II; S. 90; № 77.

**) I. Privaloff. Sur les sommes trigonométriques à l'écart minimal de zéro (en russe); Math. Sbornik. t. XXX: 3 p.p. 474—478 (1916).

Sur un théoreme de M. Gontcharoff

Serge Bernstein

Dans une Note recemment parue (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 27 Decembre 1997) M. Gontcharoff a établi entre autres le théoreme suivant:

La fonction

$$\varphi(x) = \sin x$$

est entièrement déterminée sur tout l'axe reel par les propriétés suivantes: 1) elle est infiniment dérivable, 2) toutes ses dérivées successives $\varphi^{(n)}(x)$ *admettent pour racines* $h\pi$ *et* $\left(h + \frac{1}{2}\right)\pi$ *suivant que n est pair ou impair, quels que soient les nombres entiers h et n'en admettent pas d'autres,* 3) $\varphi'(0) = 1$.

Certaines des propriétés indiquées étant des consequences des autres, je veux donner à cette proposition importante une forme telle qu'aucune des conditions ne soit superflue.

Théorème. *La fonction*

$$\varphi(x) = \sin x$$

est entiérement déterminée sur tout l'axe reel par les propriétés suivantes: 1) $\varphi(x)$ *est infiniment dérivable, 2) chaque point de l'axe reel peut être entouré d'un segment suffisamment petit pour qu'il existe une infinité de dérivées* $\varphi^{(n)}(x)$ *qui ne s'y annulent pas, 3) sur le segment* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *les dérivées paires* $\varphi^{(2n)}(x)$ *ne s'annullent qu'au point* 0 *et les dérivées impaires ne s'annullent qu'au point* $\frac{\pi}{2}$, 4) $\varphi'(0) = 1$.

Occupons nous d'abord uniquement du segment $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et définissons provisoirement une fonction $f(x)$ infiniment dérivable de periode 2π, telle que

$$f(0) = f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x) = f(\pi - x).$$

Cela entraine que la fonction $f(x)$ aura ses dérivées continues de tous les ordres; elle sera, par conséquent, développable en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{p=1,3,} A_p \sin px$$

infiniment dérivable.

D'autre part, on a, pour $0 < x < \pi$,

$$\sin x \pm \frac{\sin hx}{h} > 0,$$

quel que soit $h > 1$.

On voit donc que

$$(-1)^{\pi} \int_0^{\pi} f^{(2k)}(x) \left(\sin x \pm \frac{\sin hx}{h} \right) dx = \frac{\pi}{2} \left[A_1 \pm h^{2k-1} A_h \right]$$

pour toute valeur de h doit garder le même signe. Il en resulte que $A_h = 0$ pour toute valeur de $h > 1$, puisque h^{2k-1} croit indéfiniment avec k. Par conséquent,

$$f(x) = A_1 \sin x = \sin x,$$

en tenant compte de la condition 4).

Ainsi, les conditions 1), 3) et 4) définissent complètement $\varphi(x) = \sin x$ sur le segment $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Or, la condition 2) entraine que $\varphi(x)$ est quasi analytique P sur tout l'axe reel *) et, puisque le prolongement **) quasi analytique P se confond avec le prolongement analytique dans le domaine reel, lorsque celui-ci est possible, nous en concluons que $\varphi(x) = \sin x$ sur tout l'axe reel.

Corollaire. *Si une fonction quasi analytique P infiniment dérivable jouit de la propriété qu'il existe un point a, où toutes ses dérivées paires s'annulent, et un point b, où toutes ses dérivées impaires s'annulent, elle est périodique de période $4(b - a)$.*

On démontre d'une façon analogue que dans l'énoncé du théorème donné plus haut, la condition 3) peut être remplacée par la suivante relative seulement aux dérivées *de même parité*: que l'on ait, par exemple,

$$\varphi(0) = \varphi^{(2k)}(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = \varphi^{(2k)}(\pi) = 0,$$

ces dérivées n'ayant pas d'autres racines dans l'intervalle $(0, \pi)$.

---

*) Page 197 du livre „Leçons sur les propriétés extrémales etc.“

**) Loc. cit. p.p. 165—170.

Связь между Гауссовой кривизной и линиями кривизны 2-го рода системы интегральных кривых уравнений Пфаффа

Я. П. Бланк

Проф. Д. М. Синцов в статье: „О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx+Qdy+Rdz=0$“ (*) устанавливает два различных выражения для кривизны системы. Первое представляет произведение мер кривйзны главных направлений и называется полной кривизной системы, второе представляет отношение б. малых элементов системы и ее сферического изображения и называется Гауссовой кривизной. Точно так же два определения линий кривизны дают начало двум системам линий кривизны. Кривые 1-ой системы огибаются направлениями экстремальных радиусов кривизны, а линии кривизны 2-й системы обладают тем свойством, что вдоль них нормали к плоскостям системы пересекаются.

Цель настоящей заметки установить связь между линиями кривизны 2-го определения и Гауссовой кривизны системы.

Пусть ξ, η, ζ координаты точки пересечения нормалей к плоскостям системы в двух б. близких точках линии кривизны 2-го определения:

$$\xi = x + tP,\ \eta = y + tQ,\ \zeta = z + tR \quad \dots\dots (1)$$

Вдоль линии кривизны;

$$\begin{aligned} d\xi &= dx + Pdt + tdP = \lambda P \\ d\eta &= dy + Qdt + tdQ = \lambda Q \\ d\zeta &= dz + Rdt + tdR = \lambda R \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

отсюда получается условие

$$\begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ dz & R & dR \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

которое вместе с исходным ур.

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

и определяет линии кривизны в форме приведенной в вышеуказан статье.

(*) Записки н.-иссл. кафедр. Украины, в. 3.

Если уравнения (2) написать в такой форме:

$$
\begin{aligned}
&(1+tP_x)\,dx+tP_y\,dy+tP_z\,dz+(dt-\lambda)\,P=0\\
&tQ_x\,dx+(1+tQ_y)\,dy+tQ_z\,dz+(dt-\lambda)\,Q=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2'')\\
&tR_x\,dx+tR_y\,dy+(1+tR_z)\,dz+(dt-\lambda)\,R=0
\end{aligned}
$$

и присоединить уравнение (4), то для определения t получаем квадратное ур—ние:

$$
\begin{vmatrix}
1+tP_x & tP_y & tP_z & P\\
tQ_x & 1+tQ_y & tQ_z & Q\\
tR_x & tR_y & 1+tR_z & R\\
P & Q & R & O
\end{vmatrix}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)
$$

Ур—ние (5) можно написать в виде:

$$at^2+bt+c=0,$$

где

$$
a=\begin{vmatrix}
P_x & P_y & P_z & P\\
Q_x & Q_y & Q_z & Q\\
R_x & R_y & R_z & R\\
P & Q & R & O
\end{vmatrix}=\triangle \qquad c=-(P^2+Q^2+R)^2
$$

$$
b=\begin{vmatrix}
P_x & O & P\\
Q_x & -R & Q\\
R_x & Q & R
\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}
Q_y & O & Q\\
R_y & -P & R\\
P_y & R & P
\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}
R_z & O & R\\
P_z & -Q & P\\
Q_z & P & Q
\end{vmatrix}
$$

Положив

$$r_i=t_i\sqrt{P^2+Q^2+R^2} \quad (i=1,2),$$

имеем:

$$\frac{1}{r_1 r_2}=-\frac{\triangle}{(P^2+Q^2+R^2)^2},$$

где правая часть представляет выражение для Гауссовой кривизны системы, и

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right),$$

где ϱ_1 и ϱ_2—значения экстремальных радиусов кривизны.

Гауссова кривизна и линии кривизны $2^{\text{го}}$ рода

Д. М. Синцова

Я. П. Бланку пришла счастливая мысль вычислить произведение радиусов кривизны, соответствующих направлениям линий кривизны 2-го рода. Оказалось, что обратная величина совпадает с тем, что я позволил себе назвать Гауссовой кривизной в отличие от полной кривизны — произведения главных мер кривизны. Вычисление радиусов кривизны в направлении линии кривизны 2-го рода можно провести еще так:

Возьмем для упрощения $R = -1$, т. е. рассмотрим интегральные кривые уравнения

$$dz = Pdx + Qdy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и для сокращения означим

$$\begin{matrix} (P'_x + PP'_z) = (\mathrm{I}) & (Q'_x + PQ'_z) = (\mathrm{III}) \\ (P'_y + QP'_z) = (\mathrm{II}) & (Q'_y + QQ'_z) = (\mathrm{IV}) \end{matrix} \quad \ldots\ldots (2)$$

Тогда мера кривизны

$$\frac{1}{r} = \frac{dPdx + dQdy}{ds^2\sqrt{1 + P^2 + Q^2}} = \frac{(\mathrm{I})dx^2 + (\mathrm{II} + \mathrm{III})dxdy + (\mathrm{IV})dy^2}{ds^2\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}, \ldots (3)$$

а уравнение линий кривизны 2-го рода

$$\begin{vmatrix} dP & P & dx \\ dQ & Q & dy \\ 0 & -1 & Pdx + Qdy \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

или

$$dP\Big(QPdx + (1 + Q^2)dy\Big) = dQ\Big(dx(1 + P^2) + QPdy\Big)$$

и таким образом можно положить

$$\begin{aligned} dP &= \lambda\Big[dx(1 + P^2) + PQdy\Big] \\ dQ &= \lambda\Big[QPdx + (1 + Q^2)dy\Big] \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Отсюда

$$dPdx + dQdy = \lambda \,.\, ds^2$$

т. е.

$$\lambda = \frac{dPdx + dQdy}{ds^2} = \frac{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Таким образом задача свелась на разыскание λ, — оно есть корень уравнения 2-го порядка, получаемого из (5) исключением dx и dy:

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{I}) - \lambda(1 + p^2) & (\mathrm{II}) - \lambda PQ \\ (\mathrm{III}) - \lambda PQ & (\mathrm{IV}) - \lambda(1 + Q^2) \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

или

$$\lambda^2(1+P^2+Q^2) - \lambda[(1+Q^2)(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}+\mathrm{III})PQ + (1+P^2)(\mathrm{IV})] + (\mathrm{I})(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III}) = 0$$

Т. обр. произведение корней

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(\mathrm{I})(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III})}{(1 + P^2 + Q^2)}, \text{ а } \frac{1}{r_1' r_2'} = \frac{(\mathrm{I})(\mathrm{IV})(- (\mathrm{II})(\mathrm{III})}{(1 + P^2 + Q^2)^2}$$

В этом выражении числитель можно преобразовать:

$$(\mathrm{I})(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III}) = \begin{vmatrix} P_x' + PP_z', & P_y' + QP_z' \\ Q_x' + PQ_z', & Q_y' + QQ_z' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} P_x' & P_y' & P_z' & P \\ Q_x' & Q_y' & Q_z' & Q \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ P & Q & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и таким образом

$$(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III}) = - \varDelta \; (\mathrm{I})$$

$$\frac{1}{r_1' r_2'} = \frac{-\varDelta}{(1 + P^2 + Q^2)^2}$$

Заменяя P и Q через

$$\frac{P}{R}, \; \frac{Q}{R}$$

получим:

$$\frac{1}{r_1' r_2'} = \frac{-\varDelta}{(P^2 + Q^2 + R^2)^2}.$$

Сумма корней того же уравнения дает

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} = \frac{(1 + Q^2)(\mathrm{I}) - (\mathrm{II} + \mathrm{III})PQ + (1 + P^2)(\mathrm{IV})}{(1 + P^2 + Q^2)^{3/2}}$$

т. е. равняется сумме мер кривизны главных направлений:

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Но если возьмем направление перпендикулярное к r'_1, и соотв. радиус r''_1, то

$$\frac{1}{r'_1}+\frac{1}{r''_1}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r'_1}+\frac{1}{r'_2}$$

т. е. $r''_1=r'_2$ и след. это 2-е направление — направление 2-й линии кривизны 2-го рода симметрично перпендикуляру к 1-й линии в отношении оси индикатрисы и т. о. касательные к линиям кривизны 1-го и 2-го рода имеют общую биссектрису.

Т. о. линии кривизны 2-го рода также связаны с „Гауссовой кривизной“, как линии кривизны 1-го рода с полной кривизной.

Этюды по теории плоских кривых*)

Д. М. Синцов

IV. Мальтийский крест

1. Этой кривой посвящена статья W. Gaedecke в Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vereinigung Bd. 26. 1917 n° 1—4, S. 46—49. Он отмечает в ней, что G. Loria, (Spezielle algebraische u transcendente Kurven) этой кривой 6-го порядка не упоминает. Точечное ее уравнение довольно сложно:

$$(1)(x^2+y^2)^3 = a^1x^4 + 20a^2x^2y^2 - 8a^2y^4 - 16a^4y^2$$

и впервые без ошибок получено W. Gaedecke **).

2. Мне хотелось бы указать здесь на тангенциальное уравнение кривой, которое получается в очень простом виде из параметрического уравнения (1)

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi(1+\sin^2\varphi) \\ y &= -a\sin\varphi\,.\cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Это последнее легко получается из определения кривой, как отрицательной подэры Doppelleilinie (частный случай Münger'ова овала при $d=0$), —которой полярное уравнение

$$r = a.\,\mathrm{Cos}^2\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Отсюда касательная Мальтийского креста

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = a\cos^2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Дифференцируя это уравнение (4) по φ и исключая φ, мы и получим, решая в отношени x и y уравнения (2).

3. Мы можем однако воспользоваться уравнением (4) для получения уравнения Мальтийского креста в тангенциальных координатах. Для этого отожествляем (4) с уравнением прямой

$$ux + vy + w = 0$$

---

*) Первые две заметки этого заглавия помещены в Ученых Записках Научно-исслед. кафедр Украины, отд. мат., в. 2, 3—в Известиях Х. И. Н. О. в. 2.

**) Он отмечаэт ст. Pomey — N. Ann. (3) V. 1886 p. 20 — тем же методом, но с ошибками, Pelissier (Ib. (2) XII. 1873 p 459). Она рассматривается также M. d'Ocagne'ем в его книжке Coordonnées parallèles et axiales 1885 n° 50 p. 47—51, где приводится и чертеж. Надо впрочем отметить, что эго кривая—частый случай кривых, параллельных астроиде, которым у G. Loria посвящена в главе 5 отд. VII n° 263.

и т. о. имеем

$$\frac{u}{\cos\varphi}=\frac{v}{\sin\varphi}=\frac{w}{-u\cos^2\varphi}.$$

Возвышая равные отношения в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}=\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=\frac{u^2+v^2}{1}=\frac{w^2}{a^2\cos^4\varphi}$$

и таким образом

$$(u^2+v^2)w^2=a^2u^4 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

искомое уравнение. Мальтийский крест есть кривая 4-го класса.

Так как в силу (2) она уникурсальна, то род ее равен 0, и мы можем вычислить теперь все Плюккеровы числа кривой.

4. Уравнением (5) можно при его простоте воспользоваться для составления точечного ее уравнения. Не останавливаясь однако на этом, укажем, что составив взаимную поляру (5), имеем

$$z^2(x^2+y^2)=a^2x^2$$

что при $z=1$ будет:

$$y^2=a^2x^4-x^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

это одна из кривых

$$y^2=R_4(x),$$

где $R_4(x)$ — многочлен 4-й степени, — имеющий в данном случае средние корни равные, т. о. кривая (6) имеет в начале координат уединенную точку, а след., (5) — двойственную особенность — уединенную касательную — безконечно-удаленную прямую. Получение особенных элементов удобнее для (6).

5. Не останавливаясь на выводе приводимых W. Gaedecke свойств кривой (14): *М. Крест = эвольвента астроиды* и в то же время *одна из параллельных ей кривых,* остановим наше внимание на связи Мальтийского креста еще с одной кривой. *Ортоптическая кривая М. креста есть корноида.*

Для вывода этой связи применим метод приводимый Hilton'ом Plane algebraic curves, Oxford 1920. Ортоптическая кривая есть геометрическое место вершины прямого угла, стороны которого касаются данной кривой, — т. е. геометрическое место точек (x,y), две проведенные из которых к кривой касательные перпендикулярны. Т. о. 2 корня уравнения, получаемого исключением w из (5) и

$$ux+vy+w=0$$

т. е. уравнення

$$(u^2+v^2)(ux+vy)^2-a^2u^4=0 \quad (7)$$

определяющего угловые коэффициенты $-\frac{v}{u}$ касательных к кривой (5), проходящих через точку (x,y), должны давать в произведении -1.

Условие этого для уравнения 4-ой степени

$$a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=0$$

есть

$$(a_0a_3+a_1a_4)(a_1+a_3)+(a_0+a_2+a_4)(a_0-a_1)^2=0$$

В нашем случае

$$a_0=x^2-a^2,\quad a_1=2xy=a_3,\quad a_2=x^2+y^2,\quad a_4=y^2$$

и таким образом искомое уравнение ортоптической кривой Мальтийского креста напишется

$$8x^2y^2(x^2+y^2-a^2)+[2(x^2+y^2)-a^2](x^2-y^2-a^2)^2=0$$

Если соберем высшие члены этого уравнения, то получим:

$$2(x^2+y^2)^3-a^2(5x^4+6x^2y^2-3y^4)+4a^4x^2-a^6=0;$$

разделяя на 2 и означая $\frac{a}{\sqrt{2}}=r$, имеем

$$(x^2+y^2)^3-r^2(5x^4+6x^2y^2-3y^4)+8r^4x^2-4r^6=0$$

уравнение, совпадающее с данным Gaedecke уравнением корноиды при повороте на 90°, т. е при замене x через y и y через x.

V. Значение радиуса кривизны в обыковенной точке кривой.

Chr. Wiener в своем Lehrbuch d. darstellenden Geometrie B. I Abs. V, Abt. VI n° 246 S. 206-7, разбирая возможные случаи величины радиуса кривизны и следовательно взаимного расположения кривой и ее эволюты, устанавливает для обыкновенной точки кривой пять возможностей:

1°. Центр кривизны — обыкновенная точка на эволюте, радиус кривизны конечен и отличен от нуля. Примеры легко привести: обыкновенные точки циклоиды, кроме вершин, точки эллипса кроме вершин и т. д.

2° Центр кривизны на эволюте точка возврата, и острие обращено *от* кривой,—пример: вершина циклоиды, дэвшина на малой оси эллипса и т. д.

3° Центр кривизны на эволюте — точка возврата на бесконечности, в этом случае точка кривой, не будучи точечной особенностью, является особенностью тангенциальной—т. наз. Flachpunkt (точка уплощения). Пример: $y=x^4$ в начале координат.

4° Центр кривизны — точка возврата на эволюте (как и в сл. 2), но последняя обращена острием к кривой (пример—вершина параболы или гиперболы, концы большой оси эллипса.

Наконец случай 5° обыковевная точка на кривой совпадает с точкою возврата эволюты, радиус кривизны обращается в 0.

Этот последний случай мне представляется *невозможным.* Здесь дело не идет конечно, о случаях, подобных концам малой оси эллипса, когда $a = b\sqrt{2}$, ибо, хотя точка возврата эволюты и лежит на эллипсе, но в вершине $(0, -b)$ лежит центр кривизны для точки $(0, +b)$ и обратно. Дело идет о совпадении центра кривизны с точкою, которой он соответствует.

Как аргумент возможности такого случая, приходит на мысль замечание, что для этого стоит только для любой кривой построить ее эвольвенту, и из всех их взять именно ту, которая проходит через соответствующий центр кривизны. Можно однако показать, что это не так, и что если одна из эвольвент проходит через точку возврата кривой, то эта точка будет особенной и на этой эвольвенте.

В самом деле, уравнение инволюты некоторой кривой, заданной зненением в параметрической форме, при чем параметром является дуга кривой:

$$\xi = \varphi(\sigma), \quad \eta = \psi(\sigma) \text{ *)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

выразится, как известно, при том же параметре

$$x = \xi + (c - \sigma)\xi', \quad y = \eta + (c - \sigma)\eta' \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

здесь $c - \sigma = n$ есть расстояние между точками (x,y) и (ξ,η), т. е. радиус кривизны инволюты. Произвольной постоянной c можно придать значение 0, и тогда в точке соответствующей $\sigma = 0$, начале счета дуг на данной кривой, радиус кривизны инволюты будет равен нулю, и следовательно получаем как раз нужный нам случай, — когда n обращается в нуль, и следовательно точка кривой и соответствующая ей точка инволюты совпадают. Не трудно однако убедиться, что при этом точка возврата (1) будет особеиною и на инволюте.

Действительно, в предположении $c = 0$ уравнения (2) принимают вид

$$x = \xi - \sigma\xi', \quad y = \eta - \sigma\eta' \quad \ldots\ldots\ldots (2^1)$$

Отсюда

$$x' = -\sigma\xi'', \quad y' = -\sigma\eta'' \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

поскольку мы предположили, что точка (ξ,η) — точка возврата на эволюте, т. е. (1), при $\sigma = 0$

$$\xi' = 0 = \eta', \quad \xi'\eta'' - \eta'\xi'' = 0,$$

если ξ и η разлагаются в строку по степеням σ, и низший член относительно σ в ξ степени $1 + \alpha$, а в η степени $1 + \beta$. то $\alpha > 0, \beta > 0$ и в силу последнего

$$\alpha + \beta - 1 > 0.$$

Поэтому порядок низшего члена в x', y' по (3) относительно σ есть $\alpha > 0$, соответств. $\beta > 0$ а в $x'y'' - y'x''$ — порядок $\alpha + \beta - 1 > 0$

---

*) См. напр. Синцов, Геометрические приложения дифф. исчисления 1908 г.

Т. обр. при $\sigma = 0$ имеем

$$x' = 0, y' = 0, x'y'' - y'x'' = 0,$$

т. е. точка (x,y) есть особенная на инволюте.

Пример. Тороида (кривая паралельная эллипсу) может быть получена, как огибающая кругов данного радиуса, центры которых лежат на этом эллипсе (G. Loria Spez. Kurven I изд. с. 646):

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - k^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Дифференцируя $(a) - \lambda(b)$ по α и по β найдем

$$x - \alpha = \frac{\lambda\alpha}{a^2}, \quad y - \beta = \frac{\lambda\beta}{b^2}$$

Откуда

$$\alpha = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \beta = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}$$

Вставляя в (a) и (b) и исключая λ, означим для краткости

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2 = A,$$

$$a^2y^2 + b^2k^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2 = B$$

$$a^2b^2k^2 = C$$

Элиминанта по Catalan'у и Cayley примет вид

$$A^2B^2 + 4CA^3 - 27C^2 + 18CAB + 4B^3 = 0$$

Это уравнение и у G. Loria и G. Teixeira приводится с опечатками (у L. $4CA$ вм. $4CA^3$, у T. кроме того $4B^2$ вм. $4B^3$).

Тороида таким образом — кривая 8 порядка. Как параллельная эллипсу, она имеет общую с ним эволюту. Она состоит из двух ветвей, замкнутых и заключенных одна внутри другой. Внешняя при возрастании k стремится к кругу, внутренняя же при $k < \frac{b^2}{a}$ похожа на эллипс, при $k = \frac{b^2}{a}$ также похожа на эллипс, но имеет на большой оси две точки, которые однако по внешнему виду не отличить и которые выделяются лишь более сильным изломом. Так описательно отличает G. Loria точки притупления (Spitzpunkt) — представляющие точки, в которых тороида проходит через соотв. центр кривизны: это не обыкновенные ее точки, а тройные с тремя совпавшими касательными.

В анализе R. Lilienthal'я Differentialgeometrie B. I, изложение которого в этом вопросе примыкает к анализу L'Hospital'я, в основу положена классификация Staudt'а, и по отношению к таким точкам говорится только, что касательная в них *обыкновенная*. Мы приходим таким образом к выводу: ***в обыкновенной точке кривой радиус кривизны равен нулю не бывает.***

По отношению к тороиде интересно отметить. что при $k = b$ при раскрытии скобок свободный член в уравнении оказывается равным нулю, члены с первыми степенями x и y не входят, при x^2 и xy коэффициенты также 0, а при y^2:

$$-4b^2(a^2-b^2)^4$$

Таким образом в точке (0,0) уравнение касательной

$$-4b^2(a^2-b^2)^4y^2=0$$

Это точка самокасания, и тороида, — если взять ряд кривых при различных значениях k, — дает хороший пример перехода от пары узлов (*resp.* пары двойных касательных) к точке самокасания.

В своем курсе Дифференциальной Геометрии 1908—Зап. Харьк. Универ.—отд. 1 отт. с. 50-я доказывал, что в точке возврата радиус кривизны обращается в 0. Это доказательство состоит в указании, что в выражении y'':

$$F'''_{x^3}+3F^{14}_{x^2y}\,y'+3\,F''_{xy^2}y'^2+F'''_{y^3}y'^3+3\left(F''_{xy}+F''_{y^2}y'\right)y''=0\ ^{*)}$$

Множитель при y'' обращается для точки возврата в 0; оно предполагает, что многими

$$F'''_{x^3}+3\,F'''_{x^2y}\,y'+3\,F''_{xy^2}\,y'^2+F'''_{y^3}y'^3$$

не обращается при этом в 0. Это имеет место для обыкновеной точки возврата (1 рода, — капр. $y^2=x^3$, но уже для точки возврата 2-го рода это выражение может обратить и b0 и значение радиуса принимая вид $\frac{0}{0}$ может быть и конечным и безконечно—большим.

Возьмем, напр., кривую,

$$(y-x^2)^2-x^5=0,$$

имеющую в начале координат точку возврата 2-го рода.

Представив ее в параметической форме $x=t^2, y=t^4+Et^5$, где $E=\pm1$, найдем что радиус кривизны

$$R=,\frac{[4+t^4(4+5Et)^2]^{3/2}}{16+30^2t}$$

и след.. при $t-0$ радиус кривизны для той и другой ветви $=\frac{1}{2}$ напротив кривая

$$y^2-x^5=0$$

в точке $(0^2,0)$ имеет то, что называется Rückkehrflachpunkt. Здесь $F''_{xy}-F''_{xx}F''_{yy}=40\,x^3$ при $x=0$, равно 0, двойной корень $y'=0$, но так как $F'_{x_8 4}=-60x^2$, $F'''_{x^2y}=F'''_{xy^2}=F'''_{y^2}=0$, т. е. все произвольные 3 порядка обращается в 0, и для y'' значения получается неопределенность %.

*) При этом, разумеется, подразумевается, что не все производные 2-го порядка обращаются в 0.

Приведя к параметрической форме уравнение: $x = t^2, y = t^5$ получим, что при $t = 0$, $R = \infty$.

Относительно точек перегиба Chr. Wiener там же n° 243 (s. 255) утверждает, что в точке перегиба радиус может быть безконечностью или нулем. Последний случай также мне представляется подлежащим ограничению: он возможен тогда, когда мы имеем переход кривой с одной стороны касательной на другую (Wendetangente), но точка будет особенной, хотя и имеющей только одну вещественную касательную. Последнего рода примеры могут быть построены напр.,

$$y = xe^{x^{2/3}}$$

или даже более простые, — которыеподойдут по соотв. случай классификации R. Lilienthal'я, но не будут обыкновенными точками кривой. И доказательство этого может быть проведено сведением при помощи двойственного преобразования этого вопроса на разрешенный выше.

Современное положение вопроса об обосновании евклидовой геометрии.

И. Чернушенко в Харькове.

§ 1. Введение.

После появления в 1899 г. имевшей столь блестящий успех работы Д. Гильберта Grundlagen der Geometrie, на очередь был поставлен вопрос о построении системы аксиом геометрии, которые были бы абсолютны независимы. Эту цель имели в виду, насколько мне известно только следующие авторы:

1. O. Veblen. A sytem of axioms for geometry. Trans. Am. Math. Soc. vol 5, 1904; pp. 343—384.

2. В. Ф. Каган. Основания геометрии. Опыт обоснования евклидовой геометрии. Одесса, 1905 г., сн. XV + 793. Также в записках Новоросийского университета т.т, 97 и 101, 1904-1905 г.г.

3. R. L. Moore. Sets of metrical hypotheses for geometry. Trans. Am. Math. Soc. v. 9, 1908; pp. 487—512.

E. V. Huntington. A set of postulates for abstract geometry exposed in terms of the simple relation of inclusion. Mathem. Ann. Bd 73, 1912-1913 s. 522-559.

Я оставляю в стороне работы К. Валена.[1]), А. Швейцера[2]), Х. Мюнца[3]) и М. Гейгера[4]), так как эти авторы не намеревались дать доказательства абсолютной независимости своих аксиом. К. Вален имел в виду только порядковую независимость своих аксиом. А. Швейцер не дает доказательства независимости всех аксиом системы $^3R_3$ (сн. 389-390), а независимости аксиом $^1K_1$, $^2K_2$, $^3K_3$, и аксиом, введенных в главе VI (т. XXXV), совершенно не рассматривает. Х. Мюнц рассматривает независимость или, как он говорит, неприводимость только первых пяти аксиом, совершенно не касаясь вводимых далее аксиом VI-IX. М. Гейгер, установив только для линейных образов евклидовой геометрии 51 аксиому в 8 группах, рассматривает

[1]) K. Th. Valen. Abstrakte Geometrie. Leipzig, 1905.

[2]) A. R. Schveitzer, A theory of geometrical relations. Am. Journ. Math. v. XXXI, 1913, p. 37—56.

[3]) Ch. Müntz. Ein nichtreduzierbares Axiomsystem der Geometrie. Jaresber. d. Deut. Matem. Verein. Bd. 23, 1914.

[4]) M. Geiger. Sistematische Axiomatik der Enklidiscien Geometrie. Augsburg, 1924; s. XXIII + 271.

невыводимость своих аксиом, которая у него совпадает с порядковой независимостью, только для первых трех групп. Для остальных групп он не дает даже этого.

Что касается названных выше четырех работ. то я не имею в виду делать подробный разбор их содержания (рамки журнальной статьи тесны для этого), а намерен ограничиться только той частью их, которая занимается основными понятиями и постулатами. Как известно, при построении какой нибудь дедуктивной теории мы всегда приходим к понятиям, остающимся без определения, и к предложениям остающимся без доказательства [1]). Понятия называются неопределяемыми или основными, а предложения аксиомами или постулатами. От основных понятий требуется, чтобы они были неприводимы относительно данной системы постулатов. Чтобы доказать неприводимость системы основных понятий при данной системе постулатов, необходимо и достаточно найти для каждого основного понятия такое истолкование системы основных понятий, которое оправдывает систему постулатов и пролжает ее оправдывать, если изменить подходящим образом одно только значение рассматриваемого понятия.

Можно теперь же отметить, что ни один из указанных четырех авторов вопроса о неприводимости основных понятий совершенно не затрагивает.

Что касается независимости постулатов, то к ней пред'являются следующие требования. Постулаты должны быть 1) совместны или непротиворечивы, 2) независимы, 3) достаточны или катеригочны. Для доказательства совместности необходимо указать класс об'ектов, в котором все постулаты оправдываются.

Для докательства независимости постулатов необходимо для каждого из них дать такое истолкование основных понятий, которое оправдывало бы все постулаты, кроме одного рассматриваемого. Так говорит А. Падоа. То же говорят Д. Гильберт, О Веблен, В. Ф. Каган Э. В. Гентингтон, С. А. Богомолов [2]).

Независимость различают порядковую, если каждый постулат независим от всех предшествующих, и абсолютную, определение которой приведено выше.

Термин достаточность означает, что каждая теорема может быть выведена из положенных в основу постулатов. Можно подумать, что есть только один путь для доказательства достаточности системы постулатов, построить всю теорию [3]), но и здесь остается открытым вопрос, не понадобятся ли новые постулаты для решения дальнейших задач [4]).

---

[1]) A. Padoa. Bibliothèque du congrés internationale de philosophie. III. Logique et histoire des sciénces, 1901.

[2]) *A. Padoa*, l. c. 323. *D. Hilbert*. Elemente der Enclidischeu Geometrie, Göttingen, Wintersemester 1898-99 (лит). *O. Veblen*. l. c. сн. 347. *В. Каган*. Задача обоснования геометрии. Одесса, 1908, сн. 33. F. V. Hutington. l. c. сн. 549. *С. А. Богомолов*. Основания геометрии. Москва—Петроград. 1923, сн. 40.

[3]) С. А. Богомолов. l. c. сн. 41.

[4]) В. Ф. Каган. Основания геометрии. сн. XIV и 780.

Иначе подходят к этому вопросу О. Веблен и Э. В. Гентингтон О. Веблен говорит, что его задачей является также показать, что „есть *в сущности только один класс*, в котором все двенадцать аксиом имеют силу. Или, говоря точнее, если два класса объектов K и K^1 оправдывают двенадцать аксиом, то между элементами этих классов можно установить взаимно-однозначное соответствие таким образом, что если три элемента A, B, C класса K находятся в порядке ABC, то соответствующие им элементы A', B', C' класса K находятся в порядке $A'B'C'$. Следовательно, всякая теорема, высказанная в терминах точки и порядка (основные понятия у О. Веблена), или в противоречии с нашими аксиомами или одинаково верна для всех классов, удовлетворяющих аксиомам. Действительность какого либо возможного утверждения в этих терминах, следовательно, вполне определяется аксиомами, и всякая дальнейшая аксиома должна быть признана излишней“ (сн. 346). Систему, подобную описанной, О. Веблен называет категорической, в противном случае дизъюнктивной. Таким образом категоричность совпадает с достаточностью. То же говорит и Э. В. Гентингтон, который наряду с термином „система категорична“ употребляет другой: „достаточна для определиния единственного типа системы“ (сн. 524-525, 528). Этою теоремою „достаточности“ как ее называет Э. В. Гентингтон, О. Веблен и Э. В. Гентингтон заканчивают развитие своих систем. О типе пространств или сходственных пространствах (по Э. В. Гентингтону изоморфных) говорит и В. Ф Каган, не связывая однако этого вопроса с достаточностью (см. 780—782),

Прежде чем перейти к разбору намеченных систем постулатов я хочу остановиться на вопросе об абсолютной независимости. Дело в том, что не всегда авторы, строя псевдогеометрии для доказательства независимости своих постулатов, в точности выполняют требование, высказанное А. Падоа, и, повидимому, поддерживаемое ими самими. Но есть и прямое изменение этого требования. Так А. Швейцер говорит: „Let us denote by C_n ($n = 1, 2, \ldots 8$) the class of points such that with respect to this class axiom n is contradicted and the remaining axioms are satisfied or are not effective (v. XXXI, сн. 386). То же А. Швейцер говорит и в другой своей заметке: „Note on a system of axioms for geometry“ [1]), Здесь прямо допускается, что некоторые постулаты могут совсем не осуществляться (are not effective). То же по существу, но в замаскированном виде, мы встречаем и у О. Веблена (сн. 352) и Э. В. Гентингтона (сн. 549), когда они говорят, что их постулаты удовлетворяются „vacuously“, т. е. условия для осуществления их постулатов не выполнены. Термин „vacuously“, повидимому, впервые встречается у Э. Гентингтона в его статье „Complete sets of postulates for the theory of real quontities“ [2]), где он приписывает введение этого термина проф. E. H. Moore'у. Не применяя

[1]) Trans. Am. Math. Sos. v. 10, 1909 г., сн. 312.

[2]) Trans. Am. Math. Soc. v. 4. 1903, сн. 364.

этого термина, Э. Г. Мур в сущности пользовался им в своей статье „On the projective axioms of geometry“ [1]), предложив для доказательства независимости аксиомы I_6 Д. Гильберта от остальных плоскую геометрию.

Простой пример покажет, что пользование „vacuously“ неправильно [2]), В своих литографированных лекциях [3]) Д. Гильберт показывает, что аксиома II_4 (о порядке 4 точек на прямой), во втором и следующих изданиях теорема, независима от $II_{1,2,3}$. Представим точки A, B, C вещественными числами α, β, γ с условием, что C лежит „между“ A и B, когда $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$ (следовательно, по обычному выражению C лежит позади A и B). Очевидно. что аксиомы 1 — 3 выполняются. а 4 нет. В самом деле, пусть $ABCD$ распорядок четырех точек в смысл акс. 4. Тогда должно было быть $\beta > \alpha$, $\beta > \gamma$, $\beta > \delta$, и в то же время $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$ $\gamma > \delta$, что невозможно, Можно было бы добавить, что аксиомы $I_{1,2,3a}$ тоже удовлетворяются, а остальные аксиомы I группы и II_5 удовлетворяются vacuously, и заключить, что II_4 независима от всех аксиом I и II групп. Как известно, E. H. Moore доказал, что аксиома II_4 является следствием II_5 и остальных аксиом I и II групп [4]). Между тем это vacuously встречается и у позднейших американских авторов, напр.: E. R. Hedrick and Louis Ingold. „A set of axioms for line geometrie“ [5]), M. G. Gaba. „A set of postulates for general projective geometry“ [6]), примеры для пост. I и V без упоминания vacuously, Norbert Wiener. „A set of postulates for fields“ [7]) тоже без упоминания vacuously.

Ту же мысль о vacuosly, но не пользуясь этим термином, защищает и В. Ф. Каган: „Постулат II не может найти себе применения, потому что в нашем пространстве не имеет место его условие... Но при условном характере этого постулата в нем отнюдь не содержится требование, чтобы в пространстве существовали точки, имеющие прямолинейное расположение“ (сн. 767).

Это тоже неверно. Ведь всякий постулат представляет просто недоказанную теорему, и его условность только в форме выражения, но не по существу. Когда мы высказываем теорему: „если треугольник равнобедренный, то в нем углы при основании равны“, то конечно в ней содержится требование, чтобы в пространстве существовал равнобедренный треугольник. Доказательство условия теоремы обычно дается раньше теоремы, поэтому то, что высказывается в условии, называется *данным*. Иногда доказательство условия дается позже самой теоремы, и тогда теорема и все следствия из нее остаются

---

[1]) Trans. Am. Math. Soc. v. 3, 1902; сн. 145 примечание.

[2]) Этим примером я обязан одному замечанию проф. Д. М. Синцова.

[3]) См. ссылку [2]) сн. 88.

[4]) См. ссылку [1]).

[5]) Trans. Am. Mat. Soc. v. 15. сн. 205 — 214.

[6]) ilid. v. 16, 1905; сн. 51 — 61

[7]) ilid. v. 21, 1920; сн. 237 — 246.

на время условными. Иногда условие теоремы впоследствии отвергается, и в таком случае теорема и все следствия из нее не имеют места в системе (напр. В. Ф. Каган гл. XIX т.т. 2, 4, 6 и 6). Во всяком случае условие теоремы или принимается или отвергается, третьего нет. В постулате по существу дела ни условие ни заключение доказательству не подлежат. Условие постулата не может отвергаться, иначе пришлось бы просто удалить постулат целиком, следовательно, *условие постулата, как и заключение, принимается, как данное.*

Об остальных вопросах, касающихся постулатов, будет сказано при разборе отдельных работ.

§. 2. Работа О. Веблена.

Основными поятиями у О. Веблена являеются „точка" и „порядок", соответствующий гильбертовскому „между".

Аксиом у О. Веблена 12.

I. Существуют по крайней мере две различных точки.

II. Если точки A, B, C в порядке ABC, то они в и порядке CBA.

III. Если точки A, B, C в порядке ABC то они не в порядке BCA.

IV. Если точки γ, B, C в порядке ABC, то A отлична от C.

V. Если A и B две различных точки, то есть такая точка C, что A, B, C в порядке ABC.

Опр. 1. *Прямая* AB $(A \neq B)$ состоит из A, B и всех точек X в одном из возможных порядков ABX, AXB, XAB. Точки X в порядке AXB образуют *отрезок* AB. A и B *концы* отрезка:

VI. Если точки C и D $(C \neq D)$ лежат на прямой A, B, то A лежит на прямой CD.

VII. Если существуют три различных точки, то существуют три точки A, B, C ни в одном из порядков ABC, BCA или CAB.

Опр. 2. Три различных точки, не лежащих на одной прямой, *вершины треугольника* ABC, *стороны* которого отрезки AB BC, CA, и *граница* которого состопт из его верпгин и точек сторон.

VIII. Если три различных точки A,B,C не лежат на одной прямой, а D и E две точки в порядках BCD и CEA, то существует такая точка F в порядке AFB; что D, E и F лежат на одной прямой.

Опр. 5. Точка 0 *внутри* треугольника, если она лежит на отрезке, концы которого точки различных сторон треугольника. Совокупность таких точек — *внутренняя область* треугольника.

Опр. 6. Если A, B, C образуют треугольник, то *плоскость* ABC состоит из всех точек, прямолинейно расположенных (collinear) с какими-либо двумя точками сторон треугольника.

IX. Если существуют три точки, не лежащих на одной прямой, то существует такая плоскость ABC, что есть точка D, не лежащая на плоскости ABC.

Опр. 7. Если A, B, C, D четыре точки не лежащих на одной плоскости, то они образуют *тетраэдр* $ABCD$, которого *грани* — внутренние области треугольников ABC, BCD, CDA, DAB (если треугольники существуют), *вершины* которого четыре точки A, B, C, D и *ребра* которого отрезки AB, BC, CD, DA, AC, BD. Точки граней, ребер и вершин составляют поверхность тетраэдра.

Опр. 8. Если $A, B, C\,D$ вершины тетраэдра, то пространство $ABCD$ состоит из всех точек, прямолинейно расположенных с какими-либо двумя точками граней тетраэдра.

X. Если существуют четыре точки, не лежащих ни на одной прямой, ни в одной плоскости, то существует такое пространство $ABCD$, что нет точки E, не расположенной прямолинейно с двумя точками пространства $ABCD$.

XI. Если существует бесконечность точек, то существует определенная пара точек A, C такая, что если $[\sigma]$ бесконечная совокупность отрезков прямой AC, имещих свойство, что каждая точка отрезка AC и его концы A и C являются точками отрезка σ, то есть и конечная совокупность $\sigma_1, \sigma_2 \,.\,.\, \sigma_n$, с тем же свойством.

XII Еели a прямая плоскости α, то есть некоторая точка C на α, через которую проходит не более одной прямой в плоскости α, не пресекающей a.

Нельзя не обратить внимания на громоздкую формулировку аксиом, вызванную, вероятно, стремлением сохранить за ними мнимую условность и тем оправдать применение vacuously. Возражение вызывает также появление в аксиомах новых терминов, введенных шестью определениями. Как справедливо указывает В. Ф. Каган, должна быть доказана независимость этих определений, которые можно назвать основными. Но об этом будет сказано дальше в § 4. Что касается конгруентности, то О. Веблен вводит ее определением на основе проэктивной геометрии, при помощи преобразований, оставляющих инвариантным мнимый круг на бесконечности.

О. Веблен ничего не говорит о совместности своих аксиом.

Для доказательства независимости своих аксиом О. Веблен указывает классы объектов, за исключением акс. XI, независимость которой от отстальных, по его мнению, хорошо известна. Автор отмечает, что классы $K_{\mathrm{I}} - K_{\mathrm{VIII}}$ все состоят из конечного числа объектов. Из указанных им псевдо-пространств особенно интересно K_{VIII}. При доказательстве независимости аксиом vacuously применяется к последующим аксиомом, за исключением акс. V. Для нее О. Веблен указывает пространство K_{V}, состоящее из точек 1 и 2 с условием, что точки A, B, C находятся в порядке ABC только в том случае, если $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$ (сн. 352). Здесь акс. V не удовлетворяется, I удовлетворяется, а все остальные удовлетворяются vacuously. Следовательно, остается недоказанной даже порядковая независимость акс. V.

Нетрудно видеть, что акс. V частью, а акс. VII целиком входят в акс. VIII. О. Веблен полагает, что форма, приданная им аксиоме М. Паша, менее требовательна, чем у М. Паша или у Д. Гильберта (сч. 341). С этим нельзя согласиться. Акс. II_4 Д. Гильберта, как показал Н. Четверухин [1]), неявно предполагает внутренею точку отрезка делая ненужной II_{2a}, а акс. VIII О. Веблена предполагает сверх того еще и внешнюю точку отрезка, при чем обе аксиомы предполагают существование трех точек не на одной прямой. Приходится признать, что аксиома М. Паша и ее видоизменения очень неудобны при построении системы независимых аксиом.

Интересно отметить также класс K_1, состоящий из одной точки с условием, что точки A, B, C в порядке ABC только в том случае, если $A \neq B \neq C$. Аксиома I не удовлетворяется, а все остальные удовлетворяются vacuously. Ясно что таким приемом можно „доказать" независимость какой угодно аксиомы, а не только I. А если в качестве K_n взять класс, в котором вовсе нет точек, как это делает А. Р. Швейцер [2]), то будет доказана независимость какой-угодно аксиомы в любой системе.

Конечно, акс. I не независима, а представляет простое следствие II и III и целиком покрывается теоремой 2: „Из порядка ABC следует, что A отлично от B и B от C", которая доказывается на основании только II и III аксиом (сн. 354). Акс. I содержится также в IV, VII и VIII.

Следовательно, в системе О. Веблена аксиомы I и VII являются явно лишними, входя целиком в последующие. После упомянутой статьи Н. Четверухина можно думать, что и акс. II и V могут быть выведены из остальных.

Таким образом, О. Веблен не доказал, да и не мог доказать абсолютной независимости своих аксиом, так как некоторые из них явно связаны одна с другой. Не доказал О. Веблен и порядковой независимости для акс. V.

Доказательство абсолютной независимости аксиом и пользование всеми ими при развитии системы указывает на необходимость каждой из них в выставленной системе.

Не менее важно доказать достаточность системы аксиом для вывода из них любой теоремы в терминах основных понятий. Доказывая теорему „достаточности", ни О. Веблен ни Э. В. Гентингтон не объясняют однако, почему из теоремы достаточности вытекает достаточность системы аксиом. Мы хотим предложить здесь доказательство того, что это действительно так.

Теорема. „Система аксиом достаточна, если она позволяет доказать теорему достаточности".

Доказательство. В самом деле пусть для некоторой системы n аксиом $A_1, A_2, \ldots A_n$ доказана изоморфность классов объектов, удовлетворяющих этим аксимам (см. § 1), и допустим, что есть предложение P, выраженное в тех же основных понятиях, которое не может быть доказано на основании принятых аксиом и требует длясвоего доказательства новой аксиомы A_{n+1}. В качестве A_{n+1} может быть взято и P.

[1]) N. Tschetweruchin. Über die Bedentung des Axioms von Pasch für die lineare Anordnungsaxiome. Jahresber. d. deut. Matem. Verein. Bd. 33, 1924; S. 65—74.

[2]) l. c. v. XXXI сн. 381, 386, 389.

A_{n+1} не зависит от остальных A, поэтому существует класс K_{n+1}, в котором все A_k ($k = 1, 2, \ldots n$) оправдываются, а A_{n+1} нет. С другой стороны, так как A_{n+1} совместна с остальными, то существует класс K', в котором оправдываются все A, включая и A_{n+1}. Но по теореме достаточности классы K_{n+1} и K' изоморфны, так как в них обоих оправдываются n первых аксиом. Следовательно A_{n+1} имея место в классе K', должна иметь место и в классе K_{n+1}. Противоречие доказывает, что наше предположение неверно, и, следовательно, нет такого P, которое не вытекало бы из принятых n аксиом. Таким образом система аксиом является достаточой для построения всей теории, что и т. д.

Впрочем, и доказав теорему достаточности, мы еще не можем быть вполне уверены, что принятая система аксиом действительно достаточна. Предыдущее рассуждение подразумевает, что были форлированы все аксиомы, необходимые для доказательства теоремы достаточности. Если же какая-либо аксиома вошла в доказательство теоремы достаточности неявно, при доказательстве этой ли теоремы или одной из предыдущих, все равно, то наша система остается дизъюнктивной. Обнаружить эту дизъюнктивность можно, заметив или пробел в доказательстве, или существование другого класса объектов, не изоморфного тому, которым пользовались при доказательстве совместности аксиом, но в котором также удовлетворяются все аксиомы данной системы. Правда, и тот и другой способ имеют случайный характер и не могут поэтому быть признаны вполне удовлетворительными, но указать другого способа для обнаружения дизъюнктивности системы мы пока не в состоянии (см. § 4).

Во всяком случае значение теоремы достаточности очень велико, так как позволяет закончить цепь теорем доказательством этой теоремы. Большая заслуга Э. В. Гентингтона заключается в том, что он первый указал на значение этой теоремы и доказывал ее для систем аксиом, которые он строил для различных теорий [1]).

Из сказанного вытекает, что работа, притязающая на достаточность выставленных аксиом, должно быть снабжена самыми подробными доказательствами всех теорем, оканчивая теоремой достаточности.

Обращаясь к работе О. Веблена, мы видим, что она действительно заканчивается доказательством теоремы достаточности. Что же касается предыдущего, то вся третья глава, посвященная проэктивной геометрии (т. т. 43 — 83), оставлена вовсе без доказательств, по объяснению автора, в виду недостатка места и достаточной известности вопроса. При этом ссылки, как предупреждает автор, указывают часто не на подробности доказательства, а только на методы (сн. 372). В виду этого вопрос о достаточности аксиом О. Веблена остается для нас открытым.

---

[1]) E. V. Huntington. A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. Trans. Am. Math. Soc. v 3 1902; p. 264—279 и последующие статьи.

Подводя итоги по вопросам относительно аксиом, мы видим, что *в работе О. Веблена доказательство совместности аксиом отсутствует, доказательство абсолютной независимости не дано, да и не может быть дано, доказательство порядковой независимости не удалось, о доказательстве достаточности нельзя выказаться определенно.*

§ 3. Работа Р. Л. Мура.

Мы расматриваем работу Р. Л. Мура сейчас же после работы О. Веблена вследствие того, что система Р. Л. Мура представляет собою только некоторое видоизменение системы О. Веблена, и самая работа написина под влиянием и отчасти в сотрудничестве с О. Bебленом (сн. 488).

Р. Л. Мур выставляет систему 15 постулатов, которые он называет допущениями (assumption), в терминах трех основных понятий: точки, порядка и конгруентности. Эти допущения следующие.

1) Аксиомы О. Веблена I и III — X, обозначаемые буквой O (order). В подстрочном примечании на сн. 488 автор поясняет, что аксиома II О. Веблена является следствием I и III — VIII вместе с C_{1a}, как доказано в статье автора, представленной им Американскому математическому обществу, но еще не опубликованной. Вероятно, в этом списке не надо считать аксиомы V О. Веблена, так как она целиком содержится в C_{1a}, По крайней мере аксиомы V нет в списке при доказательстве независимости в § 8 (сн. 507—508).

2) Допущения конгруентности, обозначенные все буквами C со значками.

C_{1a} „Если B отлична от C, и A' отлична от B', то существует такая точка C', что $A'B'C'$, и $BC \equiv B'C'$“

C_{1b} „Если B отлична от C, и B' отлична от B', то есть не более одной такой точки C', что $A'B'C'$, и $BC \equiv B'C'$“.

C_2. „Если A отлична от B, A' отлична от B', A'' отлична от B'', $AB \equiv A'B'$ и $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A''B''$“:

C_3. „Если ABC, $A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$“.

C_4. „Если A, B и C три не прямолинейно расположенных точки, и A', B', C' три не прямолинейно расположенных точки, и CAD, $C'A'D'$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$, $CD \equiv C'D'$, то $BD \equiv B'D'$“.

3) Допущение непрерывности K, для которого автор берет или XI акс. О. Воблена или постулат о сечении Дедекинда для точек одного единственного отрезка в следующей форме: K. „Если существует какой-либо отрезок, то существует некоторый отрезок AB такой, что если он составлен из двух совокупностей точек $[M]$ и $[N]$, причем каждая совокупность содержит по крайней мере две точки, и ни одна точка X каждой совохупности не совпадает с точкой Y, и не такова, что Y_1XY_2, где Y_1 и Y_2 точки другой совокупности, то существует такая точка C, что MCN для каждой M и N отличных от C“.

4) Наконец допущение паралельности,

P_0 „Если существует какая-либо прямая и точка вне ее, то существует некоторая прямая a и некоторая точка A вне ее такие, что если a и A лежат в плоскости β, то в плоскости β есть не более одной прямой, проходящей через A и не имеющей общей точки с a“.

Все сказанное относительно формы и содержания аксиом О. Веблена, очевидно, применимо и к допущениям Р. Л. Мура.

P_0 отличается от XII акс. О. Веблена тем, что P_0 устанавливается для одной единственной плоскости, а XII для всякой. P_0 таким образом менее требовательна, чем XII, и теперь уже нельзя ввести конгруэнтности определением, что Р. Л. Мур и показывает в § 10 своей работы. Рассмотрим пространство, в котором точками будут точки обыкновенного евклидова пространства, лежащие по одну сторону определенной плоскости, а порядок определен, как обычно. Здесь O, K и P_0 удовлетворяются, но отношения между отрезками, удовлетворяющего допущениям C, существовать не может. Если бы здесь удовлетворялись и C, то согласно т. 8 § 5 пространство было бы обыкновенным евклидовым пространством, и в нем через каждую точку вне каждой прямой можно было бы провести только одну прямую, не встречающую данной.

Очевидно, что в рассматриваемом пространстве это неверно.

Р. Л. Мур развивает следствия из своей системы допущений, ограничиваясь *указаниями* на доказательства (сн. 488). В § 5 в т. 8 он указывает, что из его системы допущений O, C, K, P_0 следует система Д. Гильберта, а потому и обыкновенная евклидова геометрия. Автор рассматривает и другие совокупности допущений, представляющие вариации указанной основной.

Что касается основных трех вопросов относительно постулатов, то *Р. Л. Мур не доказывает ни совместности своих допущений, ни их достаточности*, хотя и называет основную систему категорической (сн. 487).

Автор хочет доказать, что в его системе O, C, K и P_0 каждое допущение независимо от всех остальных. Для доказательства независимости он пользуется отчасти примерами О. Веблена, дополняя их условиями относительно конгруэнтности, но для III, VI и всех C строит свои примеры. Для C указаны такие примеры, что каждое C действительно абсолютно независимо от всех остальных, в других примерах остается vacuously. Так как аксиома V О. Веблена отдельно в список не входит, то *допущения Р. Л. Мура порядково независимы.*

§ 4. Работа В. Ф. Кагана.

В работе В. Ф. Кагана вопросу о системе основных посылок уделено около 179 страниц.

Работа разрослась до таких больших размеров по сравнению с аналогичными работами других авторов, потому что В. Ф. Каган поставил своей целью дать не план работы подобно другим, а самую работу (сн. XIV). Он доводит каждое доказательство до элементов, опуская иногда только такие детали, которые действительно не могут затруднить читателя. Этим работа В. Ф. Кагана выгодно отличается от других рассматриваемых нами работ, так как не возлагает на читателя труда, который должен быть выполнен автором.

В. Ф. Каган принимает 10 постулатов.

I. Между любыми двумя точками пространства C и D на всяком расстоянии, меньшем CD, от любой из них имеется точка прямолинейно относительно них расположенная (сн. 95).

II. Если две точки в пространстве расположены каждая прямолинейно относительно двух других точек, то они образуют с последними прямолинейный образ (сн. 104).

III. Если некоторое движение приводит две различные точки пространства M и N в совмещенне с двумя различными же точками M' и N', то расстояния $\overline{MN}$ и $\overline{M'N'}$ равны (сн. 163).

IV. Никакое движение не совмещает всех точек пространства с одной и той же точкой (сн. 165).

V. Каковы бы ни были движения S и S', в пространстве имеется движение SS', заменяющее последовательное производство их (сн. 172).

VI. Вращением вокруг двух точек A и B всякая третья точка C может быть приведена в совмещение с любой точкой C', коль скоро $\overline{AC} = \overline{AC'}$ и $\overline{BC} = \overline{BC'}$ (сн. 174).

VII. В пространстве существует плоскость (сн. 180).

VIII. Если три точки A, B и C расположены в одной плоскости, и из трех пар точек AB, BC и CA две пары расположены в этой плоскости по одну сторону точек M и N, то точки третьей пары также расположены по одну сторону точек M и N (сн. 287).

IX. В пространстве имеется по крайней мере одна плоскость, в пределах которой всяким трем точкам, не имеющим прямолинейного расположения, отвечает по крайней мере одна точка пространства, одинаково от них удаленная (сн. 723).

X. В пространстве существует плоскость, при неподвижности которой все пространство остается в покое (сн. 750).

В эти десять постулатов входит явно 13 терминов и неявно 2, всего 15. Основными понятиями, неопределяемыми являются четыре: пространство, точка, движение, совмещение. Для всех остальных даются определения (сн. 772—773). Определения эти будем называть основными. Мы приведем лишь те определения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

5) Арифметическое число, отнесенное паре различных точек пространства, мы будем называть *расстоянием между этими точками* (опр. 10 гл. II).

6) Если A, B и C суть три различные точки в каком-либо пространстве, то трем парам точек BA, BC и CA отвечают три расстояния $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$. Если расстояния эти таковы, что одно из них равно сумме двум других, напр., если $\overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC}$, то мы будем говорить, что эти три точки расположены *прямолинейно* или, что

каждая из этих трех точек расположена прямолинейно относительно двух других (опр. 1 гл. VI).

7) При соотношении $\overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC}$ мы будем сверх того говорить, что точка B расположена *между* точками A и C (опр. 1 гл. VI).

11) Если геометрическое место точек, равноотстоящих от двух точек A и B, в некотором пространстве содержит точки, не расположенные на одной прямой, то мы будем называть его *плоскостью*; точки A и B мы будем называть *полюсами* плоскости (опр. 1 гл. XV).

14) Образ в каком-либо пространстве, который состоит из двух точек A и B и всех точек, расположенных между ними, мы будем называть *отрезком* AB (опр. 3 гл. VI).

15) Во всяком пространстве мы будем называть *прямой линией* (или просто *прямой*) образ, который состоит из двух точек A и B и всех других точек пространства, расположенных прямолинейно относительно A и B. Эту прямую линию мы будем называть прямой AB (опр. 1 гл. VI).

12) Положим, что в некотором пространстве имеется плоскость R и в ней две пары точек A, B и P, Q. Если в этом пространстве нет прямой, проходящей через точки P и Q, расположенной целиком в плоскости R и встречающей отрезок AB, то мы будем говорить, что *точки* A *и* B *расположены в плоскости* R *по одну сторону точек* P и Q (опр. 1 гл. XVIII).

Рассматривая пространство, как числовое многообразнее, автор принимает, как данное, теорию операций с вещественными числами и то, что эта теория не содержит внутренних противоречий (Гл. II опр. 2). Таким образом, постулат непрерывности автор относит к арифметике, чем, несомненно, значительно упрощает свою задачу.

Совместность постулатов, а вместе с ними и основных определений доказывается тем, что все они имеют место в аналитическом пространстве E_3, что удостоверяется соответствующими предложениями (сн. 759—760).

Развивая геометрическую систему и вводя по мере необходимости постулат за постулатом, В. Ф. Каган вместе с тем доказывал независимость каждого нового постулата от всех предыдущих. Таким образом, *постулаты В. Ф. Кагана порядково независимы.*

Последнюю главу LVIII В. Ф. Каган посвящает доказательству абсолютной независимости своих постулатов и основных определений и другим вопросам относительно постулатов.

В. Ф. Кагану действительно удалось доказать абсолютную независимость всех постулатов, кроме I и VII, как сейчас будет видно.

Автор дает доказательство абсолютной независимости своих постулатов, начиная с последнего. Повторив доказательство независимости для постулата X, автор доказывает независимость IX и VIII. Обращаясь к постулату VII, автор замечает, что „о независимости этого постулата от VIII — X в известном смысле не может быть и речи... Самое понятие о независимости постулата VII от постулатов

VIII — X не имеет содержания. Если остановиться на постулате X, то можно, конечно, сказать что он содержит уже требование, выраженное в постулате VII“ и т. д. (сн. 761—762). Для доказательства же независимости постулата VII от предшествующих служит пространство E_2.

Затем автор последовательно доказывает абсолютную независимость постулатов VI — II. Обращаясь к постулату I, автор указывает, что в нем содержатся два утверждения: 1) что между любыми двумя точками C и D имеются промежуточные точки, и 2) что промежуточная точка имеется на любом расстоянии, меньшем нежели CD, от каждой из них.

Прежде всего автор хочет показать, что „из постулатов II — X не вытекает, что в пространстве, в котором они имеют место, существуют какие-либо три точки, прямолинейно расположенные“ (сн. 765). Для этой цели автор строит новое пространство, 14-е. Он берет пространство из конечного числа (n) точек, при чем $n > 6$, за расстояние между любыми двумя точками принимает одно и то же арифметическое число, а за движения все возможные перемещения этих точек четного порядка, т. е. состоящие из четного числа парных перестановок. При этих условиях в построенном пространстве прямолинейное расположение точек не может иметь места. Затем автор показывает, что постулаты III — X удовлетворяются. „Постулат II не может найти себе применения, потому что в нашем пространстве не имеет места его условие... Но при условном характере этого постулата в нем отнюдь не содержится требование, чтобы в пространстве существовали точки, имеющие прямолинейное расположение“ (сн. 766).

Затем автор показывает, что если даже принять, что в пространстве существуют точки, имеющие прямолинейное расположение, то из постулатов II — X не следует, что между любыми двумя точками имеется промежуточная точка. Для этой цели автор рассматривает 15-е пространство, точки которого распадаются на две категории. Первую категорию образуют три точки A, B и C, а вторую 4 точки X, X', Y, Y'. Расстояния в этом семиточечном пространстве распределены следующим образом:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1.$$

$$\overline{XY} = \overline{X'Y'} = 1,\ \overline{YY'} = 2,\ \overline{X'Y} = \overline{XY'} = 3,\ \overline{XX'} = 4.$$

$$\overline{AY} = \overline{BY} = \overline{CY} = \overline{AY'} = \overline{BY'} = \overline{CY'} = 5$$

$$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{CX} = \overline{AX'} = \overline{BX'} = \overline{CX'} = 10$$

Движения есть и совершенные и несовершенные. Пусть $S_1, S_2 \ldots . S_6$ все совершенные сопряжения группы A, B, C с самою собою, т. е. не относящие двух различных элементов одному и тому же, а $S_1', S_2' \ldots . S_{21}'$, все несовершенные сопряжения той же группы с самою собою. Пусть T будет перестановка $(XX')(YY')$. Движения в пространстве состоят из всех сопряжений вида S_i, S_j' и $S_j' T$. Затем автор показывает, что в построенном пространстве справедливы постулаты II — VIII. В частности постулат VII справедлив, так как в пространстве имеются 4 плоскости: 1) плоскость, имеющая своими полюсами точки X и X' или Y и Y' и состоящая из точек A, B, C; 2) три плоскости, имеющие своими полюсами две точки первой группы и состоящие из всех точек второй группы и третьей точки первой группы. Относительно постулатов IX и X автор ограничивается коротким заявлением, что требованиям этих постулатов удовлетворяет плоскость, состоящая из точек A, B и C. Ясно, что это неверно. Постулат IX не удовлетворяется в плоскости ABC, так как в ней только 3 точки, а постулат IX требует, чтобы точка, равноудаленная от трех была в пределах плоскости. Но постулат IX в семиточечном пространстве не выполняется и в остальных плоскостях по условиям расстояния между их точками, что легко проверить. Следовательно независимость постулата I осталась недоказанной.

В. Ф. Каган заканчивает доказательство независимости своих постулатов заявлением, что считает доказанным, „что каждый из наших десяти постулатов не зависит от остальных" (сн. 770).

Конечно с этим нельзя согласиться. Из сказанного по поводу доказательств независимости постулатов VII и I, напротив, ясно, что о их независимости не может быть и речи, так как постулат VII связан с VIII — X, а постулат I со II. Таким образом, *абсолютная независимость постулатов в системе В. Ф. Кагана не доказана и не может быть доказана.*

Затем автор переходит к доказательству независмости своих определений. Из 15 терминов, входящих в постулаты, автор выделяет четыре: пространство, точка, движение и совмещение, определения которых в его сочинении имеют, по его словам, чисто тавтологический характер. Он относит эти термины к основным и считает невозможным говорить об их независимости от остальных и от постулатов (сн. 773-774).

Под определением мы разумеем предложение, дающее определенное название понятию, составленному из других понятий, определенных раньше или принятых за основные. Определения вводятся только для упрощения речи, и можно было бы обойтись вовсе без новых терминов ценою усложнения речи и процесса доказательства. Однако дело обстоит иначе с теми терминами, которые были введены определениями и вслед затем встречаются в постулатах. Тем самым терминам приписываются известные свойства, и возникает вопрос, не представляет ли то предложение, которое мы считаем определением, теоремы, которая подлежит доказательству. С этими рассуждениями автора (сн. 770-772), которые мы приводим в сокращении, нельзя не согласиться. Для пояснения его мысли приведем пример. Плоскость была определена и затем фигурирует в 4 постулатах VII — X. Является вопрос, нельзя ли на основании только постулатов I — X и остальных определений доказать, что плоскость есть геометрическое место точек, не имеющих прямолинейного расположения и одинаково удаленных от двух данных точек. Если бы это оказалось возможным, то определение плоскости не было бы независимым.

Автор, по нашему мнению, успешно доказывает независимость почти всех своих определений. Мы остановимся только на двух терминах: 11) плоскость и 15) прямая, относительно которых не можем согласиться с рассуждениями автора. Если термин берется в новом значении, мы будем ставить его в кавычках.

О плоскости автор говорит: „если мы под термином „плоскость" будем разуметь то, что разумели раньше под термином полуплоскость, то легко видеть, что мы удовлетворим всем постулатам. Справедливость постулата VIII требует некоторого размышления, но мы предоставим это читателю" (сн. 779). Определение полуплоскости гласит: геометрическое место в пространстве Ω_8 (т. е. в пространстве, удовлетворяющем первым 8 постулатам), состоящее из прямой и одной стороны плоскости, проходящей через эту прямую, относительно нее мы будем называть *полуплоскостью* (опр. 4 гл. XXIV, сн. 294). Ясно, что постулат IX для полуплоскости не удовлетворяется, так как точка, равноудаленная от трех данных, не расположенных прямолинейно, может находиться за пределами полуплоскости на ее продолжении. Таким образом, независимость определения плоскости осталась недоказанной.

Для доказательства независимости определения прямой автор предлагает разуметь под „прямой AB" то, что обыкновенно разумеют под отрезком AB, сохраняя все остальное определения. Легко видеть, говорит автор, что это не отразится на значении термина: *обе точки A и B расположены в плоскости по одну сторону двух других точек P и Q*. В самом деле, ни одна „прямая", проходящая через точки P и Q и расположенная в плоскости, не встречает отрезка AB в том и только в том случае, если прямая PQ (подчеркнем, в прежнем значении этого слова) не встречает отрезка AB. Вследствие этого постулат VIII остается сраведливым, а об остальных постулатах и говорить нечего (сн. 779—780).

Прежде всего здесь то неудобство, что один и тот же образ, отрезок, имеет теперь два названия: отрезок и прямая. Но здесь есть и ошибка, которая станет ясна, если рассуждение автора перевести на обычный язык геометрии. Тогда получим: отрезок PQ не встречает отрезка AB в том и только в том случае, если прямая PQ не встречает отрезка AB. Разумеется это не так. Отрезок PQ может не встречать отрезка AB, а прямая PQ в то же время встречать. Пусть точки A, B и C расположены так, что „прямая" (отрезок) PQ встречает отрезок AB, но не встречает отрезков AC и BC. Точки A и C лежат тогда по одну сторону точек P и Q, также B и C, но A и B лежат по разные стороны точек P и Q, и постулат VIII не оправдывается. Вместе с тем остается недоказанной и независимость определения прямой.

Следовательно независимость определений В. Ф. Кагана осталась недоказанной.

Покончив с вопросом о независимости основных посылок, В.Ф.Каган ставит вопрос о том, в какой мере определительны эти посылки для пространства, и показывает, что его посылки определяют не только так называемое реальное пространство, но и всякое с ним сходственное, например, плоское аналитическое пространство E_3. Автор называет сходственными два пространства в том случае, если между их элементами можно установить однозначное соответствие так, что 1) каждому элементу одного отвечает один и только один элемент другого и обратно, 2) расстояния между соответствующими точками в обоих пространствах равны и 3) каждому движению в одном пространстве отвечает в другом движение, производящее совмещение соответствующих точек. Таким образом В. Ф. Каган доказал теорему „достаточности", не замечая всего ее значения.

Поэтому дальше В. Ф. Каган ставит вопрос о достаточности посылок отдельно и говорит, что им опущены постулаты логические и арифметические, и также остались без определения многие термины как, например, *существует, различные точки* и др., и потому он не может признать своих посылок достаточными для формального обоснования геометрии. Он говорит далее: „мы формулировали лишь те термины и постулаты, которые характеризуют геометрическое исследование, и оставили в стороне те посылки, на которых покоится каждое рассуждение, к какой бы области оно ни относилось" (сн. 783).

Итак, автор признает свои геометрические посылки достаточными для формального обоснования геометрии. Мы напротив, попробуем доказать, что они недостаточны, для чего 1) укажем тот постулат, которым автор пользовался неявно, и 2) укажем пространство, отличное от E_3, в котором тем не менее имеют место все десять постулатов.

Рассмотрим доказателство т. 8 гл. XVI. Приводим полностью теорему и доказательство.

Теорема 8. „В пространстве Ω_7 каждая точка прямой есть внутренняя ее точка". Док. Пусть A будет произвольная точка прямой AB и B произвольная другая ее точка. Пусть C будет средина отреза AB. Так как $AC = CB$, то C и B могут быть приведены в совмещение с точками A и C (т. 3). Это движение *приводит точу A в некоторую точку C'*, которая принадлежит прямой AB (т. 14 гл. XIV). Так как точка C лежит между точками A' и B, то точка A лежит между точками C' и C (т. 6а гл. XIV). Иными словами, A есть внутренняя точка нашей прямой".

Нами подчеркнут вывод, не имеющий основания ни в постулатах, ни в основных определениях, так как термин *движение* автор принял за основной, относя анализ его за пределы своего сочинения (сн. 773). В данном случае автор принимает, что „всякое движение в пространстве приводит каждую точку пространства в некоторую определенную точку того же пространства". Но ведь это новый постулат движения. Тем же неформулированным постулатом автор пользуется и при доказательстве т. 24 гл. XVI, когда говорит, что движение приводит точки C, D и E в совмещение с точками C', D' и E', да, вероятно и в других местах, отыскивать которые собственно нет надобности, так как достаточно и одного примера.

Хотя указанный постулат и имеется у В. Ф. Кагана в гл. II в виде теоремы 6, все же он остается постулатом. Теорема 6 вытекает непосредственно из определений 3,4 и 10 гл. II, из которых нельзя делать выводов, так как в конце-концов определения 3 и 4 (сопряжения, которое затем названо движением) совсем не попали в список основных определений, а из определения 10 вошло только расстояние.

Тепер укажем пространство, в котором также выполняются все 10 постулатов, для чего лишь немного изменим пространство E_3. Мы возьмем в обыкновенном евклидовом пространстве только точки, лежащие по одну сторону какой-либо плоскости, сохраним между ними прежние расстояния и оставим все движения. Например, возьмем точки лежащие по одну сторону координатной плоскости XOY, именно с положительной координатой Z. В этом пространстве все постулаты I — X имеют место. Ограниченность простанства не играет роли для постулатов движения, так как движение является лишь точечным преобразованием, постулат IX выполняется во всякой плоскости, параллельной плоскости XOY, а об остальных нечего и говорить. Таким образом система В. Ф. Кагана оказалась диз'юнвтивной. Указанное нами пространство исключается как-раз новым постулатом, доказывая вместе с тем его независимость от остальных. Движение, приводящее точку $(0, 0, 4)$ в точку $(0, 0, 1)$, точки $(0, 0, 2)$ уже ни в какую точку этого пространства не переводит. Заметим, что отмеченный нами постулат входит, как часть, в 9 постулат Ф. Шура [1]); он является также первым постулатом движения у С. А. Богомолова [2]).

Таким образом, несмотря на то, что В. Ф. Каган доказал теорему достаточности, *его система все же оказалась недостаточной*. Этот пример поясняет соображения высказанные нами в § 2.

Заметим, что точно также оказалась недостаточной система аксиом Д. Гильберта, как это показал В. Ф. Каган, так как все аксиомы Д. Гильберта удовлетворяются одновременно в двух пространствах В. Ф. Кагана в E_3 и E_3. Пространство E_3 обыкновенное евклидово пространство с обыкновенными движениями. Пространство E_3 содержит те же точки и с теми же расстояниями между ними, как E_3, и допускает те же движения, что и E_3, с добавлением вращения около плоскости. Это последнее пространство В. Ф. Каган исключает с помощью постулата X.

---

[1]) F. Schur. Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin, 1919, S. 28.

[2]) l. c. сн. 68.

Покончив с достаточностью, В. Ф. Каган переходит к вопросу о необходимости его постулатов для обоснования евклидовой геометрии. Хотя автор и признает все постулаты необходимыми в пределах его системы, однако это не так. Ясно, что постулат VII может быть выпущен, так как он повторяется в следующих за ним VIII — X.

Наконец, автор ставит еще один вопрос о том, необходим ли каждый постулат во всем его об'еме, или требования его можно сократить, и указывает, что и его постулаты допускают сокращения. Мы не будем касаться здесь предложенных автором изменений, так как он не рассматривает во всей полноте вновь возникающих вопросов о независимости и о выводе прежней системы из новой.

Подводя итоги, мы можем сказать, что *В. Ф. Каган дал систему постулатов, обладающих порядковой независимостью. Абсолютная независимость постулатов не доказана. Независимость основных определений не доказана. Система основных посылок недостаточна.*

§ 5. Работа Э. В. Гентингтона.

В системе Э. В. Гентингтона основными понятиями являются K, класс элементов, и R, отношение включения между элементами. Основных определений, т. е. определений входящих в постулаты терминов около 27. Э. В. Гентингтон ограничивается замечанием, что все эти определения могут быть выражены прямо в терминах основных понятий. Конечно, этого недостаточно. Надо или прямо выражать постулаты в терминах основных понятий, как этого требует А. Падоа, или, следуя В. Ф. Кагану, доказывать независимость основных определений. Э. В. Гентингтон не сделал ни того ни другого. Эти определения занимают около 7 страниц, поэтому мы выпишем только некоторые.

1. Если A элемент класса K, то A будет называться абстрактным шаром или просто *шаром*.

2. Если ARB, то мы скажем, что шар A *внутри* шара B, или что *B содержит A*.

4. Если A шар, и если нет другого шара X такого, что XRA, то A называется абстрактной точкой или просто *точкой*; т. е. точка есть шар, который не содержит внутри себя никакого другого шара.

5. Пусть A и B какие-либо данные точки. Если X такая точка, что всякий шар, содержащий A и B, содержит также X, то говорят, что X принадлежит *отрезку* $[AB]$ или $[BA]$.

Итак отрезок $[AB]$ есть класс точек, единственно определяемых A и B. Точки A и B принадлежат отрезку и называются *конечными точками*. Если мы исключим конечные точки, то класс оставшихся называется *внутренней частью* отрезка $[AB]$ и может быть обозначен (AB). Если (AB) нулевой класс, то отрезок $[AB]$ называется *пустым*.

6. Если X такая точка, что A принадлежит отрезку $[BX]$, то скажем, что X принадлежит к классу, обозначенному $[AB']$ и называемому продолжением $[AB]$ за точку A. Его граница состоит из точки A.

Так же определяется продолжение за точку B, внутренняя часть продолжения и пустое продолжение. Анологично 5 — 7 даются определения 10 — 12 для треугольника и 27 — 29 для тетраэдра.

8. Если A и B две различных точки, то *прямая* AB есть класс всех точек, которые принадлежат отрезку $[AB]$ или одному из двух его продолжений. Мы говорим, что три точки расположены прямолинейно, если какая-либо одна из них принадлежит прямой, определенной двумя другими.

Аналогичные определения даются для плоскости — 13 и пространства — 30.

15. Предположим, что мы имеем дело с системой (K,R), в которой плоскости имеют все свойства, требуемые постулатами 6 — 8. Тогда, если две прямые AB и CD лежат в одной плоскости и не имеют общей точки, то называются *параллельными* и мы пишем $AB \parallel CD$.

Для обозначения, что две прямые AB и CD или параллельны или совпадают, мы будем пользоваться обозначением $AB \sim CD$.

17. Пусть $[AB]$ некоторый данный отрезок. Если есть параллелограмм $AXBY$, в котором $[AB]$ диагональ, и если другая диагональ пересекает $[AB]$ в M, то M называется *средней* точкой отрезка $[AB]$. Если есть только одна такая точка M (что всегда будет иметь место в каждой системе, в которой постулаты 1 — 11 имеют силу), то M называется *срединой* $[AB]$, и мы пишем $M =$ ср. AB. В этом случае говорят, что отрезок $[AB]$ *разделен пополам* в M.

20. Если O точка внутри шара S, и если каждая пара хорд, которые пересекаются в O, суть диагонали параллелограмма, то O называется *центром* шара. Какая-либо хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*, и он делится в центре пополам. Каждая половина диаметра называется *радиусом*.

21. Два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ называются *конгруэнтными* — символически $AB \equiv CD$ — тогда и только тогда, когда удовлетворено одно из следующих условий:

1) Если два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ на одной прямой, то мы должны иметь или $[AB] = [CD]$, или ср. $AC =$ ср. BD, или ср. $AD =$ ср. BC, а если они лежат на параллельных прямых, то должны быть противоположными сторонами параллелограмма.

2) Если они имеют общую конечную точку (илн общую средину), но не лежат на одной прямой, то они должны быть радиусами (или диаметрами) одного шара.

3) Если они не лежат ни на одной прямой, ни на параллельных, и не имеют ни конечной общей точки, ни общей средины, то должны быть два отрезка $[OX]$ и $[OY]$, которые конгруэнтны данным отрезкам согласно 1) и конгруэнтны один другому согласно 2).

Здесь интересно то, что автор вместо точки, как основного понятия, берет твердое тело, шар. То же самое еще раньше было сделано Д. С. Шором [1]).

Постулатов у Э. В. Гентингтона 26.

Общие законы.

Пост. 1. Пусть A,B,C какие-либо (абстрактные) шары. Если A внутри B и B внутри C, то A внутри C.

2. Если A внутри B, то A и B различны.

3. a) Если класс шаров, содержащих точку A, тот же самый, что и класс шаров, содержащих точку B, то $A = B$. b) Если класс точек внутри шара S тот же самый, что и внутри шара T, то $S = T$.

4. Если X точка отрезка $[AB]$, то $(AB]$ „простая сумма" двух отрезков $[AX]$ и $[BX]$.

5. Если две прямых имеют две различных общих точки, они совпадают.

6. Если X точка треугольника $[ABC]$, то $[ABC]$ „простая сумма" трех треугольников $[ABX]$, $[ACX]$ и $[BCX]$.

7. Если отрезок $[XY]$ пересекает отрезок $[AB]$, то треугольники $[ABX]$ и $[ABY]$ не имеют общей точки, исключая точек $[AB]$.

8. Если две плоскости имеют три общих не прямолинейно расположенных точки, они совпадают.

9. Если две прямые параллельны третьей, то они или параллельны или совпадают.

10. Если AB и CD параллельные прямые, то ни одна из 4 точек A,B,C,D не лежит внутри треугольника, образованного тремя другими.

11. (4-хточечный пост.). Пусть A,B,C,D какая-либо совокупность 4 точек, никакие три из которых не расположены прямолинейно, и A',B',C',D' какая-либо другая совокупность 4 точек, никакие три из которых не расположены прямолинейно. Рассмотрим две совокупности из 6 прямых AB, AC, AD, BC, BD, CD и $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $B'C'$, $B'D'$, $C'D'$, которые определяют эти точки. Если первые пять прямых одной совокупности, взятые в порядке, параллельны (или совпадают) первым пяти прямым другой совокупности, взятым в том же порядке, то оставшаяся шестая прямая первой совокупности будет параллельна (или совпадать) с оставшейся шестой прямой другой совокупности. Т. е. если $AB \sim A'B'$, $AC \sim A'C'$, $AD \sim A'D'$, $BC \sim B'C'$ и $BD \sim B'D'$, то также $CD \sim C'D'$.

12. Если $AB \equiv CD$ и $CD \equiv EF$, то $AB \equiv EF$.

13. Если поверхности двух концентрических шаров пересечены одним радиусом в A и X и другим радиусом в B и Y, то $[AX] \equiv [BY]$.

14. Пусть A,B,C,X четыре точки, из которых первые три расположены прямолинейно, и пусть A',B',C',X' другая совокупность

[1]) Д. С. Шор. Геометрия фигур. Вестник Опытной Физики, № 386, сп. 36—39.

четырех точек, из которых первые три расположены прямолинейно. Рассмотрим две совокупности из шести отрезков, определяемых этими точками. Тогда, если $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$, $AX \equiv A'X'$ и $BX \equiv B'X'$, то мы будем всегда иметь также $CX \equiv C'X'$.

15. Если X точка тетраэдра $[ABCD]$, то $[ABCD]$ „простая сумма“ четырех тетраэдров $[ABCX]$, $[ABDX]$, $[ACDX]$ и $[BCDX]$.

16. Если отрезок $[XY]$ пересекает треугольник $[ABC]$, то тетраэдры $[ABCX]$ и $[ABCY]$ не имеют никаких общих точек кроме точек $[ABC]$.

17. Если $ABCD$ есть пространство, то каждая точка принадлежит этому пространству.

18. Если прямая XY параллельна плоскости ABC, то ни одна из 5 точек A, B, C, X, Y не принадлежит тетраэдру, образуемому 4 другими.

Постулаты существования.

E 1. В классе K существуют по крайней мере две различных точки.

E 2. Если AB прямая, то есть точка X вне этой прямой.

E 3. Если AB прямая и C точка вне этой прямой, то есть такая точка X, что $CX \parallel AB$. Система, в которой удовлетворяется этот постулат, может быть названа системой, в которой можно свободно проводить параллельные прямые. Вообще, только в таких системах определения, относящиеся к конгруэнтности, имеют какой-либо смысл.

E 4. Если $[AB]$ какой-либо отрезок в системе, в которой параллельные можно проводить свободно, то на какой-либо полупрямой OP есть такая точка X, что $[OX] \equiv [AB]$. Т. е. какой-либо данный отрезок можно „отложить“ на какой-либо данной полупрямой.

E 5. Если S_1, S_2, $S_3 \ldots$ бесконечная последовательность шаров, каждый из которых лежит внутри одного из предшествующих, то есть точка X, которая лежит внутри их всех.

E 6. Если какой-либо шар имеет центр, то каждый шар имеет центр, при условии, конечно, что это не одна и та же точка.

E 7. Если ABC плоскость, то есть по крайней мере одна точка вне этой плоскости.

Постулаты Э. В. Гентингтон разделил на две группы: 1) постулаты „общие законы“ и постулаты „существования“. „Под постулатом существования мы понимаем постулат, который требует существования некоторого элемента, удовлетворяющего определенным условиям, например, предложение, что прямая, проходящая через вершину треугольника и внутреннюю точку, должна пересекать противоположную сторону, или предложение, что через точку вне данной прямой всегда возможно провести по крайней мере одну параллельную. Под общим законом мы понимаем предложение формы: *если* такие-то и такие-то точки, прямые и пр. существуют, *то* между ними будут такие-то и такие-то отношения“; например, предложение, что если B между A и C и X между A и B, то X между A и C; или предложение, что если две различных прямых параллельны третьей прямой, то они параллельны одна другой“ (сн. 523 — 524).

Автор сам признает, что его попытка не вполне удачна. В примечании к т. 15 он говорит, что хотя постулат 9 дан в форме общего закона, однако дает возможность заключить о существовании точек пересечения многих прямых; при этом автор добавляет, что такое же замечание применимо и к постулату 10. Эти постулаты можно было бы назвать замаскированными постулатами существования. Собственно говоря, этими словами автор сам разрушает свое построение. Мы можем добавить, что замечание автора может быть приложено и к постулату 8, который дает теорему 13: „В треугольнике $[ABC]$, если X на стороне противоположной A и Y на стороне противоположной B, то отрезки $[AX]$ и $[BY]$ будут иметь общую точку“. Эта теорема нисколько не отличается от т. 19, которую автор называет теоремой относительно „существований“ и для которой автору понадобились постулаты $E_1 — E_3$. Теорема 19 гласит: „Если точка P внутри треугольника $[ABC]$, то прямая AP пересекает противоположную сторону (BC)“.

Э. В. Гентингтон как-будто видит существенное различие между двумя группами своих постулатов в том, что в постулатах существования в их заключении речь идет о новых элементах по сравнению с условием постулата. С нашей точки зрения это различие несущественно, так как в постулате нет разницы между условием и заключением. Этим и об'ясняется неудача Э. В. Гентингтона.

Для доказательства совместности своих постулатов Э. В. Гентингтон указывает пример, где роль точек играют шары конечных размеров.

Достаточность системы удостоверяется теоремой 47, теоремой достаточности: „Если две системы (K, R) удовлетворяют всем постулатам гл. II, то они изоморфны относительно K и R“.

К сожалению, и здесь, как и у О. Веблена, доказательства большей частью отсутствуют. В конце работы Э. В. Гентингтон дает доказательство 13 отдельных теорем, которые могли бы, по его мнению, затруднить читателя, но это, конечно, не может заменить связного изложения всей системы. Поэтому для нас *вопрос о достаточности системы Э. В. Гентингтона остается открытым.*

Относительно независимости своих постулатов Э. В. Гентингтон предупреждает, что „общие законы“ независимы друг от друга, а постулаты существования независимы друг от друга и от общих законов. При этом автор добавляет, что незначительными изменениями формулировки легко было бы обеспечить абсолютную независимость соединенного списка общих законов и постулатов существования, но что эти изменения внесли бы бесполезную искусственность, от которой постулаты в их теперешнем состоянии свободны.

Если бы не это последнее замечание о легкости добиться абсолютной независимости, то можно было бы и не включать работы

Э. В. Гентингтона в наш обзор. Мы полагаем, что добиться абсолютной независимости в рассматриваемой системе не так то легко, что сейчас будет видно.

По содержанию псевдогеометрий интерес новизны представляет пользование системами первоначальных чисел и составленных из них произведений, причем „точками“ оказываются первоначальные числа, а R = „множитель“, а также пример 1, о котором будет сказано дальше.

Автор широко пользуется применением vacuously, не давая почти нигде пояснений своих примеров и редко указывая, какие постулаты удовлетворяются vacuously. Убедившись на первых семи примерах, что автор пользуется vacuously не только для последующих постулатов, но и для предшествующих, мы, начиная с примера 7, уже не проверяли последующих постулатов. В отношении предшествующих постулатов автор пользуется vacuously: в прим. 3а для пост. 1; в прим. 6 для пост. 4 и 5; в прим. 8 для пост. 4, 5 и 7; в прим. 10 для пост. 4, 5, 7, 9; в прим. 15 для пост. 4 — 14; в прим. 16 для пост. 9, 11 — 14; в прим. 17 для пост. 4 — 16; в прим. 18 для пост. 4—14 и 16; в прим. E_1 для всех общих законов, а также и для всех последующих постулатов; в прим. E_2 для пост. 6 — 11; 13 — 18; в прим. E_3 для пост. 4 — 18; в прим. E_4 для пост. 12 — 14; в прим. E_7 для пост. 15 — 18.

Мы приведем лишь несколько примеров.

„*Пример 16.* Пусть K будет класс, содержащий следующие числа:

1) семь первоначальных чисел: A, B, C, D, X, Y, Z;

2) все произведения этих чисел по два, *исключая* XY;

3) все произведения этих чисел по три, *исключая* ABC, AXY, BXY, CXY и XYZ;

4) все произведения этих чисел по четыре, *исключая* $ABCX$, $ABCY$, $ABCZ$, $ABDX$, $ABXY$, $ACDY$, $ACXY$, $AXYZ$, $BCXY$, $BXYZ$ и $CXYZ$;

5) следующие произведения чисел по пяти: $ABCDZ$, $ABDXZ$, $ABDYZ$, $ACDXZ$, $ACDYZ$, $ADXYZ$, $BCDXY$, $BCDXZ$, $BCDYZ$, $BDXYZ$, $CDXYZ$;

6) следующие производения чисел по шести: $ABCDXZ$, $ABCDYZ$, $ABDXYZ$, $ACDXYZ$, $BCDXYZ$;

7) число $ABCDXYZ$;

и пусть R есть отношение „множитель“.

Здесь все отрезки пустые, исключая $[XY]$, который содержит D, и все треугольники пустые, исключая $[ABC]$, который содержит D. Все тетраэдры пустые, исключая $[ABDX]$, $[ABCX]$, $[ABXY]$, $[ACDY]$, $[ABCY]$ и $[ACXY]$, каждый из которых содержит Z. Постулат 16 не удовлетворяется, так как Z лежит по обе стороны плоскости ABC“ (сн. 552—553).

Вот и все. Здесь, как уже указано, постулаты 9, 11 — 14 удовлетворяются vacuously, но постулат 10 просто не удовлетворяется, даже с точки зрения автора, хотя автор этого и не замечает.

В плоскости ABC есть точка D. Прямые AB и CD общей точки не имеют, так как все отрезки, кроме $[XY]$, пустые. По опр. 15 прямые AB и CD параллельны, так как постулаты 6 — 8 удовлетворяются (ср. пример 18). *Постулат 10 не удовлетворяется,* так как точка D лежит внутри треугольника ABC.

Пример E 1 представляет повторение K_1 О. Веблена.

Впечатление неожиданности производит пример 1.

Пример 1. Пусть K будет класс, состоящий из трех особ: человека A, его отца B и его деда C. Пусть R будет отношение „сын". Тогда ARB и BRC истинны, в то время как ARC ложно, так что постулат 1 не удовлетворяется. Так как в этой системе есть только одна „точка", именно A, то все другие общие законы 2 — 18 удовлетворены vacuously, т. е. условия, при которых эти постулаты становятся действующими, не выполнены (сн. 549).

Мы можем предложить пример еще более неожиданный.

Пусть класс K состоит из трех об'ектов: волка A, козы B и капусты C, и пусть $R =$ „ест". Тогда ARB и BRC истинны, а ARC ложно.

Мы полагаем, что пример Э. В. Гентингтона, как и наш, доказывает только то, что не всякое отношение транзитивно, но не больше.

Заметим по поводу рассмотренной системы постулатов, что она наиболее громоздкая из известных нам, за исключением системы М. Гейгера, несмотря на то, что в ней всего два основных понятия, как и в системе О. Веблена. Только постулатов о параллельных пять. Подводя итоги, видим, что *Э. В. Гентингтон доказал совместность своих постулатов; независимость, даже порядковая, не доказана; вопрос о достаточности остается открытым.*

§ 6. Заключение.

Прежде чем перейти к общим выводам, мне хотелось бы коснуться еще затронутого В. Ф. Каганом вопроса о минимуме требований в постулатах. Вопрос о минимуме можно рассматривать с двух сторон.

Во-первых, можно стремиться к минимуму утверждений. Тогда оказывается, что аксиома I_3 Д. Гильберта сложна и легко разбивается на две. Также сложны акс. VIII О. Веблена, пост. I В. Ф. Кагана и многие другие. Так как постулат есть недоказанная теорема, то принимая во внимание классическую форму теоремы, можно сказать, что минимальное количество утверждений во всяком постулате два: одно в условии и другое в заключении. Постулаты, состоящие из одного утверждения, в роде того, что существуют по крайней мере две различных точки или существует по крайней мере одна точка является излишними, так как неизбежно повторяются в условиях последующих постулатов.

Мы полагаем, что минимум утверждений можно считать обязательным. Этот минимум утверждений можно назвать минимумом содержания.

Во-вторых, можно стремиться к тому, чтобы утверждения постулата касались наименьшего числа об'ектов. Например, аксиома XII О. Веблена относится ко всякой плоскости и ко всякой прямой в плоскости, а допущение P_0 Р. Л. Мура к одной плоскости и одной прямой в ней. Судя по примеру Р. Л. Мура, такой минимум ведет к увеличению числа аксиом, что вряд ли желательно. Впрочем, имеющиеся примеры не позволяют сделать решительного заключения об обязательности или даже возможности такого минимума. Этот минимум в отличие от первого можно назвать минимумом об'ема.

Подводя общий итог, мы видим, что авторы рассмотренных работ поставленной себе цели не достигли отчасти, конечно, вследствие того, что вопросы, встретившиеся им, еще не были решены и стали ясны теперь именно благодаря их работам. *Мы еще не имеем системы постулатов необходимых и достаточных для построения евклидовой геометрии*, необходимых, как раз'яснено выше, в пределах каждой выставленной системы. Построение такой системы, являющейся сейчас очередной и насущной задачей, дело будущего. Мы не разделяем пессимизма Ф. Шура [1]) относительно возможности построения системы абсолютно независимых постулатов. П. Герц [2]) доказал, правда для предложений вида $a \to b$, что для замкнутой системы таких предложений всегда имеется по крайней мере одна система независимых аксиом.

Тем не менее рассмотренные нами работы имеют большое значение, так как они расчистили путь для будущих исследователей. Поставив себе в нашем обзоре узкие рамки, мы не могли указать на многие достоинства этих работ. Авторы подходили к решению задачи с различных точек зрения, в их работы вложено столько труда и искусства, что эти работы являются для каждого занимающегося основаниями геометрии прекрасной школой. Особенно в этом отношении ценна работа В. Ф. Кагана, единственная, дающая полное развитие системы и наиболее удачная в отношении независимости постулатов.

9 января 1926 г.

Übersicht. Es werden die der Begründug der Euklidishen Geometrie gewidmeten Werke von O. Veblen, W. Kagan, R. Moore und E. Huntington betrachtet. Der Verfasser beschäftigt sich nur mit Grundprämissen dieser Systeme von Axiomen: Grundbegriffen, Gruddefinitionen und Postulaten. Die Frage über die Unabhängigkiet der Postulate bespechend, zeigt er im § 1, die Benutzung von „vacuoulsy" sei bei den Unabhängigkeitsbeweisen unerlaubt. Im § 2 wird gezeigt, dass man zum Hinreichendheitsbeweise eines Axiomsystems die Entwickelung des Systems mit dem Beweise des Hinreichendheitstheorems, wie es E. Huntingten nennt, abschliéssen kann. Was die Grundbegriffe

---

[1]) l. c. Vorwort, s. VII.

[2]) P. Hertz. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. Math. Ann. Bd 87, S. 246 — 269, § 9.

anlangt, beweist keiner der genannten vier Autoren deren Nichtreducierbarkeit. W. Kagan's Versuch die Unabhängigkeit seiner Grunddefinitionen zu beweisen ist nicht gelungen. Die Verträglichkeit der Postulaten beweisen nur W. Kagan und E. Huntington. Absolute Unabhängigkeit der Postulaten hat keiner von vier Autoren erreicht. Ordinal unabhängig sind nur Systeme von W. Kagan und R. Moore. W. Kagan's System ist nicht hinreichend, die Frage über Hinreichendheit dreier übrigen bleibt offen.

Wir besitzen also noch kein Axiomsiystem der Euklidischen Geometrie das sämmtlichen drei Forderungen: der Vertäglichkeit, absoluter Unabhängigkeit und Hinreichendheit genüge.

Метод интегрирования дифференциального уравнения с частными производными второго порядка по двум переменным независимым приведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений Pfaff'a.

Ц. Руссьян.

ПЕРВАЯ СТАТЬЯ.

Обычно применяемый метод интегрирования дифференциального уравнения с частными производными второго порядка по двум переменным независимым

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

есть метод характеристик *).

Я намерен изложить метод интегрирования, представляющий обобщение метода Lagrange'а отыскания полного интеграла дифференциального уравнения первого порядка путем интегрирования одного дифференциального уравнения в полных дифференциалах. В данном случае одно дифференциальное уравнение заменяется системой трех и вообще $2n-1$ уравнений этого вида.

Этот метод дает не только все результаты, полученные методом характеристик, но и новые, которые не могут быть получены этим последним; он дает также результаты, полученные J. König'ом **), применявшим к уравнению второго порядка метод Jacobi приведения интегрирования нелинейного уравнения первого порядка к интегрированию уравнения линейного.

§ 1.

Мы полагаем, что данное дифференциальное уравнение заключает хоть одну из вторых производных r, t, так как противный случай можно было бы свести к этому линейным преобразованием переменных независимых. Мы предположим далее, что оно разрешено относительно r и имеет вид

$$r = \theta(x, y, z, p, q, s, t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

*) См., напр., Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

**) Mathematische Annalen, Bd XXIV.

Если $z=f(x,y)$ есть его интеграл, то система трех Pfaff'овых уравнений

$$\Omega_1=dz-pdx-qdy=0,\ \Omega_2=dp-\theta dx-sdy=0,\ \Omega_3=dq-sdx-tdy=0 \quad (\mathrm{I}')$$

с семью переменными x, y, z, p, q, s, t интегрируется пятью интегралами

$$z=f\ (x,y),\ p=\frac{\partial f}{\partial x},\ q=\frac{\partial f}{\partial y},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Обратно, если система пяти уравнений

$$u_i\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t,)=0 \quad i=1\ldots 5$$

есть система интегралов Pfaff'овой системы (I') и разрешима относительно z, p, q, s, t, то определенная из них функция $z=f(x,y)$ есть интеграл дифференциального уравнения (I). Таким образом, интегрирование данного дифференциального уравнения второго порядка (I) сводится к интегрированию Pfaff'овой системы (I') пятью интегралами, разрешимыми относительно z, p, q, s, t.

Если $z=f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I), т. е. если он заключает пять произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 и так, что уравнения $z=f\ (x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5),\ p=\dfrac{\partial f}{\partial x},\ q=\dfrac{\partial f}{\partial y},\ s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ разрешимы относительно них, то полученные уравнения $u_i\,(x, y, z, p, q, s, t)=c_i$ $i=1\ldots 5$ представляют систему пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I'). Обратно, если система пяти уравнений $u_i\,(x\ldots t)=c_i$ $i=1\ldots 5$ есть система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I') и если они разрешимы относительно z, p, q, s, t, то определенная из них функция $z=f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I). Займемся отысканием его.

Займемся для этого отысканием системы пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I').

Она имеет следующие свойства:

Pfaff'ова система (I') интегрируется не менее, чем пятью независимыми интегралами. В самом деле, из формы ее следует, что z, p, q суть функции x, y. Подставляя выражение $q=q\,(x,y)$ в последнее уравнение системы, получим

$$\left(s-\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx+\left(t-\frac{\partial q}{\partial y}\right)dy=0$$

уравнение в четырех переменных x, y, s, t, которое интегрируется, очевидно, не менее, чем двумя интегралами, откуда и следует утверждение.

Pfaff'ова система (I') не допускает интегрируемой комбинации. Иначе мы имели-бы, что

$$\lambda_1\,\Omega_1+\lambda_2\,\Omega_2+\lambda_3\,\Omega_3=du$$

где λ_1, λ_2, λ_3 не все нули и функция u не заключает переменных s, t; поэтому, в силу соотношений

$$\lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial z}, \ \lambda_2 = \frac{\partial u}{\partial p}, \ \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial q}$$

мы имели бы, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial p} s + \frac{\partial u}{\partial q} t = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \lambda_2 = 0, \ \frac{\partial u}{\partial q} = \lambda_3 = 0,$$

а поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Omega_1 = du(x, y, z),$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} p = -\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial z} q = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

и снова следовало бы, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda_1 = 0.$$

Итак, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, что невозможно.

Пусть теперь система уравнений $u_i(x, y, z, p, q, s, t) = c_i$ $i = 1 \dots 5$ будет система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I'). Пусть $u_1(x, z, p, q, s, t)$ будет какая-либо из функций u_i $i = 1 \dots 5$ так, что по предыдущему уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \ du_1 = 0$$

линейно независимы. Можно среди остальных функций u_j $i = 2 \dots 5$ найти функцию, напр., u_2 такую, что уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \ du_1 = 0, \ du_2 = 0$$

также линейно независимы.

Это утверждение есть частный случай общей теоремы: если Pfaff'ова система k независимых уравнений $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_k = 0$ интегрируется не менее, чем $m > k$ независимыми уравнениями и если, с другой стороны, имеем не менее, чем $m - 1$ независимых функций

$$u_1 \dots \ u_{m-1} \dots$$

таких, что $m - k - 1$ из них, напр., $n_1 \dots u_{m-k-1}$ таковы, что уравнения

$$\Omega_1 = 0 \dots \ \Omega_k = 0 \ \ du_1 = 0 \dots \ \ du_{m-k-1} = 0$$

линейно независимы, то среди остальных функций $u_{m-k} \dots$ можно найти такую функцию u, что m уравнений

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_k = 0, \ du_1 = 0 \dots \ du_{m-k-1} = 0, \ du = 0$$

снова линейно независимы.

В самом деле, в противном случае, выбрав какие-либо k функции u из остальных, напр., $u_{m-k} \dots u_{m-1}$, мы имели бы, что

$$du_s = \lambda_s' \, du_1 + \dots + \lambda_s^{m-k-1} \, du_{m-k-1} + \sum_1^k j \mu_s^j \, \Omega_j$$
$$s = m-k, \dots m-1.$$

Определитель $\triangle$ k-ой степени, составленный из коэффициентов μ_s^j, отличен от нуля, иначе мы имели бы одну или несколько зависимостей вида

$$\sum_1^{m-1} \alpha k_\alpha du_\alpha = 0,$$

где не все коэффициенты k_α нули, что невозможно, так как функции u независимы между собой.

Если же $\triangle$ отличен от нуля, то из написанных соотношений следовало бы, что

$$\Omega_j = \sum_1^{m-1} \alpha \lambda_j^\alpha \, du_\alpha$$

что невозможно, так как рассматриваемая Pfaff'ова система интегрируется не менее, чем m полными интегралами. Поэтому среди остальных функций u есть такая функция u, что уравнения

$$\Omega_1 = 0 \dots \quad \Omega_k = 0, \quad du_1 = 0 \dots \quad du_{m-k-1} = 0, \quad du = 0$$

линейно независимы.

Полагая $k = 3$, $m = 5$ и что функции $u_1 \dots u_5$ — рассматриваемые нами, получаем наше утверждение.

Пусть функция u_2 такова, что уравнения

$$\Omega_1 = 0, \; \Omega_2 = 0, \; \Omega_3 = 0, \; du_1 = 0, \; du_2 = 0$$

линейно независимы. Найдем необходимое и достаточное для этого условие. Оно состоит в том, чтобы не все определители пятой степени матриссы

$$\begin{matrix}
-p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t}
\end{matrix}$$

были равны нулю тождественно. Эту матриссу можно преобразовать в эквивалентную. Умножим элементы 3-й, 4-й и 5-й колонн соответственно на p, θ, s и прибавим к соответствующим элементам первой колонны; умножим затем элементы тех же колонн сответственно на q, s, t и прибавим к элементам второй колонны. Получим эквивалентную матриссу

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\bar{d}u_2}{dx} & \frac{\bar{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{vmatrix}$$

где

$$\frac{\bar{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + \theta\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\bar{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}.$$

Могут быть неравными нулю только те ее определители, которые заключают 3-ю, 4-ю и 5-ю колонны. Следовательно, искомое необходимое и достаточное условие, чтобы уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \quad du_1 = 0, \quad du_2 = 0$$

были линейно независимы, состоит в том, чтобы не все определители второй степени матриссы

$$\begin{Vmatrix} \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\bar{d}u_2}{dx} & \frac{\bar{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{Vmatrix} \qquad (A)$$

были равны нулю тождественно. Это условие будем называть условием (A).

Если Pfaff'ова система (I') должна быть проинтегрирована наименьшим числом пяти полных интегралов $u_i = c_i \ i = 1 \ldots 5$, то Pfaff'ова система пяти независимых уравнений

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad du_1 = 0, \quad du_2 = 0$$

должна быть сполна интегрируемой.

Необходимые и достаточные условия, чтобы система k независимых уравнений Pfaff'а

$$\sum_1^n i X_i^j \ \ dx_i = 0 \quad j = 1 \ldots k$$

с n переменными $x_1 \ldots x_n$ была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы были равны нулю тождественно определители $k+2$-й степени

$$\begin{vmatrix} X'_\alpha & \ldots\ldots\ldots & X'_\beta \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ X^k_\alpha & \ldots\ldots\ldots & X^k_\beta \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \\ X^j_\alpha & \ldots\ldots\ldots & X^j_\beta \end{vmatrix} \ {}^{*)} \qquad \begin{matrix} j = 1 \ldots k \\ \alpha \ldots \beta = 1 \ldots n. \end{matrix}$$

*) Ц. Руссьян, Записки Новороссийского Университета, 1898 г.

В данном случае они имеют вид:

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ -\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial n_2}{\partial s} & \frac{\partial n_2}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ -s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Первое условие есть тождество при произвольных функциях u_1, u_2. Второе и третье имеют вид

$$\frac{\bar{d}u_2}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\bar{d}u_2}{dy}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} + \frac{\partial u_2}{\partial s}\frac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(yt)} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx} + \frac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) = 0,$$

$$\frac{\bar{d}(u_2 u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(u_2 u_1)}{d(yt)} = 0,$$

где

$$\frac{\bar{d}(uv)}{\bar{d}(x\alpha)} = \frac{\bar{d}u}{dx}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\bar{d}v}{dx}, \quad \frac{\bar{d}(uv)}{d(y\alpha)} = \frac{\bar{d}u}{dy}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\bar{d}v}{dy}.$$

Таким образом функция u_2 должна удовлетворять системе линейных уравнений

$$\frac{\bar{d}f}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\bar{d}f}{dy}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(yt)} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx} + \frac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) = 0,$$

$$\frac{\overline{d}\,(fu_1)}{d\,(xs)} + \frac{\overline{d}\,(fu_1)}{d\,(yt)} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

при чем уравнения $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$, $du_1 = 0$, $du_2 = 0$ линейно независимо. Но легко видеть из формы этих уравнений в виде приравненных нулю определителей, что и все функции u_i $i = 1 \ldots 5$ должны удовлетворять этим условиям.

Рассмотрим теперь необходимые условия, которым должна удовлетворять только функция u_1.

Могут быть два случая: система (II) заключает два независимых уравнения, или одно уравнение есть следствие другого.

В первом случае она, как имеющая пять независимых решений u_i $i = 1 \ldots 5$, должна быть полной. Это приводит к условиям, которым должна удовлетворять функция u_1.

Если же одно из уравнений (II) есть следствие другого, это опять приводит к условиям, которым должна удовлетворять функция u_1. Этими условиями мы займемся ниже в связи с интегрированием данного дифференциального уравнения (I).

Теперь можем приступить к решению поставленного выше вопроса об определении системы пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I').

Пусть u_1 уже удовлетворяет упомянутым только что условиям. Тогда система (II) имеет не менее пяти независимых решений, среди которых находится и функция u_1. На основании вышедоказанной общей теоремы (стр. 115) среди остальных решений есть такое, напр., u_2, что уравнения системы

$$\Omega_1 = 0, \; \Omega_2 = 0, \; \Omega_3 = 0, \; du_1 = 0, \; du_2 = 0$$

линейно независимы, так что u_1, u_2 удовлетворяют условию (A). Так как функции u_1, u_2 удовлетворяют системе (II), она сполна интегрируема. Функции u_3, u_4, u_5 системы пяти полных интегралов $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$ Pfaff'овой системы (I') определяются, как независимые решения, отличные от u_1, u_2 полной системы двух линейных уравнений, соответствующих системе Pfaff'а

$$\Omega_1 = 0, \; \Omega_2 = 0, \; \Omega_3 = 0, \; du_1 = 0, \; du_2 = 0$$

Она имеет вид, как легко видеть, приравненных нулю двух независимых определителей матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\overline{d}f}{dx} & \dfrac{\overline{d}f}{dy} & \dfrac{\partial f}{\partial s} & \dfrac{\partial f}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\overline{d}u_1}{dx} & \dfrac{\overline{d}u_1}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\overline{d}u_2}{dx} & \dfrac{\overline{d}u_2}{dy} & \dfrac{\partial u_2}{\partial s} & \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{matrix} \quad (B)$$

Эту полную систему будем называть системой (B).

Итак, система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I') найдена, отвлекаясь на время от упомянутых условий для функции u_1. При чем, если два уравнения системы (II) независимы, она эквивалентна системе (B), как имеющая те же независимые решения. В этом случае система пяти полных интегралов, заключающая уравнение $u_1 = c_1$, — единственна.

Во втором случае, если одно уравнение системы (II) есть следствие другого, Pfaff'ова система (I') имеет бесчисленное множество систем полных интегралов, заключающих уравнение $u_1 = c_1$.

В самом деле, пусть $u_i = c_i$ $(i = 1 \ldots 5)$ есть одна система полных интегралов, определенных, как выше указано. Функции u_i $i = 1 \ldots 5$ суть решения единственного уравнения системы (II). Пусть u_6 будет последнее его решение, независимое от u_i $(i = 1 \ldots 5)$.

Пусть $\varphi(u_1 \ldots u_5; u_6)$ будет произвольная функция решений $u_1 \ldots u_6$, подчиненная единственному условию, заключать решение u_6. Если она с функцией u_1 удовлетворяет условию (A), ее можно принять за функцию v_2, аналогичную u_2, и, поступая, как выше, найдем систему пяти полных интегралов $u_1 = c_1$ $v_j = \Gamma_j$ $(j = 2 \ldots 4)$ Pfaff'овой системы (I'), но отличную от системы $u_i = c_i$ $(i = 1 \ldots 5)$, так как из последней не следует, чтобы $v_2 = \varphi(c_1 \ldots c_5;\ u_6)$ было постоянным.

Если же функция φ не удовлетворяет условию (A), так что все определители матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}u_1}{dx} & \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\overline{d}v_2}{dx} & \frac{\overline{d}v_2}{dy} & \frac{\partial v_2}{\partial s} & \frac{\partial v_2}{\partial t} \end{matrix} \qquad (A)$$

нули тождественно, функция $u_2 + \varphi(u_1 \ldots u_5;\ u_6)$ ему, очевидно, удовлетворяет и может быть взята за функцию, аналогичную u_2, и мы получим систему пяти полных интегралов, отличную от системы $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$.

Таким образом, мы имеем бесчисленное множество функций $\Psi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$, которые можем брать за решения аналогичные u_2.

Если предположим, что функции Ψ заключают все решения u_i $i = 1 \ldots 6$, получим бесчисленное множество независимых между собой систем по пяти интегралов Pfaff'овой системы (I'):

$$u_1 = c_1,\ \ \Psi_1 = c_2,\ \ v_3 = c_3,\ \ v_4 = c_4,\ \ v_5 = c_5;$$

$$u_1 = c_1,\ \ \Psi_2 = \Gamma_2.\ \ w_3 = \Gamma_3,\ \ w_4 = \Gamma_4,\ \ w_5 = \Gamma_5;$$

. . . .

так как, напр., Ψ_1 не есть функция от u_1, Ψ_2, w_3, w_4, w_5 только.

Необходимое и достаточное условие, чтобы имел место этот второй случай, состоит в том, чтобы были равны нулю тождественно определители матриссы

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)}, & \dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)}, & -\left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}+\dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}, & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dy} \end{Vmatrix} \quad (C),$$

составленной из коэффициентов уравнений системы (II). Если обозначим через $\triangle$, A, B, B_1, C определители ее

$$\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial s}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2$$

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} \\ -\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}+\dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right), & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} \\ -\dfrac{\overline{d}u_1}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} & \dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s} & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}+\dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dy} \end{vmatrix},$$

легко убедиться, что $B \equiv B_1$, $A \equiv \triangle \dfrac{\overline{d}\theta}{dy} + B\dfrac{\partial\theta}{\partial s} + C\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$.

§ 2.

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании Pfaff'овой системы (I') в связи с интегрированием данного дифференциального уравнения (I). Здесь могут представиться три случая:

$$1)\ \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0,$$

$$2)\ \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \equiv 0,$$

но не все элементы равны нулю;

$$3)\ \frac{\partial u_{1,2}}{\partial s} \equiv \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} \equiv 0.$$

В этой статье мы рассмотрим первый и второй случай. Третьему мы посвятим особую статью.

Пусть $\dfrac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(st)} \neq 0$. В этом случае полная система (B) имеет вид

$$\frac{\overline{d}(fu_1 u_2)}{d(x,s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{d}f}{dx}, & \dfrac{\partial f}{\partial s}, & \dfrac{\partial t}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_1}{dx}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_2}{dx}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial n_2}{\partial t} \end{vmatrix} = 0, \quad \frac{\overline{d}(fu_1 u_2)}{d(y,s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{d}f}{dy}, & \dfrac{\partial f}{\partial s}, & \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_1}{dy}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_2}{dy}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{vmatrix} = 0;$$

Она разрешима относительно $\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial f}{dy}$, а потому ее независимые решения u_i $i=1\ldots5$ независимы относительно z, p, q, s, t; система пяти полных интегралов $u_i=c_i$ $i=1\ldots5$ Pfaff'овой системы (I′) разрешима относительно z, p, q, s, t и определенная из них функция $z=f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I)).

Этот случай распадается в свою очередь на два в зависимости от того, будут ли уравнения системы (II) независимы между собой, или одно есть следствие другого. В первом случае, Pfaff'ова система (I′) имеет одну только систему полных интегралов, заключающую уравнение $u_1(x\ldots t)=c_1$, и поэтому данное дифференциальное уравнение второго порядка (I) имеет один только полный интеграл, удовлетворяющий другому дифференциальному уравнению второго порядка

$$u_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t)=c_1.$$

Во втором случае Pfaff'ова система (I′) имеет бесчисленное множество различных систем полных интегралов, заключающих уравнение $u_1(x\ldots t)=c_1$, и, следовательно, данное дифференциальное уравнение второго порядка (I) имеет бесчисленное множество полных интегралов, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$u_1^2(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t)=c_1.$$

Рассмотрим первый случай.

В этом случае функции u_i $i=1\ldots5$ суть все независимые решения системы (II), которая должна быть полной, что даст условия для функции u_1.

Найдем их. Так как в этом случае система (II) эквивалентна системе (B), разрешимой относительно $\frac{\overline{d}f}{dx}, \frac{\overline{d}f}{dy}$, она сама должна быть разрешимой относительно $\frac{\overline{d}f}{dx}, \frac{\overline{d}f}{dy}$, а потому $\triangle \neq 0$, т. е. u_1 должна удовлетворять неравенству

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial\theta}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2\neq 0.$$

Разрешив систему (II), получим:

$$\triangle\frac{\overline{d}f}{dx}+A\frac{\partial f}{\partial s}+B\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$\triangle\frac{\overline{d}f}{dy}+B\frac{\partial f}{\partial s}+C\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Чтобы она была полной, необходимо и достаточно, чтобы ей соответствующая Pfaff'ова система пяти уравнений была сполна интегрируемой.

Эта последняя имеет вид:

$$\Omega_1 = dz - p dx - q\,dy = 0, \quad \Omega_2 = dp - \theta dx - s dy = 0,$$

$$\Omega_3 = dq - s dx - t\,dy = 0, \quad \triangle\, ds - A\,dx - B dy = 0,$$

$$\triangle\, dt - B dx - C dy = 0.$$

Необходимое и достаточное условие, чтобы она была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы были равны нулю тождественно определители

$$\begin{vmatrix} -p, & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta, & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s, & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -A, & -B & 0 & 0 & 0 & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & \triangle \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ a & b & \ldots & \ldots & \ldots & c & d \end{vmatrix}$$

где $a, b \ldots c, d$ суть коэффициенты при $dx, dy, \ldots . ds, dt$ ее уравнений. Употребляя то же преобразование, которое мы употребляли при выводе условия (A) (стр. 116), этим условиям можно дать вид

$$\begin{vmatrix} -A, & -B, & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Если a, b, c, d суть коэффициенты при dx, dy, ds, dt первого и третьего уравнений, эти условия суть тождества. Если a, b, c, d суть коэффициенты второго уравнения, соответствующее условие есть тождество в силу соотношения

$$A \equiv \triangle \frac{\overline{d\theta}}{dy} + B\frac{\partial\theta}{\partial s} + C\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdot$$

Остаются таким образом только два условия

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} -A, & -B & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ -A & -B & \triangle & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} -A, & -B & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{ds} & \frac{\partial}{dt} \\ -B & -C & 0 & \triangle \end{vmatrix} = 0$$

Найдем их вид и покажем, что они сводятся к одному. Для этого выведем свойство определителей α, β, где функция $u_1(x, y \ldots t)$ произвольна. Разлагая их и пользуясь тем, что

$$\triangle\frac{\bar{d}u_1}{dx}+A\frac{\partial u_1}{\partial s}+B\frac{\partial u_1}{\partial t}\equiv 0,\quad \triangle\frac{\bar{d}u_1}{dy}+B\frac{\partial u_1}{\partial s}+C\frac{\partial u_1}{\partial t}\equiv 0$$

при произвольном виде функции u_1, имеем, что

$$-\alpha.\frac{\partial u_1}{\partial s}\equiv\triangle\left[\triangle\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right)-B\left(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(yt)}\right)-\right.$$

$$-\frac{\bar{d}u_1}{dx}\left(\triangle\frac{\bar{d}\triangle}{dy}+B\frac{\partial\triangle}{\partial s}+C\frac{\partial\triangle}{\partial t}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\triangle\frac{\bar{d}A}{dy}+B\frac{\partial A}{\partial s}+C\frac{\partial A}{\partial t}\right)-$$

$$\left.-\frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\triangle\frac{\bar{d}B}{dy}+B\frac{\partial B}{\partial s}+C\frac{\partial B}{\partial t}\right)\right],$$

$$\beta\frac{\partial u_1}{\partial t}=\triangle\left[\triangle\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right)-B\left(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(yt)}\right)-\frac{\bar{d}u_1}{dy}\left(\triangle\frac{\bar{d}\triangle}{dx}+\right.\right.$$

$$\left.+A\frac{\partial\triangle}{\partial s}+B\frac{\partial\triangle}{\partial t}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\triangle\frac{\bar{d}B}{dx}+A\frac{\partial B}{\partial s}+B\frac{\partial B}{\partial t}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\triangle\frac{\bar{d}C}{dx}+\right.$$

$$\left.\left.+A\frac{\partial C}{\partial s}+B\frac{\partial C}{\partial t}\right)\right].$$

или проще: обозначая через $\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}$ операции

$$\triangle\frac{\bar{d}}{dx}+A\frac{\partial}{\partial s}+B\frac{\partial}{\partial t},\quad \triangle\frac{\bar{d}}{dy}+B\frac{\partial}{\partial s}+C\frac{\partial}{\partial t},$$

имеем, что

$$-\alpha\frac{\partial u_1}{\partial s}\equiv\triangle\left[\varDelta\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right)-B\left(\frac{\bar{d}(\varDelta u_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(\varDelta u_1)}{d(yt)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{d}u_1}{dx}\frac{\delta\varDelta}{\delta y}-\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta A}{\delta y}-\frac{\partial u_1}{dt}\frac{\delta B}{\delta y}\right],$$

$$\beta\frac{\partial u_1}{\delta t}\equiv\triangle\left[\varDelta\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right)-B\left(\frac{d(\varDelta u_1)}{d(xs)}+\frac{\bar{d}(\varDelta u_1)}{d(yt)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{d}u_1}{dy}\frac{\delta\varDelta}{\delta x}-\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta B}{\delta x}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\delta C}{\delta x}\right].$$

Можно показать, что

$$\frac{\bar{d}u_1}{dx}\frac{\delta\varDelta}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta A}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\delta B}{\delta y}\equiv\frac{\bar{d}u_1}{dy}\frac{\delta\varDelta}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta B}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial l}\frac{\delta C}{\delta x}$$

и что, следовательно,

$$-\alpha\frac{\partial u_1}{\partial s}\equiv\beta\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Именно, так как

$$\frac{\delta u_1}{\delta x}\equiv 0,\quad \frac{\delta u_1}{\delta y}\equiv 0,$$

то

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta u_1}{\delta y}\right) \equiv 0\,, \quad \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x}\right) \equiv 0.$$

Заменяя в первом тождестве $\frac{\delta u_1}{\delta y}$ его выражением, получим

$$\frac{\delta \Delta}{\delta x}\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\delta B}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\delta C}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv -\triangle \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\overline{d}u_1}{d_y}\right) - B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) - C\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right).$$

Переставляя во второй части порядок дифференцирования и помня, что

$$\frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) \equiv \frac{\overline{d}}{\delta y}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - \frac{\overline{d}\theta}{dy}\frac{\partial u_1}{\partial p},$$

$$\frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial p} - \frac{\partial u_1}{\partial q}, \quad \frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial p},$$

$$\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p}, \quad \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial q},$$

$$A \equiv \triangle\frac{\overline{d}\theta}{dy} + B\frac{\partial\theta}{\partial s} + C\frac{\partial\theta}{\partial t},$$

дадим первому тождеству вид

$$\frac{\delta \Delta}{\delta x}\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\delta B}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\delta C}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv -\triangle \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) - B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right).$$

Второе же тождество по замене $\frac{\delta u_1}{\delta x}$ его выражением имеет вид

$$\frac{\delta\triangle}{\delta y}\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\delta A}{\delta y}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\delta B}{\delta y}\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv -\triangle\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\overline{d}u_1}{ux}\right) - A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) - B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right).$$

Откуда, сравнивая эти тождества, получим, что

$$\frac{\overline{d}u_1}{\alpha x}\frac{\delta\triangle}{\delta y} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta A}{\delta y} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\delta B}{\delta y} \equiv \frac{\overline{d}u_1}{dy}\frac{\delta\triangle}{\delta x} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta B}{\delta x} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\delta C}{\delta x} \text{ ч. и т. д.}$$

Итак,

$$\alpha\frac{\partial u_1}{\partial s} \equiv \beta\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Откуда следует, что определители α, β—полиномы относительно производных, имеют вид

$$-\alpha \equiv \omega\frac{\partial u_1}{\partial t}\,, \quad \beta \equiv \omega\frac{\partial n}{\partial s}.$$

Поэтому условия $\alpha = 0$, $\beta = 0$ сводятся к

$$\omega\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0\,, \quad \omega\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0.$$

Но так как $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ не нули одновременно, иначе было бы, что

$$\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} = 0,$$

находим, что оба условия сводятся к одному

$$\omega = 0.$$

Это и есть искомое условие для функции $u_1\ (x \ldots t)$.

Оно в развернутом виде есть

$$\triangle\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xt)}\right) - \frac{\bar{d}u_1}{dx}\left(\triangle\frac{\bar{d}\triangle}{dy} + B\frac{\partial\triangle}{\partial s} + \right.$$
$$\left. + C\frac{\partial\triangle}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\triangle\frac{\bar{d}A}{dy} + B\frac{\partial A}{\partial s} + C\frac{\partial A}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\triangle\frac{\bar{d}B}{dy} + B\frac{\partial B}{\partial s} + \right.$$
$$\left. + C\frac{\partial B}{\partial t}\right) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

или же

$$\triangle\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(yt)}\right) - \frac{\bar{d}u_1}{dy}\left(\triangle\frac{\bar{d}\triangle}{dx} + A\frac{\partial\triangle}{\partial s} + \right.$$
$$\left. + B\frac{\partial\triangle}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\triangle\frac{\bar{d}B}{dx} + A\frac{\partial B}{\partial s} + B\frac{\partial B}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\triangle\frac{\bar{d}C}{dx} + \right.$$
$$\left. + A\frac{\partial C}{\partial s} + B\frac{\partial C}{\partial t}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

по сокращении левых частей на $\frac{\partial n_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$. Это есть дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка, линейное относительно вторых производных*). Его порядок при решении данной задачи не понижается, так как оно заключает член

$$-\triangle\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Итак, полный интеграл данного дифференциального уравнения второго порядка (I) находится в этом случае следующим образом: ищется функция $u_1\ (x, y, z, p, q, s, t)$, как интеграл уравнения (III) такой, что $\triangle \neq 0$. Функции $u_2 \ldots u_5$ ищутся, как остальные независимые решения полной системы (II). Они независимы относительно z, p, q, s, t.

Решая уравнения $u_i = c_i \quad i = {}_1 \ldots {}_5$ относительно z, p, q, s, t, находим искомый полный интеграл $z = f\ (x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5)$ данного дифференциального уравнения (I) единственный, который удовлетворяет уравнению второго порядка

$$u_1\ (x\,y\,z\,p\,q\,s\,t) = c_1.$$

*) Дифференциональное уравнение второго порядка, которому должна удовлетворять функция $u_1(x \ldots t)$ найдено J. König'ом (l. c.) иным путем.

§ 3.

Полагая опять, что $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0$, рассмотрим второй случай, когда одно уравнение системы (II) есть следствие другого. В этом случае все определители матриссы (C) нули, а потому и

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\;\frac{\partial u_1}{\partial s}\;\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 = 0\,.$$

Из этого условия следует, что $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$, иначе было бы, что и $\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$, а, следовательно и $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \equiv 0$.

Если же $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$, то независимые определители матриссы (C), суть $\triangle$, B, C. Но так как

$$\triangle\frac{\overline{d}u_1}{dy} + B\frac{\partial u_1}{\partial s} + C\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv 0,$$

то необходимое и достаточное условие, чтобы все определители матриссы (C) были нули тождественно, состоит в том, чтобы

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\;\frac{\partial u_1}{\partial s}\;\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

$$C = \left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\overline{d}(\theta u_1)}{(dys)}\right)\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\overline{d}u_1}{dy}\;\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \;\ldots\ldots\; \text{(IV)}$$

— искомые условия для функции u_1.

Если λ, μ суть корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\xi - \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \;(a),$$

то дифференциальные уравнения (IV), которым должна удовлетворять функция u_1, имеют одну из двух форм

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\overline{d}u_1}{dx} + \mu\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\overline{d}\theta}{dy}\;\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0 \;\ldots\; (\text{IV}_1),$$

или

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\overline{d}\theta}{dy}\;\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0 \;\ldots\; (\text{IV}_2).$$

Если функция $u_1\ (x, y, z, p, q, s, t)$ удовлетворяет какой-либо из этих линейных систем и если $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$, то функция $u_2\ (x, y, \ldots t)$ определяется, как решения уравнения

$$\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0,$$

к которому сводится система (II), так что $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0$, что всегда возможно, иначе дифференциальное уравнение $\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0$ было бы следствием предыдущего, что невозможно, так как оно не заключает $\frac{\partial f}{\delta x}$. Остальные функции u_3, u_4, u_5 определяются, как остальные независимые решения полной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\overline{d}(fu_1u_2)}{d(xst)} = 0\,, \quad \frac{\overline{d}(fu_1u_2)}{d(yst)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(B)}.$$

Если систему полных интегралов Pfaff'овой системы (II)

$$u_i\,(x, y, z, p, q, s, t = c_i \quad i = 1\ldots 5$$

разрешим относительно z, p, q, s, t, функция $z = f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий и дифференциальному уравнению

$$u_1\,(x\,y\,z\,p\,q\,s\,t) = c_1 \text{ *)}.$$

Таких полных интегралов есть в рассматриваемом случае бесчисленное множество, так как в этом случае есть бесчисленное множество различных систем пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I^1), заключающих уравнение $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$, и таких, что

$$\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0.$$

Доказательство, аналогично приведенному в общем случае (стр. 120).

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1,$$

которому удовлетворяет бесчисленное множество различных полных интегралов данного (I) находится в инволюции с данным.

Функция $u_1(x, y, z, p, q, s, t)$, удовлетворяющая одной из систем (IV_1) (IV_2), обладает, очевидно, свойством, что du_1 есть интегрируемая комбинация соответствующей Pfaff'овой системы, которая имеет или вид

$$dy - \mu dx = 0, \quad dz - pdx - qdy = 0, \quad dp - \theta dx - sdy = 0,$$

$$dq - sdx - tdy = 0, \quad ds + \lambda dt - \frac{\overline{d}\theta}{dy}dx = 0 \quad \ldots\ldots \text{(V}_1\text{)},$$

или вид

$$dy - \lambda dx = 0, \quad dz - pdx - qdy = 0, \quad dp - \theta dx - sdy = 0,$$

$$dq - sdx - tdy = 0, \quad ds + \mu dt - \frac{\overline{d}\theta}{dy}dx = 0 \quad \ldots\ldots \text{(V}_2\text{)}$$

---

*) Этот метод интегрирования указан J. König'ом (l. c.).

и представляет дифференциальные уравнения характеристик второго порядка данного дифференциального уравнения (I), соответствующих корням μ, λ квадратного уравнения (a).

Если v_1, v_2 суть решения одной и той же системы (IV_1), или (IV_2), можно положить $u_1 = \varphi\,(v_1, v_2)$ лишь бы

$$\frac{\partial\varphi(v_1, v_2)}{\partial s} \neq 0.$$

Если $u_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0\right)$ есть решение системы (IV_1), а v_1 системы (IV_2), можно принять функцию v_1, за u_2, лишь бы $\frac{\partial v_1}{\partial s} \neq 0$ и $\lambda \neq \mu$.

Мы не будем останавливаться долее на свойствах решений системы (IV), названных Goursat инвариантами (*l. c.*).

Изложенный способ определения полных интегралов данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющих дифференциальному уравнению $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$, находящемуся в инволюции с данным, т. е. которого левая часть $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t)$ удовлетворяет одной из систем (IV), состоит в том, чтобы найти решение u_2 дифференциального уравнения

$$\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

такое, что $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(xs)} \neq 0$ и затем определить функции u_3, u_4, u_5, как независимые решения полной системы

$$\frac{\overline{d}(fu_1u_2)}{d(xst)} = 0\,, \quad \frac{\overline{d}(fu_1u_2)}{d(yst)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Тогда система пяти уравнений $u_i = c_i \;\; i = 1 \ldots 5$, разрешимых относительно z, p, q, s, t есть полный интеграл Pfaff'овой системы (I^1) и дает искомый полный интеграл данного дифференциального уравнения (I). Но функции u_3, u_4, u_5 суть также решения уравнения

$$\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0 \text{ (II) (стр. 119).}$$

Поэтому мы, зная функцию u_1, искали еще четыре решения этого уравнения, так что уравнения $u_i = c_i \;\; i = 1 \ldots 5$ представляют систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I'), разрешимую относительно z, p, q, s, t.

Мы решим теперь более общий вопрос, который даст и иные интегралы дифференциального уравнения (I), удовлетворяющие уравнению $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$: зная функцию u_1 и зная все решения дифференциального уравнения (II), найти систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I'), разрешимых относительно z, p, q, s, t, и заключающих уравнение $u_1 = c_1$.

Иначе, зная функцию u_1 и систему интегралов Pfaff'овой системы, соответствующей дифференциальному уравнению (II), найти систему интегралов Pfaff'овой системы (I'), разрешимую относительно z, p, q, s, t и заключающую уравнение $u_1 = c_1$.

Pfaff'ова система, сответствующая уравнению (II), имеет вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} dy - \frac{\partial u_1}{\partial t} dx = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial s} dz - \left(p \frac{\partial u_1}{\partial s} + q \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) dx = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} dp - \left(\theta \frac{\partial u_1}{\partial s} + s \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) dx = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial s} dq - \left(s \frac{\partial u_1}{\partial s} + t \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) dx = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} ds + \frac{du_1}{dx} dx = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial s} dt + \frac{du_1}{dy} dx = 0.$$

Но функция u_1 удолетворяет системе (IV_1), или (IV_2). Положим, что она удовлетворяет системе (IV_1) так, что $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s}$. Эта система имеет тогда вид:

$$dy\ \lambda dx = 0, \quad dz\ (p + \lambda q)\, dy = 0, \quad dp - (\theta + \lambda s)\, dx = 0 \quad . \quad \text{(VI)}$$

$$dq - (s + \lambda t)\, dx = 0, \quad ds + \frac{\frac{du_1}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}} dt = 0, \quad dt + \frac{\frac{du_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}} dx = 0.$$

Пусть

$$y = y(x, x_0 \ldots t_0) \ldots t = t(x, x_0 \ldots t_0)$$

будет система полных интегралов ее, главная относительно $x = x_0$. Рассмотрим формулы преобразования

$$x = \alpha - \alpha_0 + x_0, \ \ y = y(x,\ x_0 \ldots t_0) \ldots t = t(x,\ x_0 \ldots t_0)$$

переменных $x, y \ldots t$ к новым $x_0 \ldots t_0$, где α есть параметр. Так как $u_1 = c_1$ есть один из интегралов системы (VI), то, очевидно, вследствие этих формул $u_1(x, y, \ldots t) = u_1(x_0 \ldots t_0)$.

Если, поэтому, переменные $x, y, z, \ldots t$ связаны условием $u_1(x \ldots t) = c_1$, новые переменные $x_0 \ldots t_0$ связаны условием $u_1(x_0 \ldots t_0) = c_1$.

Преобразуем этими формулами Pfaff'ову систему (I')

$$\Omega = dz - pdx - qdy = 0, \ \ \Omega_2 = dp - \theta dx - sdy = 0,$$

$$\Omega_3 = dq - sdx - tdy = 0,$$

в которую мы полагаем уже внесенной зависимость $u_1 = c_1$. Найдем вид преобразованной системы. Для этого найдем $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha}$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dz - pdx - qdy) = d\frac{dz}{d\alpha} - \frac{dp}{d\alpha} dx - pd\frac{dx}{d\alpha} -$$

$$-\frac{dq}{d\alpha} dy - qd\frac{dy}{d\alpha} = d(p + \lambda q) - (\theta + \lambda s)\, dx - (s + \lambda t)\, dy -$$

$$-qd\lambda = dp - \theta dx - sdy + \lambda(dq - sdx - tdy) = \Omega_2 + \lambda \Omega_3.$$

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}(dp-\theta dx-sdy)=d\frac{\partial p}{\partial\alpha}-\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}dx-\frac{\partial s}{\partial\alpha}dy-s\frac{\partial y}{\partial\alpha}=$$

$$=d(\theta+\lambda s)-\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\theta}{\partial y}+(p+\lambda q)\frac{\partial\theta}{\partial z}+(\theta+\lambda s)\frac{\partial\theta}{\partial p}+\right.$$

$$\left.+(s+\lambda t)\frac{\partial\theta}{\partial q}-\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\theta}{\partial s}-\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]dx+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy-sd\lambda,$$

или после простых преобразований

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha}=\frac{d\theta}{dy}(dy-\lambda dx)+\frac{\partial\theta}{\partial z}\Omega_1+\frac{\partial\theta}{\partial p}\Omega_2+\frac{\partial\theta}{\partial q}\Omega_3+$$

$$+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\theta}{\partial s}dx+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\theta}{\partial t}dx+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy+\frac{\partial\theta}{\partial s}ds+\frac{\partial\theta}{\partial t}dt+\lambda ds.$$

Заменяя $\frac{\partial\theta}{\partial s}$, $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ выражениями $-(\lambda+\mu)$, $-\lambda\mu$, получим

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha}=\left(\frac{d\theta}{dy}+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}+\mu\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)(dy-\lambda dx)+\frac{\partial\theta}{\partial z}\Omega_1+\frac{\partial\theta}{\partial p}\Omega_2+$$

$$+\frac{\partial\theta}{\partial q}\Omega_3-\mu\left(\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dx+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy+ds+\lambda dt\right)$$

Но в силу уравнений (IV_1)

$$\frac{d\theta}{dy}+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}+\mu\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\equiv 0;$$

далее, так как $u_1=c_1$, то

$$du_1=0=\frac{\overline{du_1}}{dx}dx+\frac{\overline{du_1}}{dy}dy+\frac{\partial u_1}{\partial z}\Omega_1+\frac{\partial u_1}{\partial p}\Omega_2+\frac{\partial u_1}{\partial q}\Omega_3+$$

$$+\frac{\partial u_1}{\partial s}ds+\frac{\partial u_1}{\partial t}dt,$$

или

$$\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dx+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy+ds+\lambda dt\equiv-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_1-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial p}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_2-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial q}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_3,$$

а потому окончательно

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha}=\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}+\mu\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)\Omega_1+\left(\frac{\partial \theta}{\partial p}+\mu\frac{\frac{\partial u_1}{\partial p}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)\Omega_2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial q}+\mu\frac{\frac{\partial u_1}{\partial q}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)\Omega_3.$$

Наконец,

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha}=\frac{\partial}{\partial \alpha}(dq-s\,dx-t\,dy)=d\frac{\partial q}{\partial \alpha}-\frac{\partial s}{\partial \alpha}dx-\frac{\partial t}{\partial \alpha}dy-t\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha}=$$

$$=d(s+\lambda\,t)+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dx+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy-td\lambda=ds+\lambda dt+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\alpha x+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}=$$

$$=-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_1-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial p}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_2-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial q}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_3.$$

Таким образом $\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_1$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_2$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_3$ удовлетворяют системе линейных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}Z_i=a_{i1}\ Z_1+a_{i2}\ Z_2+a_{i3}\ Z_3 \qquad i=1.2.3.$$

Поэтому Ω_i $i=1,2,3$ имеют вид

$$\Omega_i=\alpha_{i1}\ \Omega_1^0+\alpha_{i2}\ \Omega_2^0+\alpha_{i3}\ \Omega_3^0 \qquad i=1.2.3.$$

где Ω_i^0— значения Ω_i при $\alpha=\alpha_0$ и имеют вид

$$\Omega_1^0=dz_0-p_0dx_0-q_0\ dy_0,\ \Omega_2^0=dp_0-\theta_0\ dx_0-s_0\ dy_0,$$
$$\Omega_3^0=dq_0-s_0\ dx_0-t_0\ dy_0,\ \text{а}\ \theta_0=\theta(x_0\ldots t_0).$$

Поэтому, чтобы помощью решений дифференциального уравнения (II) найти систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I[1]), заключающую уравнение $u_1=c_1$, можно поступить следующим образом:

Достаточно проинтегрировать Pfaff'ову систему

$$\Omega_1^0=dz_0-p_0\ dx_0-q_0\ dy_0=0,\ \ \Omega_2^0=dp_0-\theta_0\ dx_0-s_0\ dy_0=0,$$
$$\Omega_3^0=dq_0-s_0\ dx_0-t_0\ dy_0=0$$

шестью интегралами

$$u_1(x_0\ldots t_0)=c_1,\ v_j(x_0\ldots t_0)=0 \quad j=2\ldots 6,$$

не представляющими системы интегралов системы дифференциальных уравнений (VI), и исключить $x_0\ldots t_0$ из системы уравнений

$$y=y(x,x_0\ldots t_0)\ldots \qquad t=t(x,x_0\ldots t_0) \qquad u_1(x_0\ldots t_0)=c_1$$
$$v_j(x_0\ldots t_0)=0 \qquad j=2\ldots 6.$$

Если полученные уравнения

$$u_1(x\ldots t) = c_1 \qquad u_j(x\ldots t) = 0 \qquad j = 2.3.4.5$$

разрешимы относительно z, p, q, s, t, определенная из них функция $z = \varphi(xy)$ есть искомый интеграл данного дифференциального уравнения (I).

Наиболее удобный способ выполнить это заключается в следующем: достаточно определить функции $x_0(\omega)\ldots t_0(\omega)$ параметра ω, удовлетворяющие уравнениям

$$u_1(x_0\ldots t_0) = c_1 \quad \frac{dz_0}{d\omega} - p_0\frac{dx_0}{d\omega} - q_0\frac{dy_0}{d\omega} = 0, \quad \frac{dp_0}{d\omega} - \theta_0\frac{dx_0}{d\omega} - s_0\frac{dy_0}{d\omega} = 0,$$

$$\frac{dq_0}{d\omega} - s_0\frac{dx_0}{d\omega} - t_0\frac{dy_0}{d\omega} = 0$$

и исключить параметр ω из уравнений

$$y = y[x,\ x_0(\omega)\ldots t_0(\omega)]\ldots \qquad t = t[x,\ x_0(\omega),\ldots t_0(\omega)].$$

Это есть обычный способ определения интеграла данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющего и уравнению $u_1(x, y, z, p, q, st) = c_1$, находящемуся в инволюции с данным.

Если существуют две независимые функции v_1, v_2, удовлетворяющие одной и той же системе (IV_1), или (IV_2), то в этом случае можно получить интеграл Cauchy, представляющий поверхность, проходящую через данный пояс

$$x = x(\omega),\ y = y(\omega),\ z = (\omega),\ p = p(\omega),\ q = q(\omega).$$

§ 4.

До сих пор мы получали результаты по большей части известные, но одним и тем же методом. Перейдем теперь к следующему, новому случаю.

Пусть $\dfrac{\partial(u_1, n_2)}{\partial(st)} = 0$, но не все производные $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial s}$, $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial t}$ нули.

Можно показать, что в этом случае $\dfrac{\partial u_1}{\partial s}$, $\dfrac{\partial n_2}{\partial s}$ не нули одновременно и что $\dfrac{d(u_1\ u_2)}{d(ys)} \neq 0$.

Пусть

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = \frac{\partial u_2}{\partial s} = 0.$$

Не трудно видеть, что в таком случае из уравнений (II) (стр. 118, 119), которым удовлетворяют u_1 и u_2, следует, что

$$\frac{d(u_1\ u_2)}{d(xt)} = 0,\ \frac{d(u_1\ u_2)}{d(yt)} = 0.$$

Так как $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ уже не нули одновременно, то из уравнений

$$\frac{\overline{d}\,(u_1, u_2)}{d\,(xt)} = 0, \quad \frac{\overline{d}\,(u_1, u_2)}{d\,(yt)} = 0, \quad \frac{\partial\,(u_1, u_2)}{\partial\,(st)} = 0$$

следует, что все определители матриссы (A) нули, что невозможно. Итак, $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_2}{\partial s}$ не нули одновременно.

Из этого следует, что

$$\frac{\overline{d}\,(u_1\,u_2)}{d\,(ys)} \neq 0.$$

В противном случае $\frac{\partial\,(u_1\,u_2)}{\partial\,(st)} = 0$, все определители матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\overline{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{matrix}$$

а следовательно и определитель

$$\frac{\overline{d}\,(u_1\,u_2)}{d\,(yt)}$$

были бы равны нулю. Поэтому из второго уравнения (II) (стр. 118, 119) следовало бы, что

$$\frac{\overline{d}\,(u_1\,u_2)}{d\,(xs)} = 0.$$

Если же

$$\frac{\overline{d}\,(u_1\,u_2)}{d\,(xs)} = 0, \quad \frac{\overline{d}\,(u_1\,u_2)}{d\,(ys)} = 0 \quad \frac{\partial\,(u_1\,u_2)}{\partial\,(st)} = 0,$$

то так как $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_1}{\partial s}$ не нули одновременно, следовало бы, что все определители матриссы (A) нули, что невозможно. Итак,

$$\frac{\overline{d}\,(u_1\,u_2)}{d\,(ys)} \neq 0.$$

В этом случае полная система дифференциальных уравнений (B) (стр 119), которым удовлетворяют функции u_i $i = 1 \ldots 5$, имеет вид

$$\frac{\overline{d}\,(f,\, u_1,\, u_2)}{d\,(xys)} = 0, \quad \frac{\overline{d}\,(f,\, u_1,\, u_2)}{d\,(yst)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{B}).$$

Так как они неразрешимы относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, но разрешимы относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$, решения их u_i $i = 1 \ldots 5$ зависимы относительно z, p, q, s, t, но независимы относительно y, z, p, q, s. Система пяти полных интегралов $u_i = c_i$ $i = 1..,5$ неразрешима в этом случае относительно z, p, q, s, t, но разрешима относительно y, z, p, q, s. Она не может дать в этом случае полного интеграла данного дифференциального уравнения (I). Однако и в этом случае можно получить интеграл его, но заключающий лишь четыре произвольных постоянных.

Прежде всего решим вопрос, для какого вида дифференциального уравнения (I) возможен этот случай.

Мы предполагаем, что производные $\frac{\partial u_{1,2}}{\partial s}$, $\frac{\partial u_{1,2}}{\partial t}$ не все нули. Пусть $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ не нули одновременно. Легко видеть, что тогда $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$; иначе, из условия $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} = 0$ и неравенства $\frac{\partial u_2}{\partial s} \neq 0$ следовало бы, что и $\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$.

В этом случае все функции u_i $i = 1...5$ удовлетворяют уравнению $\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0$.

Именно, все они удовлетворяют уравнению

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(yst)} = 0$$

т. е. уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(yt)} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(ys)} = 0.$$

Но

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(yt)} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(ys)} = 0.$$

Следовательно, так как $\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)} \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0.$$

Пять независимых функций u_i $i = 1...5$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0$$

и уравнениям системы (II) (стр. 118, 119)

$$\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0,$$

$$\frac{\overline{d}f}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\overline{d}f}{dy}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) = 0.$$

Так как первые два независимы между собой, третье должно быть их следствием. Поэтому, два независимые определители матриссы

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\dfrac{\bar{d} u_1}{dx}, & -\dfrac{\bar{d} u_1}{dy} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)}, & \dfrac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(yt)}, & -\left(\dfrac{\bar{d} u_1}{dx}+\dfrac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \end{matrix}$$

составленной из их коэффициэнтов, должны быть равны нулю. Так как

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s} & -\dfrac{\bar{d} u_1}{dy} \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 \neq 0,$$

то

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\dfrac{\bar{d} u_1}{dy} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)}, & -\left(\dfrac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(ys)}+\dfrac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & -\dfrac{\bar{d} u_1}{dy}, & -\dfrac{\bar{d} u_1}{dy} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(yt)}, & -\left(\dfrac{\bar{d} u_1}{dx}+\dfrac{\bar{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

т. е.

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 - \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

$$-\frac{\bar{d} u_1}{dy}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2\right] = 0.$$

Таким образом получается только одно условие

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, функция u_1 должна в этом случае удовлетворять условию

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial n_1}{\partial s} = 0,$$

или условию

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$$

если λ, μ суть корни квадратного уравнения (a) (стр. 127).

Пусть

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0.$$

Далее, дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)}=0,\ \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)}+\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)}=0$$

или уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\lambda\frac{\partial f}{\partial s}=0,\ \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)}+\lambda\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(ys)}=0,$$

как имеющие пять независимых решений, должны составлять полную систему. Отсюда условия

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial s}=0,\ \frac{\partial(p+\lambda q)}{\partial t}-\lambda\frac{\partial(p+\lambda q)}{\partial s}=0,\ \frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial t}-\lambda\frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial s}=0,$$

$$\frac{\partial(s+\lambda t)}{\partial t}-\lambda\frac{\partial(s+\lambda t)}{\partial s}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)-\lambda\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)=\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}-\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\lambda}{\partial s},$$

которые сводятся только к следующим:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial s}=0,\ \frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial t}-\lambda\frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial s}=0,\ \ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(VII)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)-\lambda\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)=\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}-\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\lambda}{\partial s}.$$

Таким образом λ и θ должны удовлетворять двум условиям

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial s}=0,\ \lambda^2+\frac{\partial\theta}{\partial s}\lambda-\frac{\partial\theta}{\partial t}=0$$

— двум линейным дифференциальным уравнениям.

Их интегнирование приводится по методу Jacobi к интегрированию системы обыкновенных уравнений

$$dt=-\frac{ds}{\lambda}=\frac{d\lambda}{o}=\frac{d\theta}{\lambda^2},$$

коих интегралы суть $\lambda=\text{const.}$, $s+\lambda t=\text{const.}$, $\theta+\lambda s=\text{const.}$

Отсюда находим, что

$$\theta+\lambda s=F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \lambda,\ s+\lambda t),$$

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \lambda,\ s+\lambda t)=0$$

где F, φ — произвольные функции.

Таким образом функция θ должна иметь вид

$$\theta = -\lambda s + F(x, y, z, p, q, \lambda, s + \lambda t),$$

где λ определяется из условия

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \lambda,\ s + \lambda t) = 0\ ^{*}).$$

Из тождества

$$\lambda^2 + \frac{\partial \theta}{\partial s}\lambda - \frac{\partial \theta}{\partial t} \equiv 0$$

следует, что при таком виде функции θ, функция λ есть действительно корень квадратного уравнения (a).

При таком виде функции θ все условия (VII) удовлетворяются. В самом деле, λ и $s + \lambda t$ суть решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

Поэтому и $\theta + \lambda s$, как их функция, есть его решение.

Наконец, что касается последнего условия, то, производя в левой части дифференцирования, переставляя затем их порядок и пользуясь тождествами

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0,\ \ \lambda^2 + \frac{\partial \theta}{\partial s}\lambda - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,\ \ \frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0,$$

найдем, что левая часть тождественна второй.

Итак, рассматриваемый случай может представиться только для дифференциального уравнения указанного типа; поэтому, вообще

$$\frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial (st)} \neq 0.$$

Возвратимся теперь к уравнениям, которым удовлетворяют в этом случае все функци u_i $i = 1 \ldots 5$.

Все функции u_i $i = 1 \ldots 5$ удовлетворяют системе двух уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0,\ \frac{d(fu_1)}{d\,(xs)} + \lambda \frac{d(fu_1)}{d\,(ys)} = 0, \ldots \ldots \quad \text{(VIII)}$$

полной при условии

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0,\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0\right).$$

Обратно, если данное дифференциальное уравнение (I) имеет указанный вид, если $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0,\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0\right)$, то пять независимых решений полной системы (VIII) u_i $i = 1 \ldots 5$ имеют свойство, что система пяти уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$, разрешимых относительно y, z, p, q, s, есть система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I^1).

---

*) Дифференциальныя уравнения второго порядка этого типа суть единственные, допускающие характеристики первого порядка. C. Russyan, Mathem. Ann. Bd. 99. 1923.

В самом деле, так как $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$, и λ есть корень квадратного уравнения (a), то

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Поэтому, первое уравнение системы (II) (стр. 118, 119) есть следствие уравнений (VIII). Далее, среди решений этих последних есть такое u_2, что $\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)} \neq 0$, иначе уравнение

$$\frac{\overline{d}(f u_1)}{d(ys)} = 0$$

было бы следствием уравнений (VIII), что невозможно. Таким образом, функции u_1, u_2 удовлетворяют уравнениям (II) и $\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)} \neq 0$. Далее можно показать, что функции u_i $i = 1 \ldots 5$ удовлетворяют полной системе (B)

$$\frac{\overline{d}(f u_1 u_2)}{d(yst)} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f u_1 u_2)}{d(xys)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (B)$$

именно первое уравнение (B) есть следствие второго (VIII), а второе (B)—первого (VIII).

Именно, определитель, составленный из коэффициентов уравнений первого (VIII) и второго (B)

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)}, & -\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)} \end{vmatrix} = \frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \equiv 0.$$

точно также два независимых определителя матриссы, составленной из коэффициентов при $\frac{\overline{d}f}{dx}, \frac{\overline{d}f}{dy}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$ первого уравнения системы (B) и второго системы (VIII), имеющие вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial s} & \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} \\ \frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)}, & -\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(xs)} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial s} & -\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) \\ \frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)} & \frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(xy)} \end{vmatrix}$$

или вид

$$-\frac{\partial u_1}{\partial s}\left[\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(xs)} + \lambda \frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)}\right], \quad \frac{\overline{d}u_1}{dy}\left[\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(xs)} + \lambda \frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)}\right]$$

нули тождественно. Если же функции u_i $i = 1 \ldots 5$ удовлетворяют полной системе (B), то система пяти уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$ есть система полных интегралов Pfaff'овой системы (I^1).

Итак, если данное дифференциальное уравнение (I) имеет указанный вид, и только тогда, Pfaff'ова система (I^1) имеет систему полных интегралов $u_i = c_i$ $i = 1 \dots 5$, неразрешимую относительно z, p, q, s, t, но разрешимую относительно y, z, p, q, s. Функции u_i $i = 1 \dots 5$ суть решения полной системы

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad \frac{d(fu_1)}{d(xs)} + \lambda \frac{d(fu_1)}{d(ys)} = 0 \quad \dots\dots \text{(VIII)},$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0.$$

Можем получить в этом случае интеграл данного уравнения (I), заключающий четыре произвольных постоянных, следующим образом. Примем независимые функции u_i $i = 1 \dots 5$, за новые переменные независимые; тогда Pfaff'ова система (I^1) примет вид:

$$\Omega_1 = dz - pdx - qdy = \sum_1^5{}_i U_i' \, du_i = 0$$

$$\Omega_2 = dp - \theta dx - sdy = \sum_1^5{}_i U_i^2 \, du_i = 0,$$

$$\Omega_3 = dq - sdx - tdy = \sum_1^5{}_i U_i^3 \, du_i = 0.$$

Так как функции u_i $i = 1 \dots 5$ независимы относительно y, z, p, q, s, есть среди них четыре, независимые относительно z, p, q, s. Докажем, что можно определить четыре решения системы (VIII) u_j $j = 1 \dots 4$ такие, что 1) они независимы относительно z, p, q, s и такие что 2) уравнения $U_5^1 = 0$, $U_5^2 = 0$, U_5^3 сводятся, в силу уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \dots 4$, только к одному $\omega = 0$, определяющему переменное t. Тогда уравнения

$$u_j = c_j \ j = 1 \dots 4, \ \omega = 0$$

представляют систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I^1), разрешимую относитемьно z, p, q, s, t, и поэтому определенная из них функция $z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$ есть интеграл данного дифференциального уравнения (I), заключающий четыре произвольных постоянных.

Эти функции должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial (u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial (z, p, q, s)} \neq 0.$$

Найдем вид коэффициентов $U_5^1, U_5^2\, U_{5.}^3$

Из тождества $dz - pdx - qdy = \sum_i U_i^1 \, du_i$ следует, что

$$-q = \sum_i U_i^1 \frac{\partial u_i}{\partial y}, \ 1 = \sum_i U_i^1 \frac{\partial u_i}{\partial z}, \ 0 = \sum_i U_i^1 \frac{\partial u_i}{\partial p}, \ 0 = \sum_i U_i^1 \frac{\partial u_i}{\partial q}, \ 0 = \sum_i u_i^1 \frac{\partial u_i}{\partial s}.$$

Откуда, означая чрез $\triangle$ отличный от нуля определитель

$$\triangle = \frac{\partial (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)}{\partial (y\, z\, p\, q\, s)}$$

имеем, что

$$U_5^1 = -\frac{\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y\,p\,q\,s)} + q\,\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z\,p\,q\,s)}}{\triangle}.$$

Подобным же образом находим из тождеств

$$dp - \theta dx - sdy = \sum_i U_i^2\, du_i,\quad dq - sdx - tdy = \sum_i U_i^3\, du_i,$$

что

$$U_5^2 = \frac{\dfrac{\partial(u_1, u_{,2}\, u_3, u_4)}{\partial(y\,z\,q\,s)} - s\,\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z\,p\,q\,s)}}{\triangle}$$

$$U_5^3 = \frac{\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y\,z\,p\,s)} + t\,\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z\,p\,q\,s)}}{\triangle}.$$

Таким образом уравнения $U_5^1 = U_5^2 = U_5^3 = 0$ имеют вид:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y\,p\,q\,s)} + q\,\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\upsilon(z\,p\,q\,s)} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y\,z\,q\,s)} - s\,\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z\,p\,q\,s)} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y\,z\,p\,s)} + t\,\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z\,p\,q\,s)} = 0.$$

Второе уравнение можем заменить ему равносильным

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y\,z\,q\,s)} - \lambda\,\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y\,z\,p\,s)} - (s + \lambda t)\,\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z\,p\,q\,s)} = 0.$$

Функции u_2, u_3, u_4, как удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0,$$

имеют вид

$$u_i = v_i\,(x, y, z, p, q, u_1)\ \ j = 2.3.4.$$

Поэтому эти уравнения по сокращении на $\dfrac{\partial u_1}{\partial s}$ имеют вид:

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y\,p\,q)} + q\,\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z\,p\,q)} = 0,\quad \frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y\,z\,q)} - \lambda\,\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y\,z\,p)} - (s + \lambda t)\,\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z\,p\,q)} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y\,z\,p)} + t\,\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z\,p\,q)} = 0,$$

где производные взяты только по переменным входящим явно, и

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z, p, q)} = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z, p, q, s)} : \frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0.$$

Упростим их. Заменим переменное независимое s новым u_1 по формуле $u_1(x, y, z, p, q, s, t) = u_1$.

Тогда эти уравнения примут вид

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(ypq)} + q\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(zpq)} = 0, \quad \frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(yzq)} - l\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(yzp)} - (\overline{s} + lt)\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(zpq)} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(yzp)} + t\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(zpq)} = 0,$$

где v_2, v_3, v_4 зависят только от x, y, z, p, q, u_1, а l, $\overline{s}$ суть преобразованные выражения λ и $\overline{s}$, при чем l, $\overline{s} + lt$ не зависят также от t, ибо λ, $s + \lambda t$ суть решения уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

т. е. уравнения

$$\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0.$$

Так как в силу уравнений $u_1 = c_1$, $v_2 = c_2$, $v_3 = c_3$, $v_4 = c_4$, эти уравнения должны сводиться к одному, именно к третьему, единственному, заключающему t, то первые два, как не заключающие ни t, ни c_1, c_2, c_3, c_4, должны быть тождествами при произвольных значениях x, y, z, p, q, u_1.

Итак, v_2, v_3, v_4 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(ypq)} + q\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(zpq)} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(yzq)} - l\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(yzp)} - (\overline{s} + lt)\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(zpq)} = 0.$$

Означая через $\frac{\overline{d}}{dy}$ операцию $\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \overline{s}\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}$, их можно написать в виде

$$\frac{\overline{d}(v_2, v_3, v_4)}{d(ypq)} = 0, \quad \frac{\overline{d}(v_2, v_3, v_4)}{d(yzq)} - l\frac{\overline{d}(v_2, v_3, v_4)}{d(yzp)} = 0.$$

Эти уравнения можна заменить иными, им эквивалентными.

Рассмотрим три определителя матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}v_2}{dy}, & \frac{\partial v_2}{\partial z}, & \frac{\partial v_2}{\partial p}, & \frac{\partial v_2}{\partial q}, & \frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \\ \frac{\overline{d}v_3}{dy}, & \frac{\partial v_3}{\partial z}, & \frac{\partial v_3}{\partial p}, & \frac{\partial v_3}{s_l}, & \frac{\partial v_3}{\partial q} - l\frac{\partial v_3}{\partial p} \\ \frac{\overline{d}v_4}{dy}, & \frac{\partial v_4}{\partial z}, & \frac{\partial v_4}{\partial p}, & \frac{\partial v_4}{\partial q}, & \frac{\partial v_4}{\partial q} - l\frac{\partial v_4}{\partial p} \end{matrix}$$

получаемые вычеркиванием каких-либо двух средних колонн. Они равны ими левым частям этих уравнений, или левой части первого уравнения, умноженного на l. Поэтому рассматриваемые уравнения можно заменить им эквивалентными, приравнивая эти определители нулю. Но каждый из них можно разложить по минорам второй степени первой и последней колонны. Мы получим таким образом три уравнения линейных однородных относительно трех величин

$$\begin{vmatrix} \frac{\overline{d}v_i}{dy}, & \frac{\partial v_i}{\partial q} - l\frac{\partial v_i}{\partial p} \\ \frac{\overline{d}v_k}{dy}, & \frac{\partial v_k}{\partial q} - l\frac{\partial v_k}{\partial p} \end{vmatrix} \quad i,\ k = 2.3.4$$

определитель которых, равный $\frac{\partial(v_2 v_3 v_4)}{\partial(z\,p\,q)}$, отличен от нуля. Поэтому,

$$\begin{vmatrix} \frac{\overline{d}v_i}{dy}, & \frac{\partial v_i}{\partial q} - l\frac{\partial v_i}{\partial p} \\ \frac{\overline{d}v_k}{dy}, & \frac{\partial v_k}{\partial b} - l\frac{\partial v_k}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\overline{d}(v_i, v_k)}{d(y, q-lp)} = 0 \quad i,\ k = 2.2.4.$$

Последняя система уравнений эквивалентна рассматриваемой.

Преобразуем к переменным x, y, z, p, q, u_1, t и уравнения (VIII). Они примут вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0$$

где

$$\frac{\overline{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + \overline{\theta}\frac{\partial}{\partial p} + \overline{s}\frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\overline{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \overline{s}\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}$$

и $\overline{\theta}$ есть функция $\theta(x, y, z, p, q, \overline{s}, t)$.

Коэффициенты $l,\ p+lq,\ \overline{\theta}+l\overline{s},\ \overline{s}+lt$ второго уравнения не зависят от t.

Таким образом функции v_2, v_3, v_4 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 0, \quad \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0$$

$$\frac{\overline{d}(v_i, v_k)}{d(y, q-lp)} = 0 \quad i = 2.3.4. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\mathrm{VIII}_1)$$

Эту систему мы еще упростим. Среди искомых функций v_2, v_3, v_4 есть хоть одна, например, v_2 такая, что $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$. Иначе мы имели бы, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial q} - l\frac{\partial v_i}{\partial p} = 0 \quad i = 2.3.4.$$

и что, следовательно,

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z\,p\,q)} = 0$$

тогда три уравнения

$$\frac{d\,(v_i v_k)}{d\,(y, q-lp)} = 0 \;\; i, k = 2.3.4.$$

можно заменить двумя

$$\frac{\overline{d}\,(v_3, v_2)}{d\,(y, q-lp)} = 0, \;\; \frac{\overline{d}\,(v_4, v_2)}{d\,(y, q-lp)} = 0,$$

им эквивалентными, так как из этих последних, имеющих вид

$$\frac{\overline{d}v_3}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial v_3}{\partial q} - l\frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_2}{dy} = 0,$$

$$\frac{\overline{d}v_4}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial v_4}{\partial q} - l\frac{\partial v_4}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_2}{dy} = 0$$

следует, что

$$\frac{\overline{d}v_3}{dy}\left(\frac{\partial v_4}{\partial q} - l\frac{\partial v_4}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial v_3}{\partial q} - l\frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_4}{dy} = \frac{\overline{d}\,(v_3 v_4)}{d\,(y, q-lp)} = 0.$$

Таким образом, функции v_2, v_3, v_4 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \;\; \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0, \;\; \frac{\overline{d}(\varphi\;\; v_2)}{d(y,\, q-lp)} = 0, \text{ где } \frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0.$$

Обратно, если v_2, v_3, v_4, удовлетворяют этим уравнениям и $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$, они, удовлетворяя уравнениям (VIII_1), после преобразования от переменного u_1 к переменному s по формуле $u_1(x, y, z, p, q, s, t) = u_1$ дают функции u_2, u_3, u_4, которыя вместе с функцией $u_1(x \ldots t)$, удовлетворяющей уравнению $\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0$, и суть искомые решения системы (VIII). Функция $z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$, определенная из уравнений $u_j = c_j$ $j = 1.2.3.4$, разрешимых относительно z, p, q, s, есть искомый интеграл данного дифференциального уравнения (I^1).

Приступим к определению функций $v_2,\; v_3,\; v_4$.

Функция v_2 должна быть решением уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0$$

таким, что $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$ и таким, чтобы система трех независимых уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \;\; \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0 \;\; \frac{\overline{d}\,(\varphi_1, v_2)}{d\,(y, q-lp)} = 0$$

в шести переменных независимых $x, y, z\, p, q, t$, как имеющая три независимых решения, была полной, или чтобы ей соответствующая Pfaff'ова система была сполна интегрируемой.

Эта последняя имеет вид

$$dz-pdx-qdy=0,\ dp+ldq-(\theta+sl)\,dx-(s+lt)\,dy=0,\ dv_2=0.$$

Условия ее интегрируемости суть:

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(\overline{\theta}+\overline{l}s, & -(\overline{s}+lt) & 0 & 1 & l \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} & \frac{\partial v_2}{\partial p} & \frac{\partial v_2}{\partial q} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(\overline{\theta}+l\overline{s}), & -(\overline{s}+lt), & 0 & 1 & l \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} & \frac{\partial v_2}{\partial p} & \frac{\partial v_2}{\partial q} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ -(\overline{\theta}+l\overline{s}), & -(\overline{s}+lt) & 0 & 1 & l \end{vmatrix}=0.$$

Первое по разложении дает

$$\frac{\overline{d}v_2}{dx}+l\frac{\overline{d}v_2}{dy}=0;$$

оно удовлетворяется на основании уравнения

$$\frac{\overline{d}\varphi}{dx}+l\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,$$

которому v_2 удовлетворяет.

Второе по разложении и по введении условия $\frac{\overline{d}v_2}{dx}+l\frac{\overline{d}v_2}{dy}=0$ дает

$$\frac{\overline{d}v_2}{dy}\left(\frac{\overline{d}l}{dx}+l\frac{\overline{d}l}{dy}+\frac{\overline{\partial}\theta}{\partial q}-l\frac{\overline{\partial}\theta}{\partial p}+2l\frac{\overline{\partial}s}{\partial q}-2l^2\frac{\overline{\partial}s}{\partial p}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right)\left(\frac{\overline{d}s}{dx}-l\frac{\overline{d}s}{dy}-\frac{\overline{d}\theta}{dy}\right)=0.$$

Таким образом, функция v_2 должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+l\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dy}M+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}-l\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)N=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{X})$$

где

$$M=\frac{\overline{d}l}{dx}+l\frac{\overline{d}l}{dy}+\frac{\overline{\partial}\theta}{\partial q}-l\frac{\overline{\partial}\theta}{\partial p}+2l\left(\frac{\overline{\partial}s}{\partial q}-l\frac{\overline{\partial}s}{\partial p}\right),$$

$$N=\frac{\overline{d}s}{dx}-l\frac{\overline{d}s}{dy}-\frac{\overline{d}\theta}{dy}$$

при условии, что $\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}\neq 0$.

Вычислением можно убедиться, что $M = -\frac{\partial N}{\partial t}$, $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$.

Если v_2 удовлетворяет этим уравнениям и $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$, система

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0, \frac{\overline{d}(\varphi, v_2)}{d(y, q - lp)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (IX)$$

— полная и три ее решения суть искомые функции v_2, v_3, v_4. При определении функции v_2 могут представиться три случая:

1) $N \neq 0$, но $M = 0$; тогда из уравнений (X) следует, что $\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$. В этом случае нельзя определить функцию v_2, ибо $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} = 0$ и задача невозможна.

2) $N \neq 0$ $M \neq 0$. В этом случае последнее уравнение (IX)

$$\frac{\overline{d}\varphi}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_2}{dy} = 0$$

в силу уравнения

$$\frac{\overline{d}v_2}{dy}M + \left(\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right)N = 0$$

может быть заменено уравнением

$$\frac{\overline{d}\varphi}{dy}M + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial d}\right)N = 0$$

и система (IX) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dy}M + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)N = 0 \quad \ldots\ldots \quad (X)$$

Она должна быть полной. Так как она допускает только одну систему решений, есть только одна система функций u_j $j = 1\ldots4$, заключающих функцию $u_1(x\ldots t)$, т.-е. есть только один интеграл $z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$ данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий дифференциальному уравнению $u_1(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$.

3) $N = 0$, а следовательно и $M = -\frac{\partial N}{\partial t} = 0$.

В этом случае при всяком выборе v_2, как решения полной системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0$$

такого, что $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$, что возможно бесчисленным множеством способов, система (IX) — полная.

В этом случае есть бесчисленное множество различных систем уравнений $u_j = c_j$ $j = 1\ldots4$, заключающих уравнение $u_1 = c_1$, т.-е. есть бесчисленное множество интегралов $z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$ данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющих дифференциальному уравнению $u_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t) = c_1$.

Рассмотрим ближе эти два случая. Если уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,\ \frac{\bar{d}\varphi}{dx} + l\frac{\bar{d}\varphi}{dy} = 0,\ \frac{\bar{d}\varphi}{dy}M + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} - l\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)N = 0 \quad \ldots\ldots (X).$$

должны составлять полную систему, то так как коэффициенты и последнего уравнения: $M,\ \bar{q}M,\ \bar{s}M - lN,\ tM + N$ в силу соотношений $M = -\frac{\partial N}{\partial t},\ \frac{\partial M}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -l$ не заключают переменного t, достаточно выразить, что только два последние уравнения составляют полную систему, т.-е. что им соответствующая Pfaff'ова система сполна интегрируема. Она имеет вид

$$dz - pdy - qdx = 0,\ Mdp - (M\bar{\theta} + l^2N)\,dx - (\bar{s}M - lN)\,dy = 0,$$
$$Mdq + (lN - \bar{s}M)\,dx - (tM + N)\,dy = 0.$$

Условия ее полной интегрируемости суть

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & lN - \bar{s}M & 0 & M & 0 \\ lN - \bar{s}M, & -(tM + N), & 0 & 0 & M \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & tN - \bar{s}M & 0 & M & 0 \\ lN - \bar{s}M, & -(tM + N) & 0 & 0 & M \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & tN - \bar{s}M, & 0 & M & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & lN - \bar{s}M & 0 & M & 0 \\ lN - \bar{s}M, & -(tM + N), & 0 & 0 & M \\ \frac{\partial}{\partial a} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial d} & \frac{\partial}{\partial q} \\ lN - \bar{s}M & -(tM + N) & 0 & 0 & M \end{vmatrix} = 0.$$

Первое есть тождество. Второе имеет вид

$$K = \frac{\delta}{\delta x}(lN) - M\frac{\delta\bar{s}}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y}(l^2N) + M\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta y} - Nl\left(\frac{\bar{d}M}{dx} + l\frac{\bar{d}M}{dy}\right) = 0,$$

где

$$\frac{\delta}{\delta x} = M\frac{\bar{d}}{dx} - Nl\left(\frac{\partial}{\partial p} - l\frac{\partial}{\partial p}\right),\ \frac{\delta}{\delta y} = M\frac{\bar{d}}{dy} + N\left(\frac{\partial}{\partial q} - l\frac{\partial}{\partial p}\right),$$

а третье вид

$$L = -\frac{\delta}{\delta x}N - \frac{\delta}{\delta y}(lN) + M\frac{\delta\bar{s}}{\delta y} + N\left(\frac{\bar{d}M}{dx} + l\frac{\bar{d}M}{dy}\right) = 0.$$

Не трудно убедиться, что $K + lL \equiv 0$. Таким образом, условий полной интегрируемости только одно:

$$\frac{\delta}{\delta x} N + \frac{\delta}{\delta y}(lN - \overline{M}s) + \overline{s}\frac{\delta M}{\delta y} - N\left(\frac{\overline{d}M}{dx} + l\frac{\overline{d}M}{dy}\right) = 0.$$

Система (X) имеет в старых переменных $x, y, z, p, q\, s, t$ вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(xs)} + \lambda\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(ys)} = 0, \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(ys)}M + \frac{\partial(f, u_1)}{\partial(q - \lambda p, s)}N = 0 \quad . \ (\mathrm{X}_1)$$

где N, M, выраженные в них, имеют вид:

$$N = -\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \mu\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d}\theta}{dy}\right) : \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad M = -\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \lambda\frac{\partial N}{\partial s}\right),$$

а условие, что она полная, вид

$$\frac{\overline{d}u_1}{dx}\frac{\partial}{\partial s}(MN) + \frac{\overline{d}u_1}{dy}\left[\frac{\partial}{\partial s}(\lambda MN) - M\left(M + 2s\frac{\partial M}{\partial s}\right)\right] - \left(\frac{\partial u_1}{\partial q} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial p}\right)\left[\lambda N\frac{\partial N}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + N\left(M - N\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)\right] - \frac{\partial u_1}{\partial s}\left\{M\frac{\overline{d}N}{dx} + M\frac{\overline{d}}{dy}(\lambda N - sM) - \lambda N\left(\frac{dN}{\partial q} - \lambda\frac{\partial N}{\partial p}\right) + \right.$$

$$+ N\left(\frac{\partial(\lambda N - sM)}{\partial q} - \lambda\frac{\partial(\lambda N - sM)}{\partial p}\right) - s\left[M\frac{\overline{d}M}{dy} + N\left(\frac{\partial M}{\partial q} - \lambda\frac{\partial M}{\partial p}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + N\left(\frac{\overline{d}M}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}M}{dy}\right)\right]\right\} = 0.$$

Таким образом, функция $u_1\,(x \ldots t)$ должна удовлетворять в этом случае, кроме уравнения $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$, еще этому последнему дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, линейному относительно вторых производных; его порядок при решении данной задачи не понижается, так как оно заключает член

$$- M\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Если функция $u_1\,(x \ldots t)$ им удовлетворяет, система (X_1) полная и четыре решения ее, независимые относительно z, p, q, s, суть искомые функции $u_j\,(x \ldots t)$ $j = 1 \ldots 4$, а функция $z = f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$, определенная из уравнений $u_j(x \ldots t) = c_j$ $j = 1..4$, есть интеграл данного дифференциального уравнения (I), единственный, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$.

Если во втором случае преобразуем полную систему (IX) к первоначальным переменным независимым x, y, z, p, q, s, t, она получит вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \lambda\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(ys)} = 0, \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, q - \lambda p, s)} = 0 \quad . \ . \ . \ (\mathrm{IX}_1)$$

где $u_2\,(x \ldots t)$ есть функция v_2, преобразованная к ним, а условие для нее есть

$$\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} = \frac{\partial(u_2, u_1)}{\partial(q - \lambda p, s)} : \frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0.$$

Так как в этом случае

$$N = -\left(\frac{\overline{du_1}}{dx} + \mu\frac{\overline{du_1}}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d\theta}}{dy}\right) : \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0,$$

функция $u_1(x...t)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad \frac{\overline{df}}{dx} + \mu\frac{\overline{df}}{dy} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\overline{d\theta}}{dy} = 0;$$

du_1 есть интегрируемая комбинация дифференциальных уравнений характеристик, соответствующих корню μ квадратного уравнения (a), а дифференциальное уравнение $u_1(x...t) = c_1$ находится в инволюции с данным (I).

Функция $u_2(x...t)$ определяется, как решение полной системы

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(xs)} + \lambda\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(ys)} = 0$$

такое, что

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(q - \lambda p, s)} \neq 0,$$

что возможно бесчисленным множеством способов. Остальные функции u_3, u_4 определяются, как остальные решения полной системы (IX_1). Функция $z = f(x, y, c_1, c_2 c_3 c_4)$, определенная из уравнений $u_j(x,...t) = c_j$ $j = 1..4$, есть интеграл дифференциального уравнения (I), один из бесчисленного множества этого вида удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$u_1(r, y, z, p, q, s, t) = c_1.$$

Если

$$\frac{\overline{du_1}}{dx} + \mu\frac{\overline{du_1}}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d\theta}}{dy} \neq 0$$

т.-е., если

$$N \neq 0,$$

но

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \lambda\frac{\partial N}{\partial s} = 0$$

т.-е.

$$M = 0$$

предложенная задача не имеет решения.

§ 5.

До сих пор мы рассматривали производные от искомого интеграла порядка не выше второго. Теперь мы будем рассматривать производные высших порядков. Это даст нам возможность найти новые интегралы.

Если мы рассматриваем производные интеграла данного дифференциального уравнения (I) до n-ого порядка $(n > 2)$ включительно, и если мы положим $\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = p_{i,k}$ $i + k \leqslant n$, то все его производные $p_{i,k}$ выражаются при помощи данного уравнения (I)

$$p_{20} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, p_{11}, p_{02})$$

через

$$p_{1k-1},\ p_{0k}\ \ k = 1 \ldots n.$$

В частном случае $p_{2,k-2}$ $k = 2 \ldots n$ выражаются через p_{1k-1}, p_{0k} следующим образом. Если функция $v(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-2}, p_{0n-1})$ заключает только p_{1k-1}, p_{0k} где $k \leqslant n-1$, и если

$$\frac{d}{dy} v(x \ldots p_{0n-1}) = \frac{\partial v}{\partial y} + p_{01} \frac{\partial v}{\partial z} + p_{11} \frac{\partial v}{\partial p_{10}} + p_{02} \frac{\partial v}{\partial p_{01}} + \ldots$$

$$\ldots + p_{1n-1} \frac{\partial v}{\partial p_{1n-2}} + p_{0n} \frac{\partial v}{\partial p_{0n-1}},$$

то, очевидно,

$$p_{20} = \theta(x \ldots p_{02}),\ p_{21} = \frac{d\theta}{dy},\ p_{22} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d\theta}{dy}\right) = \frac{d^2\theta}{dy^2},\ \ldots\ p_{2n-2} = \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}},$$

причем выражения $\frac{d^{k-2}\theta}{dy^{k-2}}$ $k = 3 \ldots n$ заключают только те p_{1s-1}, p_{0s}, где $s \leqslant k$ и p_{1k-1}, p_{0k} входят линейно в форме

$$\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} p_{1k-1} + \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} p_{0k}.$$

Если $z = f(x, y)$ есть интеграл данного уравнения (I), то $2n+1$ уравнений

$$z = f(x, y),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x},\ p_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots p_{1n-1} = \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}},\ p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

суть $2n+1$ интегралов Pfaff'овой системы $2n-1$ независимых уравнений

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 = dz - p dx - p dy = 0,\\
&\Omega_2 = dp_{10} - \theta dx - p_{11} dy = 0,\\
&\Omega_3 = dp_{01} - p_{11} dx - p_{02} dy = 0.\\
&\Omega_4 = dp_{11} - \frac{d\theta}{dy} dx - p_{12} dy = 0,\\
&\Omega_5 = dp_{02} - p_{12} dx - p_{03} dy = 0,\\
(\mathrm{I}')\quad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Omega_{2n-2} = dp_{1n-2} - \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} dx - p_{1n-1} dy = 0,\\
&\Omega_{2n-1} = dp_{0n-1} - p_{1n-1} dx - p_{0n} dy = 0.
\end{aligned}$$

Обратно, если $2n+1$ уравнений

$$u_i(x \ldots p_{0n}) = 0\ \ i = 1 \ldots 2n+1$$

есть система $2n+1$ интегралов ее, разрешимых относительно $2n+1$ переменных $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, то определенная из них функция $z=f(x, y)$ есть интеграл данного уравнения (I).

Пусть $z=f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$ будет полный интеграл ранга $(n-2)$[1], т. е. заключающий $2n+1$ произвольных постоянных $c_1 \ldots c_{2n+1}$ и такой, что $2n+1$ уравнений $z=f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$, $p_{10}=\frac{\partial f}{\partial x}$, $p_{01}=\frac{\partial f}{\partial y}$, $\ldots$ $\ldots p_{1n-1}=\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}$, $p_{0n}=\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ разрешимы относительно $c_1 \ldots c_{2n+1}$, то полученные уравнения

$$u_i(x \ldots p_{0n})=c_i \quad i=1 \ldots 2n+1$$

представляют систему $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I') Обратно, если $2n+1$ уравнений

$$u_i(x \ldots p_{0n})=c_i \quad i=1 \ldots 2n+1$$

есть система ее полных интегралов и разрешимы относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, полученная из них функция $z=f(x, y. c_1 \ldots c_{2n+1})$ есть полный интеграл ранга $(n-2)$ данного уравнения (I).

Отыскания полного интеграла ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I) приводится к отысканию системы $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I'), разрешимых относительно $z, p_{10}, \ldots p_{0n}$

Ищем полный интеграл ранга $(n-2)$ данного дифференциального уравнения (I). Ищем для этого систему $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I').

Свойства ее. Она интегрируется не менее, чем $2n+1$ интегралами. Из ее формы следует, что переменные $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-2}, p_{0n-1}$ суть функции переменных x, y.

Подставляя в последнее уравнение выражение

$$p_{0n-1}=p_{0n-1}(x, y)$$

получим уравнение

$$\left(p_{1n-1}-\frac{\partial p_{0n-1}}{\partial x}\right) dx+\left(p_{0n}-\frac{\partial p_{0n-1}}{\partial y}\right) dy=0$$

в четырех переменных x, y, p_{1n-1}, p_{0n}, которое интегрируется наименьшим числом два интегралов, откуда и следует утверждение.

Она не допускает интегрируемой комбинации.

Пусть

$$\lambda_1 \Omega_1+\ldots+\lambda_{2n-2} \Omega_{2n-2}+\lambda_{2n-1} \Omega_{2n-1}=du(x \ldots p_{0n}),$$

где не все коэффициенты λ нули. Так как левая часть не заключает dp_{1n-1}, dp_{0n}, функция u не заключает переменных p_{1n-1}, p_{0n}.

Так как

$$\lambda_1=\frac{\partial u}{\partial z}, \lambda_2=\frac{\partial u}{\partial p_{10}}, \lambda_3=\frac{\partial u}{\partial p_{01}} \ldots \lambda_{2n-2}=\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}, \lambda_{2n-1}=\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}},$$

[1]) Терминология по Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II, A 5.

то из тождества

$$-\frac{\partial u}{\partial z}p_{01}-\frac{\partial u}{\partial p_{10}}p_{11}-\frac{\partial u}{\partial p_{01}}p_{02}-\ldots-\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}p_{1n-1}-\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}}p_{0n}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}=\lambda_{2n-2}=0,\ \frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}}=\lambda_{2n-1}=0$$

и функция u не заключает $p_{1n-2},\ p_{0n-1}$.

Из тождества

$$-\frac{\partial u}{\partial z}p_{01}-\frac{\partial u}{\partial p_{10}}p_{11}-\frac{\partial u}{\partial p_{01}}p_{02}-\ldots-\frac{\partial u}{\partial p_{1n-3}}p_{1n-2}-\frac{\partial u}{\partial p_{0n-2}}p_{0n-1}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1n-3}}=\lambda_{2n-4}=0,\ \frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}=\lambda_{2n-3}=0$$

и что функция u не заключает $p_{1n-3},\ p_{0n-2}$ и т. д.

Наконец, из тождества

$$-\frac{\partial u}{\partial z}p_{01}=\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}$$

следует, что, наконец, $\frac{\partial u}{\partial z}=\lambda_1=0$. Итак,

$$\lambda_1=\ldots=\lambda_{2n-1}=0,$$

что невозможно.

Пусть теперь $u_i(x\ldots p_{0n})=c_i\ \ i=1\ldots 2n+1$ будет система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (Γ'). Пусть $u_1(x\ldots p_{0n})$ будет одна из функций $u_i\ \ i=1\ldots 2n+1$ так, что уравнения

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_{2n-1}=0,\ du_1=0$$

линейно независимы. Среди остальных функций $u_2\ldots u_{2n+1}$ есть хоть одна такая, напр., u_2, что уравнения

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_{2n-1}=0,\ du_1=0,\ du_2=0$$

также линейно независимы.

Это следует из общей, уже доказанной, теоремы (стр. 116):

Если какая-либо Pfaff'ова система k независимых уравнений

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_k=0$$

интегрируется не менее, чем $m>k$ полными интегралами, и если, с другой стороны, существует ряд не менее, чем $m-1$ независимых функций $u_1\ldots u_{m-1},\ldots$ заключающих $m-k-1$ функций $u_1\ldots u_{m-k-1}$, таких, что уравнения

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_k=0,\ du_1=0\ldots du_{m-k-1}=0$$

линейно независимы, то среди остальных функций u

$$u_{m-k}\ldots u_{m-1}\ldots$$

есть хоть одна функция u такая, что уравнения

$$\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_k = 0,\ du_1 = 0 \ldots du_{m-k-1} = 0,\ du = 0$$

также линейно независимы.

Полагая $k = 2n - 1$, $m = 2n + 1$ и что функции $u_1 \ldots u_{2n+1}$ нами рассматриваемые, имеем наше утверждение.

Найдем необходимое и достаточное условие, чтобы $2n + 1$ уравнений этой последней системы были линейно независимы. Это условие состоит в том, чтобы не все определители $2n + 1$-ой степени матриссы, состоящей из $2n + 3$ колонн и $2n + 1$ строк,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\dfrac{d\theta}{dy} & -p_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{12} & -p_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} & -p_{1n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1n-1} & -p_{0n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{10}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{11}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{02}}\ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\dfrac{\partial n_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{10}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{01}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{11}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{02}}\ldots & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-2}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{0n-1}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}
\end{array}$$

были тождественно равны нулю.

Эту матриссу преобразуем в эквивалентную ей.

Умножим 3-ю, 4-ю $\ldots 2n + 1$-ю колонны соответственно на $p_{10}, \theta, p_{11}, \dfrac{d\theta}{dy} \ldots p_{1n-1}$ и прибавим произведения к соответствующим элементам первой колонны; затем умножим те же колонны соответственно на $p_{01}, p_{11}, p_{02} \ldots p_{0n}$ и прибавим к элементам второй.

Обозначая

$$\frac{\overline{du}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + p_{10}\frac{\partial u}{\partial z} + \theta\frac{\partial u}{\partial p_{10}} + p_{11}\frac{\partial u}{\partial p_{01}} + \frac{d\theta}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{11}} + p_{12}\frac{\partial u}{\partial p_{02}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial^{n-2}\theta}{\partial y^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}} + p_{1n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\overline{du}}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial u}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial u}{\partial p_{10}} + p_{02}\frac{\partial u}{\partial p_{01}} + p_{12}\frac{\partial u}{\partial p_{11}} + p_{03}\frac{\partial u}{\partial p_{02}} + \ldots$$
$$\ldots + p_{1n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}} + p_{0n}\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}}$$

эквивалентную матриссу представим в виде

$$
\begin{matrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{10}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{11}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{10}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{11}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}
\end{matrix}
$$

Могут быть неравными нулю только определители, заключающие 3-ю, 4-ю $\dots$ $2n+1$-ю колонны. Поэтому, искомое условие состоит в том, чтобы не все определители матриссы

$$
\begin{matrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}
\end{matrix}
\quad \dots\dots\dots \quad (A')
$$

были тождественно равны нулю. Этим условиям должны удовлетворять функции u_1, u_2. Будем их называть условиями (A').

Далее, эта система $2n+1$ независимых уравнений, как интегрирующаяся системой $2n+1$ полных интегралов, должна быть сполна интегрируемой.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы были тождественно равны нулю определители

$$
\begin{vmatrix}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{d\theta}{dy} & -p_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{12} & -p_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, & -p_{1n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1n-1} & -p_{0n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{11}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{11}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}} & \frac{\partial}{\partial p_{11}} & \frac{\partial}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\
a & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c & d
\end{vmatrix}
$$

где $a, b, \ldots c, d$ — коэффициенты при $dx, dy, \ldots dp_{1n-1}, dp_{0n}$ уравнений системы. Если $a, b, \ . c, d$ коэффициенты $\frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} \ldots \frac{\partial u_{1,2}}{\partial p_{0n}}$ двух последних уравнений $du_1 = 0$, $du_2 = 0$,условные уравнения суть, очевидно, тождества. Преобразовывая в остальных случаях определители способом, употребленным выше при выводе условий (A'), получим условия интегрируемости в виде

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ a_i & b_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad i = 1 \,.\, 2n-1$$

где a_i, b_i, 0 0 суть коэффициенты при $dx, dy, dp_{1n-1}, dp_{0n}$ в уравнениях $\Omega_i = 0$ $i = 1 \ldots 2n-1$. Не трудно убедиться вычислением, что при $i = 1 \ldots 2n-3$ эти уравнения суть тождества. Таким образом, получаются только два условия интегрируемости:

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, & p_{1n-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ p_{1n-1} & p_{0n} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Они в развернутой форме имеют вид:

$$\frac{du_2}{dx}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} + \frac{du_2}{dy}\,\frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})} + \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{d\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})} - \left[\frac{du_1}{dx} - \frac{du_1}{dy}\,\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{d(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{d(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})} = 0,$$

Этим уравнениям должны удовлетворять функции u_1 u_2, где du_2 линейно независимо от Ω_1, Ω_{2n-1}, du_1. Но легко видеть из формы этих условий в виде приравненных нулю определителей, что и все функции u_i $i = 1 \,.\, . \, 2n+1$, подставленные вместо u_2, удовлетворяют этим условиям. Итак, все функции u_i $i = 1 \ldots 2n+1$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\overline{d} f}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} + \frac{\overline{d} f}{dy}\frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy_{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n1}, p_{1n-1})} + \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})} -$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{1n-1})}\right) = 0,$$

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{0n})} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}').$$

Выведем теперь условия для функции u_1.

Могут быть два случая: два уравнения системы (II′) независимы между собой или же одно есть следствие другого. В первом случае система (II′) в $2n+3$ переменных независимых x, y, z, p_{10} $p_{01}, \ldots p_{1n-1}$, p_{0n}, как имеющая $2n+1$ независимых решений u_i $i = 1..$ $2n+1$, должна быть полной; это дает условия для функции u_1.

Во втором случае определители второй степени матриссы, составленной из коэффициентов уравнений (II′), должны быть равны нулю. Это дает снова условия для функции u_1. Выводом этих условий мы займемся ниже в связи с интегрированием дифференциального уравнения (I).

Теперь займемся решением поставленной выше задачи об определении системы $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I′).

Пусть функция u_1 определена из упомянутых только что условий. Тогда система (II′) имеет не менее $2n+1$ решений, среди которых есть функция u_1, Тогда, согласно вышеупомянутой общей теореме (стр. 116), есть среди остальных такое решение, напр., u_2, что уравнения $\Omega_1 = 0, \ldots$ $\Omega_{2n-1} = 0$, $du_1 = 0$, $du_2 = 0$ линейно независимы. Так как функции u_1, u_2 удовлетворяют уравнениям (II′), система

$$\Omega_1 = 0 \ldots \quad \Omega_{2n-1} = 0, \quad du_1 = 0 \quad du_2 = 0$$

вполна интегрируемая. Остальные функции u_i $i = 3 \ldots 2n+1$ получаются интегрированием полной системы двух линейных дифференциональных уравнений, соответствующих этой Pfaff'овой системе, и имеющей, как легко видеть, вид приравненных нулю двух независимых определителей матриссы:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\overline{d}f}{dx} & \frac{\overline{d}f}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\overline{d}u_1}{dx} & \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\overline{d}u_2}{dx} & \frac{\overline{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \end{Vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots (B')$$

Эту систему уравнений будем называть системой (B').

Полученная система $2n+1$ уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ есть искомая система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I'). При чем в первом случае, когда два уравнения системы (II') независимы, эта последняя эквивалентна полной системе двух уравнений (B'), как имеющая те же независимые решения u_i $i = 1 \ldots 2n+1$. В этом случае система $2n+1$ функций u_i определяется по определении функции u_1 интегрированием полной системы (II'). Поэтому, система $2n+1$ полных интегралов $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$, заключающих уравнение $u_1 = c_1$, — единственная.

Во втором случае, когда одно уравнение системы (II') есть следствие другого, систем $2n+1$ полных интегралов, заключающих уравнение $u_1 = c_1$, есть бесчисленное множество. В самом деле, пусть определена, как указано выше, одна такая система $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$. Пусть u_{2n+2} будет последнее решение единственного уравнения системы (II'), независимое от $u_1 \ldots u_{2n+1}$.

Пусть $v_2 = \varphi\,(u_1 \ldots u_{2n+1};\ u_{2n+2})$ будет произвольная функция от них, подчиненная только одному условию заключать u_{2n+2}. Если не все определители матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\overline{du}_1}{dx} & \dfrac{\overline{du}_1}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\[2ex] \dfrac{\overline{dv}_2}{dx} & \dfrac{\overline{dv}_2}{dy} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{0n}} \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A')$$

нули, можем принять v_2 за функцию, аналогичную n_2, и, поступая по предыдущему, найдем систему $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I'')

$$u_1 = c_1, \quad v_j = \Gamma_j \quad j = 2 \ldots 2n+1.$$

Эта система отлична от предыдущей, так как в силу уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ не следует, чтобы

$$v_2 = \varphi\,(c_1 \ldots c_{2n+1};\ u_{2n+2})$$

было равно постоянному.

Если же все определители матриссы (A') нули тождественно, то функция

$$u_2 + \varphi\,(u_1 \ldots u_{2n+1};\ u_{2n+2})$$

может быть взята за функцию, аналогичную u_2, и будет получена система $2n+1$ полных интегралов, отличная от системы $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$.

Так как вид функции φ произвольный, имеем бесчисленное множество системы $2n+1$ полных интегралов, заключающих уравнение $u_1 = c_1$:

$$n_1 = c_1,\ u_2 = c_2,\ u_3 = c_3, \ldots u_{2n+1} = c_{2n+1};$$
$$u_1 = c_1,\ \Phi\,(u_1 \ldots u_{2n+1};\ u_{2n+2}) = \Gamma_2,\ v_3 = \Gamma_3, \ldots v_{2n+1} = \Gamma_{2n+1}$$
$$u_1 = c_1,\ \Psi\,(u_1 \ldots u_{2n+1};\ u_{2n+2}) = K_2,\ w_3 = K_3, \ldots w_{2n+1} = K_{2n+1}.$$

Если функции Φ, Ψ... заключают все решения $u_1 \ldots u_{2n+2}$, эти системы интегралов различны между собой, так как, напр., $\Psi(u_1 \ldots \ldots u_{2n+1};\ u_{2n+2})$ не есть функция от u_1, Φ, $v_3 \ldots v_{2n+1}$ только.

Таким образом, различие между этими двумя случаями определяется свойством матриссы, составленной из коэффициентов при $\frac{df}{dx}\ \frac{df}{dy}\ \frac{\partial f}{\partial p_{1-n1}}\ \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}$ уравнений (II').

Она имеет вид:

$$(C)\qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial n_1}{\partial p_{0n}}, & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1}}, & \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\ p_{0n})}, & -\left(\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} + \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d)y, p_{1n-1}}\right) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & -\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} & -\dfrac{\bar{d}u_1}{dy}. \end{matrix}$$

Если $\triangle$, A, B, B_1, C означают определители ее

$$\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2,$$

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})} & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}\, p_{1n-1})} \\ -\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} -\left[\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} + \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{1n-1})}\right], & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}\, p_{1n-1})} \\ -\dfrac{\bar{d}u_1}{dy}\ . & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix},$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-1}},\ u_1\right)}{d\,(y, p_{0n})} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, & -\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0u}}, & -\left[\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} + \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d\,(y p_{1n-1})}\right] \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, & -\dfrac{\bar{d}u_1}{dy} \end{vmatrix}$$

то не трудно убедиться, что

$$A = \triangle \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) + B\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} + C\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}},$$

$$B = B_1.$$

§ 6.

Рассмотрим вопрос об интегрировании Pfaff'овой системы (I') в связи с поставленной выше задачей определения полного интеграла ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I).

Могут быть три случая:

$$1)\quad \frac{\partial(u_1 . u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} \neq 0,$$

$$2)\quad \frac{\partial(u_1\, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0,$$

но не все элементы $\frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{1n-1}}, \ \frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{0n}}$ равны нулю.

$$3)\quad \frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{1n-1}} = \frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{0n}} = 0.$$

Пусть

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} \neq 0.$$

В этом случае полная система линейных уравнений (B') имеет вид

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0 \quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B').$$

Так как она разрешима относительно $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, то ее независимые решения $u_i\, i = 1 \ldots 2n+1$ независимы относительно $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$; так как уравнения $u_i = c_i \ i = 1 \ldots 2n+1$ разрешимы относительно $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, определенная из них функция $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$ есть полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I).

Этот случай распадается в свою очередь на два, в зависимости от того, будут ли два уравнения системы (II') независимы, или же одно уравнение есть следствие другого. Рассмотрим первый случай.

В этом случае есть только одна система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (II'), заключающая уравнения $u_1 = c_1$, и, следовательно, есть только один полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}) = c_1.$$

Найдем условия для функции u_1.

В этом случае все функции u_i $i=1\ldots 2n+1$ суть решения системы (II'), Она, как эквивалентная системе (B'), должна быть разрешимой относительно $\frac{\overline{\partial f}}{dx}$ и $\frac{\overline{\partial f}}{dy}$. Поэтому, определитель

$$\triangle=\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2\neq 0.$$

Далее, она должна быть полной. Найдем условия для этого. Если систему (II') разрешить относительно $\frac{\overline{df}}{dx},\frac{\overline{df}}{dy}$, она получит вид:

$$\triangle\frac{\overline{df}}{dx}+A\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}+B\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}=0.$$

$$\triangle\frac{\overline{df}}{dy}+B\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}=0.$$

Чтобы она была полной, необходимо и достаточно, чтобы ей соответствующая Pfaff'ова система была сполна интегрируемой. Эта система имеет вид

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_{2n-1}=0,\ \triangle\,dp_{1n-1}-Adx-Bdy=0,\ \triangle\,dp_{0n}-Bdx-Cdy=0,$$

а условия ее полной интегрируемости суть

$$\begin{vmatrix}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{d\theta}{dy} & -p_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-p_{12} & -p_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} & -p_{1n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0\\
-p_{1n-1} & -p_{0n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0\\
-A & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \triangle & 0\\
-B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \triangle\\
\frac{\overline{\partial}}{dx} & \frac{\overline{\partial}}{dy} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}} & \frac{\partial}{\partial p_{11}} & \frac{\partial}{\partial p_{02}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}}\\
a & b & & & & & & & & & c & d
\end{vmatrix}=0$$

где $a, b,\ldots c,\ d$ суть коэффициенты при $dx,\ dy\ldots dp_{1n-1}\ dp_{0n}$ этих уравнений.

Преобразовывая эти определители, как при выводе условий (A'), получим их в форме

$$\begin{vmatrix}
-A & -B & \triangle & 0\\
-B & -C & 0 & \triangle\\
\frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{d} & \frac{\partial}{dp_{1n-1}} & \frac{\partial}{dp_{0n}}\\
a & b & c & d
\end{vmatrix}=0.$$

Если a, b, c, d суть коэффициенты уравнений $\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_{2n-1} = 0$, условные уравнения суть тождества. Остаются только два условия:

$$\alpha = \begin{vmatrix} -A & -B & \triangle & 0 \\ -B & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ -A & -B & \triangle & 0 \end{vmatrix} = 0, \ \beta = \begin{vmatrix} -A & -B & \triangle & 0 \\ -B & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ -B & -C & \triangle & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем, что они сводятся к одному, и найдем его вид. Для этого выведем свойство определителей α, β, заключающееся в том, что

$$-\alpha \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = \beta \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}$$

при произвольном виде входящей функции u_1.

Имеем, что

$$\triangle \frac{\overline{d}u_1}{dx} + A \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0, \ \triangle \frac{\overline{d}u_1}{dy} + B \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0,$$

каков бы ни был вид функции n_1. Пользуясь этими тождествами, легко убедиться, что

$$-\alpha \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = \triangle \Bigg[\triangle \left(\frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0n})} \right) - B \left(\frac{\overline{d}(\triangle, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(\triangle, u_1)}{d(y, p_{0n})} \right)$$
$$- \frac{\overline{d}u_1}{dx} \left(\triangle \frac{\overline{d}\triangle}{dy} + B \frac{\partial \triangle}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial \triangle}{\partial p_{0n}} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1u-1}} \left(\triangle \frac{\overline{d}A}{dy} + B \frac{\partial A}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial A}{\partial p_{0n}} \right)$$
$$- \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \left(\triangle \frac{\overline{d}B}{dy} + B \frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial B}{\partial p_{0n}} \right) \Bigg],$$

$$\beta \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \triangle \Bigg[\triangle \left(\frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0n})} \right) - B \left(\frac{\overline{d}(\triangle, u_1)}{d(r, p_{1n-1})} + \right.$$
$$\left. + \frac{\overline{d}(\triangle, n_1)}{d(y, p_{0n})} \right) - \frac{\overline{d}u_1}{dy} \left(\triangle \frac{\overline{d}\triangle}{dx} + A \frac{\partial \triangle}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial \triangle}{\partial p_{0n}} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \left(\triangle \frac{\overline{d}B}{dx} + \right.$$
$$\left. + A \frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial B}{\partial p_{0u}} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \left(\triangle \frac{\overline{d}C}{dx} + A \frac{\partial C}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial C}{\partial p_{0n}} \right) \Bigg],$$

или, проще, означая через $\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}$ операции соответственно

$$\triangle \frac{\overline{d}}{dx} + A \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial}{\partial p_{0n}}, \ \triangle \frac{\overline{d}}{dy} + B \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial}{\partial p_{0n}},$$

$$-\alpha \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = \triangle \Bigg[\triangle \left(\frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0u})} \right) - B \left(\frac{\overline{d}(\triangle, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \right.$$
$$\left. + \frac{\overline{d}(\triangle, u_1)}{d(y, p_{0n})} \right) - \frac{\overline{d}u_1}{dx} \frac{\delta \triangle}{\delta y} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \frac{\delta A}{\delta y} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \frac{\delta B}{\delta y},$$

$$\beta \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \triangle \Bigg[\triangle \left(\frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0n})} \right) - B \left(\frac{\overline{d}(\triangle, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \right.$$
$$\left. + \frac{\overline{d}(\triangle, u_1)}{d(y, p_{0n})} \right) - \frac{\overline{d}u_1}{dy} \frac{\delta \triangle}{\delta x} - \frac{\partial n_1}{\partial p_{1n-1}} \delta B - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \frac{\delta C}{\delta x}.$$

Докажем, что

$$\frac{\bar{d}u_1}{dx}\,\frac{\delta\triangle}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\delta A}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\,\frac{\delta B}{\delta y}=\frac{\bar{d}u_1}{dy}\,\frac{\delta\triangle}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\delta B}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\,\frac{\delta C}{\delta x}.$$

Так как

$$\frac{\delta u_1}{\delta y}=0,\quad \frac{\delta u_1}{\delta x}=0$$

при произвольном виде функции u_1, то

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta u_1}{\delta y}\right)=0,\quad \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x}\right)=0.$$

Подставляя в первое тождество вместо $\frac{\delta u_1}{\delta y}$ его действительное выражение и производя действие символом $\frac{\delta}{\delta x}$, получим

$$\frac{\delta}{\delta x}\triangle\frac{\bar{d}u_1}{dy}+\frac{\delta B}{\delta x}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}+\frac{\delta C}{\delta x}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=-\triangle\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)-B\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)-$$
$$-C\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right).$$

Заменяя во второй части символ $\frac{\delta}{\delta x}$ его действительным выражением, переставляя порядок дифференцирования и помня, что

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)=\frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-\frac{\bar{d}}{dy}\,\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}}-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

и что

$$A=\triangle\frac{\bar{d}}{dy}\,\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}+B\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}+C\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}},$$

получим, что

$$\frac{\delta\triangle}{\delta x}\,\frac{\bar{d}u_1}{dy}+\frac{\delta B}{\delta x}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}+\frac{\delta C}{\delta x}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=-\triangle\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)-B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right).$$

Из второго же тождества имеем, заменяя символ $\frac{\delta}{\delta x}$ его действительным выражением, что

$$\frac{\delta\triangle}{\delta y}\,\frac{\bar{d}u_1}{dx}+\frac{\delta A}{\delta y}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}+\frac{\delta B}{\delta y}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=-\triangle\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)-B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right).$$

Поэтому, сравнивая оба тождества, имеем, что

$$\frac{\overline{du_1}}{dx}\frac{\delta\triangle}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\delta A}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta B}{\delta y}=\frac{\overline{du_1}}{dy}\frac{\delta\triangle}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\delta B}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta C}{\delta x}.$$

Поэтому

$$-\alpha\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=\beta\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}},\ \text{ч и т. д.}$$

Так как α, β суть полиномы относительно производных от u_1, из последнего тождества следует, что α, β имеют вид

$$\alpha=-\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}},\ \beta=\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}.$$

Поэтому из условий

$$\alpha=-\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=0,\ \beta=\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0$$

в виду того, что $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}$, $\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}$ не нули одновременно, иначе было бы, что $\triangle=0$, следует, что $\omega=0$, и мы имеем только одно условие интегрируемости.

Оно имеет вид:

$$\triangle\left(\frac{\overline{d}(B,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(B,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-B\left(\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-$$

$$-\frac{\overline{du_1}}{dy}\left(\triangle\frac{\overline{d}\triangle}{dy}+B\frac{\partial\triangle}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial\triangle}{\partial p_0}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left(\triangle\frac{\overline{dA}}{dy}+B\frac{\partial A}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial A}{\partial p_{0n}}\right)-$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\left(\triangle\frac{\overline{dB}}{dy}+B\frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial B}{\partial p_{0n}}\right)=0,$$

или вид

$$\triangle\left(\frac{\overline{d}(B,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(B,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-B\left(\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-$$

$$-\frac{\overline{du_1}}{dy}\left(\triangle\frac{\overline{d}\triangle}{dx}+A\frac{\partial\triangle}{\partial p_{1n-1}}+B\frac{\partial\triangle}{\partial p_{0n}}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left(\triangle\frac{\overline{dB}}{dx}+A\frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}}+\right.$$

$$\left.+B\frac{\partial B}{\partial p_{0n}}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\left(\triangle\frac{\overline{dC}}{dx}+A\frac{\partial C}{\partial p_{1n-1}}+B\frac{\partial C}{\partial p_{0n}}\right)=0$$

по сокращении на $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}$.

Это есть дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка от функции u_1, линейное относительно вторых производных. Его порядок при определении искомой функции u_1 не понижается, так как оно заключает член $\triangle\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$[1]).

Если функция u_1 определена из него так, что $\triangle\neq 0$, система (II')— полная и разрешимая относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Если u_i $i=1\ldots 2n+1$

[1]) Это дифференциальное уравнение найдено иным путем J. König'ом (l. c.).

суть ее $2n+1$ независимых решений, функция $z=f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$, определенная из системы $2n+1$ уравнений

$$u_i = c_i \quad i = 1 \ldots 2n+1$$

есть полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I), единственный, удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}) = c_1.$$

Рассмотрим второй случай, когда система (II') сводится только к одному уравнению. В этом случае все определители матриссы (C), следовательно, и определитель $\triangle$, равны нулю тождественно. Итак,

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$, иначе было бы и $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0$, а следовательно,

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1} p_{0n})} = 0.$$

Если же $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$, то независимыми определителями матриссы (C) могут быть $\triangle$, B, C. Но так как

$$\triangle \frac{\overline{du}_1}{dy} + B \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0$$

то независимые суть только $\triangle$, C. Таким образом, необходимо и достаточно, чтобы функция u_1 удовлетворяла в рассматриваемом случае условиям

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 = 0, \quad . \; . \; . \; (\mathrm{IV}')$$

$$C = \frac{\overline{du}_1}{dx} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} - \frac{\overline{du}_1}{dy} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 \frac{\overline{d}}{dy} \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0.$$

Эти уравнения можно представить в ином виде: если λ, μ суть корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \xi - \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a):$$

функция u_1 должна удовлетворять одной из двух систем уравнений [1]):

[1]) В этом случае du_1 есть интегрируемая комбинация одной из двух систем дифференциальных уравнений характеристик n-ого порядка дифференциального уравнения (I) : $dy = \mu dz$, $dz = (p_{10} + \mu p_{01})\, dx, \ldots \ldots dp_{0n-1} = (p_{1n-1} + \mu p_{0n})\, dx$,

$$dp_{1n-1} = \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Theta\right) dx - \lambda dp_{0n};\; dy = \lambda dx,\; dz = (p_{10} + \lambda p_{01})\, dx \ldots dp_{0n-1} =$$

$$= (p_{1n-1} + \lambda p_{0n})\, dx,\; dp_{1n-1} = \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\Theta}{dy^{n-2}}\right) dx - \mu dp_{0n},$$

соответствующих корням μ, λ.

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\overline{du_1}}{dx} + \mu \frac{\overline{du_1}}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \cdot \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) = 0, \quad . \quad . \; (\mathrm{IV}_1^1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \mu \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\overline{du_1}}{dx} + \lambda \frac{\overline{du_1}}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \cdot \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) = 0 \quad . \quad . \; (\mathrm{IV}_2^1),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0.$$

Если функция u_1 удовлетворяет одной из двух систем (IV_i^1) (IV_i^1) и $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$, система (II^1) сводится только к одному уравнению

$$\frac{\overline{d}\,(f, u_1)}{d\,(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}\,(f, u_1)}{d\,(y, p_{0n})} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}').$$

Функция u_2 определяется, как его решение, такое, что

$$\frac{\partial\,(u_1\,u_2)}{\partial\,(p_{1n-1}, p_{0n})} \neq 0,$$

что всегда возможно, иначе уравнение $\frac{\partial\,(f,\ u_1)}{\partial\,(p_{1n-1},\ p_{0n})} = 0$ было бы следствием (II'), что невозможно. Остальные функции $u_3 \ldots u_{2n+1}$ определяются, как остальные независимые решения полной системы

$$\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1,\ u_1)}{d\,(z,\ p_{1n-1}, p_{0n})} = 0, \quad \frac{\overline{d}\,(f.\ u_1,\ u_1)}{d\,(y,\ p_{1n-1}, p_{0n})} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B').$$

Функция $z = f\,(x, y, c_1 .. c_{2n+1})$, определенная из системы $2n+1$ уравнений $u_i = c_i \;\; i = 1 \ldots 2n+1$ есть полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1\,(x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}) = c_1.$$

В рассматриваемом случае есть бесчисленное множество таких полных интегралов, так как в этом случае есть бесчисленное множество различных систем полных интегралов Pfaff'овой системы (I'') $u_i = c_i \;\; i = 1 .. 2n+1$, заключающих уравнение $u_1 = c_1$, и таких, что

$$\frac{\partial\,(u_1,\ u_1)}{\partial\,(p_{1n-1}\ p_{0n})} \neq 0.$$

Доказательство то же, что и в общем случае.

Дифференциальное уравнение n-ого порядка

$$u_1\,(x, y, z, \ldots p_{0n}) = c_1$$

находится в инволюции с данным (I).

Если v_1, v_2 два независимых решения какой-либо системы $(\mathrm{IV}_1{}')$, $(\mathrm{IV}_2{}')$, можно положить $u_1 = \varphi\,(v_1, v_2)$, где функция φ произвольна, лишь бы

$$\frac{\partial\varphi\,(v_1, v_2)}{\partial p_{1n-1}} \neq 0 \;\; ^{1)}.$$

[1]) В этом случае всякий интеграл данного уравнения (I) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi\,(v_1\,v_2) = 0$$

при соответствующем виде функции φ. Goursat (l. c.).

Если $u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right)$ есть решение одной из систем (IV_1'), (IV_2'), а v_1 есть решение другой из них, то можно положить $u_2 = v_1$, лишь бы

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$$

и $\lambda \neq \mu$.

Если v_1, v_2 решения одной системы (IV), и w_1, w_2 решения другой, можно положить $u_1 = v_1 - \varphi(v_2)$, $u_2 = w_1 - \psi(w_2)$ (метод Darboux).

Если припомним роль решений систем (IV_1), (IV_2) при $n = 2$, можем следующим образом продолжить способ отыскания полного интеграла ранга $1 \ldots (n-2)$, заключающего $7 \ldots 2n+1$ произвольных постоянных:

Если ни одна система (IV) не имет при $n = 2$ решения, пробуем, не имеет ли она его при $n = 3$ [1]).

Если она имеет, и оно есть $u_1(x, y, z, p_{10} \ldots p_{12}, p_{03})$, при чем $\frac{\partial u_1}{\partial p_{12}} \neq 0$, ищем какое-либо решение u_2 уравнения

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{12})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{03})} = 0,$$

где

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{12}, p_{03})} \neq 0,$$

а интегрированием полной системы

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, p_{12}, p_{03})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{12}, p_{03})} = 0$$

остальные функции u_i $i = 3 \ldots 7$. Функция $z = f(x, y, c_1 \ldots c_7)$, определенная из уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 7$ есть полный интеграл ранга 1 с семью произвольными постоянными дифференциального уравнения (I) — один из бесчисленного множества их, удовлетворяющих дифференциальному уравнению третьего порядка

$$u_1(x, y, z \ldots p_{03}) = c_1,$$

находящемуся в инволюции с данным (I).

Если же ни одна система (IV'), (IV_2) не имеет решения при $n = 3$, пробуем, не имеет ли его какая-либо из них при $n = 4$ и т. д.

Между последовательными системами (IV) есть связь, выражающаяся двумя теоремами [2]).

Если $u_1(x, y, z \ldots p_{1m-1}, p_{0m})$ есть решение одной из систем (IV) при $n = m$, она есть решение всякой системы (IV) при $n > m$ и соответствующей тому же корню квадратного уравнения (a).

---

[1]) От значений n зависит вид символов $\frac{\overline{d}}{dx}, \frac{\overline{d}}{dy}$.

[2]) Goursat (l. c.).

Ни одна из систем (IV) при $n > 2$ и $\lambda \neq \mu$ не имеет больше одного решения n-ого порядка[1]), так как всякое иное решение этого порядка есть функция первого и решений низшего порядка[2]).

Изложенный способ заключается в том, чтобы зная функцию $u_1(x, y \ldots p_{0n})$, найти решение u_2 уравнения

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{0n})} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathrm{II}')$$

где

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} \neq 0,$$

и затем интегрированием полной системы

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0$$

найти остальные функции u_i $i = 3 \ldots 2n+1$ [3]). Система уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ есть полный интеграл Pfaff'овой системы (I''), заключающий уравнение $u_1 = c_1$ и разрешимый относительно $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$. Но функции $u_3 \ldots u_{2n+1}$ суть также решения уравнения (II'). Мы, поэтому, по определении функции u_1 искали еще $2n$ решений уравнения (II') $u_2 \ldots u_{2n+1}$ так, чтобы система уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ была системой $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I''), заключающей уравнение $u_1 = c_1$ и разрешимой относительно $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$.

Мы займемся решением более общей задачи и найдем и иные интегралы уравнения (I): зная функцию u_1 и зная все $2n+2$ решений дифференциального уравнения (II') или, что то же, зная систему $2n+2$ полных интегралов соответствующей Pfaff'овой системы, найти систему $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I''), заключающую уравнение $u_1 = c_1$ и разрешимую относительно $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$. Pfaff'ова система, соответствующая уравнению (II'), имеет вид, если предположим, что функция u_1 удовлетворяет, напр., системе (IV'_1):

$$dy = \lambda dx, \; dz = (p_{10} + \lambda p_{01})\, dx, \; dp_{10} = (\theta + \lambda p_{11})\, dx, \; dp_{01} = (p_{11} + \lambda p_{02})\, dx \ldots$$

$$\ldots dp_{1n-2} = \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1}\right) dx, \; dp_{0n-1} = (p_{1n-1} + \lambda p_{0n})\, dx,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\, dp_{1n-1} = -\frac{\overline{d}u_1}{dx}\, dx, \quad \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\, dp_{0n} = -\frac{\overline{d}u_1}{dy} dx.$$

Пусть $y = y(x, x_0 \ldots p_{0n}^0)$, $z = z(x, x_0 \ldots p_{0n}^0) \ldots p_{0n} = p_{0n}(x, x_0 \ldots p_{0n}^0)$ будет система $2n+2$ полных интегралов ее, главная относительно

---

[1]) Т. е. заключающего p_{1k-1}, p_{0k}, где k наиболее равно n.

[2]) К этим теоремам можно добавить еще одну, обратную первой, приведенной в тексте: если функция $u_7(x, y, z \ldots p_{0m})$ есть решение какой-либо системы (IV) при $n > m$, она есть решение той же системы при $n = m$.

[3]) Этот путь указан J. König'ом (l. c.).

$x = x_0$. Рассмотрим формулы преобразования переменных $x, y, z \ldots p_{0n}$ к новым $x_0, y_0, z_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}$

$$x = \alpha - \alpha_0 + x_0,\ y = y(x, x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}), \ldots p_{0n} = p_{0n}(x, x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n})$$

где α — параметр. Так как $u_1(x \ldots p_{0n}) = c_1$ есть интеграл вышенаписанной системы, то в силу этих формул

$$u_1(x, y, z \ldots p_{0n}) = u_1(x_9 \ldots \overset{0}{p}_{0n}).$$

Если, поэтому, переменные $x, y, z \ldots p_{0n}$ связаны условием $u_1(x, y, z \ldots p_{0n}) = c_1$, то новые переменные $x_0 \ldots \overset{0}{p}_{9n}$ связаны условием $u_1(x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}) = c_1$. Преобразуем этими формулами Pfaff'ову систему (I″)

$$\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_{2n-1} = 0,$$

в которую уже полагаем внесенной зависимость $u_1 = c_1$. Найдем ее вид после преобразования. Найдем для этого

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha}, \ldots \frac{\partial \Omega_{2n-1}}{\partial \alpha}.$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dz - p_{10}\,dx - p_{01}\,dy) = d\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_{10}}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial p_{01}}{\partial \alpha}dy - p_{01}\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha} =$$
$$= d(p_{10} + \lambda p_{01}) - (\theta + \lambda p_{11})\,dx - (p_{11} + \lambda p_{02})\,dy - p_{01}\,d\lambda = \Omega_2 + \lambda \Omega_3.$$

Будем искать

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k},\ \frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k+1}$$

где $2k < 2n - 2$.

$$\frac{\partial \Omega_{2k}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(dp_{1k-1} - \frac{d^{k-1}\theta}{py^{k-1}}dx - p_{1k}\,dy\right) = d\frac{\partial p_{1k-1}}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)dx$$
$$- \frac{\partial p_{1k}}{\partial \alpha}dy - p_{1k}\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha} = d\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}} + \lambda p_{1k}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) +\right.$$
$$+ (p_{10} + \lambda p_{01})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) + \ldots + \left(\frac{d^k\theta}{dy^k} + \lambda p_{1k-1}\right)\frac{\partial}{\partial p_{1k}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) +$$
$$\left. + (p_{1k+1} + \lambda p_{0k+2})\frac{\partial}{\partial p_{0k+1}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)\right]dx - \left(\frac{d^k\theta}{dy^k} + \lambda p_{1k+1}\right)dy - p_{1k}\,d\lambda;$$

или после простых преобразований

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)\Omega_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial p_{0k}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy_{k-1}}\right)\Omega_{2k+1} + \left(\frac{\partial}{\partial p_{1k}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) + \lambda\right)\Omega_{2k+2} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial p_{0k+1}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)\Omega_{2k+3}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k+1} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dp_{0k} - p_{1k}\,dx - p_{0k+1}\,dy) = d\frac{\partial p_{0k}}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_{1k}}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial p_{0k+1}}{\partial \alpha}dy -$$
$$- p_{0k+1}\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha} = d(p_{1k} + \lambda p_{0k+1}) - \left(\frac{d^k\theta}{dy^k} + \lambda p_{1k+1}\right)dx -$$
$$- (p_{1k+1} + \lambda p_{0k+2})\,dy - p_{0k+1}\,d\lambda = \Omega_{2k+2} + \lambda\Omega_{2k+3}.$$

Найдем, наконец,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2},\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(dp_{1n-2}-\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}dx-p_{1n-1}dy\right)=d\frac{\partial p_{1n-2}}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy_{n-2}}\right)dx-$$

$$-\frac{\partial p_{1n-1}}{\partial\alpha}dy-p_{1n-1}d\frac{\partial y}{\partial\alpha}=d\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}+\lambda p_{1n-1}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\right.$$

$$+\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+(p_{10}+\lambda p_{01})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\ldots+\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}+\lambda p_{1n-1}\right)\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+$$

$$\left.+(p_{1n-1}+\lambda p_{0n})\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dx}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dy}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right]dx+$$

$$+\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dx}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy-p_{1n-1}d\lambda,$$

или после простых преобразований

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2}=\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)(dy-\lambda dx)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_1+\ldots+$$

$$+\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_{2n-1}+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}dp_{1n-1}+\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}dp_{0n}+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dx}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx+$$

$$+\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dy}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx+\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dx}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy+\lambda dp_{1n-1}.$$

Заменяя $\dfrac{\partial\theta}{\partial p_{11}}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial p_{02}}$ через соответственно $-(\lambda+\mu), -\lambda\mu$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2}=\left[\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dx}+\mu\dfrac{\overline{du}_1}{du}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}+\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right](dy-\lambda dx)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_1+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_{2n-1}-\mu\left[\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dx}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx+\frac{\dfrac{\overline{du}_1}{dy}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy+dp_{1n-1}+\lambda dp_{0n}\right].$$

Но

$$\frac{\overline{du}_1}{dx}+\mu\frac{\overline{du}_1}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)=0$$

так как функция u_1 удовлетворяет системе ($\mathrm{IV'}_1{}'$).

Далее

$$du_1 = \frac{\overline{du_1}}{dx} dx + \frac{\overline{du_1}}{dy} dy + \frac{\partial u_1}{\partial z} \Omega_1 + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} \Omega_{2n-1} +$$

$$+ \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} dp_{1n-1} + \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} dp_{0n} = 0,$$

или, так как

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}},$$

$$\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} dy + dp_{1n-1} + \lambda dp_{0n} = - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} \Omega_1 - \ldots - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} \Omega_{2n-1}$$

Поэтому, окончательно,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_{2n-2} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} \right) + \mu \frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} \right] \Omega_1 + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \mu \frac{\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} \right) \right] \Omega_{2n-1}.$$

Найдем $\frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_{2n-1}$.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Omega_{2n-1} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (dp_{0n-1} - p_{1n-1} dx - p_{0n} dy) = d \frac{\partial p_{0n-1}}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_{1n-1}}{\partial \alpha} dx - \frac{\partial p_{0n}}{\partial \alpha} dy -$$

$$- p_{0n} d \frac{\partial y}{\partial \alpha} = d (p_{1n-1} + \lambda p_{0n}) + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} dy - p_{0n} d\lambda =$$

$$= dp_{1n-1} + \lambda dp_{0n} + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} dy = - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} \Omega_1 - \ldots - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}} \Omega_{2n-1}.$$

Итак, дифференциальные выражения $\Omega_1 \ldots \Omega_{2n-1}$, выраженные в новых переменых $z_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}$ и зависящие от параметра a, удолетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \alpha_{i},\Omega, + \ldots + \alpha_{i2n-1} \Omega_{2n-1}$$

$$i = 1 \ldots 2_n - 1,$$

линейным относительно $\Omega, \ldots \Omega_{2n-1}$. Поэтому, они имеют вид

$$\Omega_i = \beta_i, \Omega^0, + \ldots + \beta_{i2n-1} \Omega^0{}_{2n-1}, \quad i = 1 \ldots 2n - 1,$$

где Ω^0_i $i = 1 \ldots 2n-1$ суть их начальные значения при $\alpha = \alpha_0$ и имеют вид

$$\Omega_1^0 = dz_0 - p_{10}^0\, dx_0 - p_{01}^0\, dy_0, \quad \Omega_2^0 = dp_{10}^0 - \theta_0 dx_0 - p_{11}^0\, dy_0 \ldots$$

$$\Omega_{2n-2}^0 = dp_{1n-2}^0 - \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)_0 dx_0 - p_{1n-1}^0\, dy_0,$$

$$\Omega_{2n-1}^0 = dp_{0n-1}^0 - p_{1n-1}^0\, dx_0 - p_{0n}^0\, dy_0,$$

где $\theta_0, \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0, \ldots \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)_0$ есть результат подстановки $x_0 \ldots p_{0n}^0$ вместо $x, \ldots p_{0n}$ в $\theta, \frac{d\theta}{dy} \ldots \frac{d^{n-2}\theta}{dy_{n-2}}$.

Отсюда вытекает следующий способ определения системы $2n+1$ интегралов Pfaff'вой системы (I^1), заключающей уравнение $u_1 = c_1$. Достаточно проинтегрировать Pfaff'ову систему $\Omega_1^0 = 0 \ldots \Omega_{2n-1}^0 = 0$ $2n-1$ уравнений помощью $2n+2$ интегралов

$$u_1\,(z_0 \ldots p_{0n}^0) = c_1, \quad v_j\,(x_0, \ldots p_{0n}^0) = 0 \quad {}_j = 2, \ldots 2n+2$$

что всегда возможно и при том бесчисленным множеством способов, и исключить $x_0 \ldots p_{0n}^0$ из этих уравнений и уравнений $y = y\,(x, z_0 \ldots p_{0n}^0)$ $\ldots p_{n0} = p_{n0}\,(x, x_0 \ldots p_{0n}^0)$.

Если полученная система $2n+1$ интегралов разрешается относительно $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, она есть искомая. Функция $z = f\,(x, y)$, определенная из нее, есть интеграл дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий уравнению $u_1\,(x, y, z \ldots p_{0n}) = c_1$. Удобнее всего поступить следующим образом: ищем $2n+3$ функций $x_0\,(\omega), \ldots p_{0n}^0\,(\omega)$ параметра ω, удовлетворяющих уравнениям

$$u_1\,(x_0 \ldots p_n^0) = c_1, \quad \frac{dz_0}{d\omega} - p_{01}^0 \frac{dx_0}{d\omega} - p_{01}^0 \frac{dy_0}{d\omega} = 0 \ldots$$

$$\frac{dp_{0n-1}^0}{d\omega} - p_{1n-1}^0 \frac{dx_0}{d\omega} - p_{0n} \frac{dy_0}{d\omega} = 0$$

и исключаем параметр ω из $2n+2$ уравнений

$$y = y\,(x, x_0\,(\omega), \ldots p_{0n}^0(\omega)\,], \ldots p_{0n} = p_{0n}\,[x, x_0\,(\omega), \ldots p_{0n}^0\,(\omega)].$$

Если какая-либо из систем (IV_1'), (IV_2') допускает два независимых решения, можно найти интегрированием двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений интеграл Cauchy, представляющий поверхность, проходящую через данный интегральный пояс N-го порядка

$$x = x\,(\omega) \ldots p_{0n} = p_{0n}\,(\omega).$$

Про этот метод отыскания интеграла можно сказать то же, что и о методе определения полного интеграла ранга $n-2$. Если ни одна система (IV) при $n = 2$ не имеет решения, ищем, не имеет ли его какая-либо система (IV) при $n=3$; если есть решение $u_1(x\ldots p_{03})$, находим изложенным способом интеграл, удовлетворяющий и уравнению $u_1(x\ldots p_{03})=c_1$ и т. д. [1]).

§ 8

До сих пор мы получали результаты по большей части известные, по одним и тем же методам. Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})}=0$$

но не все элементы $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial p_{1n-1}}, \dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial p_{0n}}$ нули.

В этом случае полная система (B') не разрешается относительно $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Поэтому, система $2n+1$ полных интегралов $u_i=c_i$; $i=1\ldots 2n+1$ Pfaff'овой системы (I″) неразрешима относительно $z, p_{01}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$ и, следовательно, она не дает интеграла данного дифференциального уравнения (I). Но из нее можно, за исключением одного случая, получить интеграл $z=f(x, y, c_1\ldots c_{2n})$, заключающий $2n$ произвольных постоянных $c_1, \ldots c_{2n}$ и такой, что по крайней мере одна из систем:

$$z=f(x, y, c_1\ldots c_{2n}), p_{10}=\frac{\partial f}{\partial x}, p_{01}=\frac{\partial f}{\partial y}\ldots p_{0n-1}=\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}, p_{1n-1}=\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}};$$

$$z=f(x, y, c_1\ldots c_{2n}), p_{10}=\frac{\partial f}{\partial x}, p_{01}=\frac{\partial f}{\partial y}\ldots p_{0n-1}=\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}, p_{0n}=\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

разрешима относительно произвольных постоянных $c_1\ldots c_{2n}$, занимающий промежуточное место между полными интегралами ранга $n-3$ и $n-2$.

Докажем, что в этом случае $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}$ не нули одновременно и что

$$\frac{\bar{d}(u_1, u_3)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0.$$

Пусть $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=\dfrac{\partial u_2}{\partial u_{1n-1}}=0$. Тогда из системы (II′), которой удовлетворяют функции u_1, u_2 следовало бы, что

$$\frac{\bar{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{0n})}=\frac{\bar{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})}=0$$

---

[1]) Общие указания на способ интегрирования дифференциального уравнения (I путем отыскания общего решения u_1 одной из систем $(IV'_1)(IV'_2)$ при $n>2$ даны впервые G. Darboux (Comptes Rendus, t. LXX, 1870).

и так как $\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0$, при чем $\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}$ уже не нули одновременно, следовало бы, что все определители матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}u_1}{dx} & \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\overline{d}u_2}{dx} & \frac{\overline{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A')$$

равны нулю, что невозможно. Итак, $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \frac{\partial p_1}{\partial p_{0n}}$ не нули одновременно. Теперь докажем, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0.$$

Если бы

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0,$$

то так как

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0,$$

при чем $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}$ не нули одновременно, следовало бы, что все определители матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\overline{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \end{matrix}$$

были бы равны нулю и мы имели бы, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d\, y, p_{0n})} = 0,$$

а потому из второго уравнения системы (II′)

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{0n})} = 0$$

следовало бы, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} = 0.$$

Если же

$$\frac{\overline{d}(u_1\ u_2)}{d(x, p_{1n-1})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n-1})} = 0, \quad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}\cdot p_{0n})} = 0$$

где $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}$ не нули одновременно, все определители матриссы (A') были бы равны нулю, что невозможно.

Итак,

$$\frac{\bar{d}(u_1 u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0,$$

и полная система (B') имеет вид

$$\frac{\bar{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0, \quad \frac{\bar{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (B')$$

Так как она разрешима относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}$, функции u_i $i = 1 \ldots 2_n + 1$ независимы относительно y, z, p_{10}, $p_{01} \ldots p_{1n-1}$, и система уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n + 1$ разрешима относительно тех же переменных.

Чтобы решить поставленную выше задачу, найдем дифференциальные уравнения, зависящие только от функции u_1, которым удовлетворяют в этом случае все функции u_i $i = 1 \ldots 2_n + 1$.

Именно, уравнение

$$\frac{\bar{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0$$

имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \frac{\bar{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})} - \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \frac{\bar{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0.$$

Из двух функций u_1, u_2 хоть одна такова, что ее производные по p_{1n-1}, p_{0n} одновременно не нули. Пусть она будет u_1. Из вышенаписанного уравнения и тождества

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \frac{\bar{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \frac{\bar{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0$$

следует, так как

$$\frac{\bar{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0,$$

что

$$\frac{\partial(f, u_1)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют все функции u_i. Из этого уравнения следует, что $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$.

Иначе, это уравнение имело бы вид

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0$$

или, так как уже $\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

а, следовательно, и $\frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}=0$ Таким образом, мы имели бы, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=\frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}=0,$$

что невозможно.

Далее, все функции u_i $i=1\ldots 2n+1$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\bar{d}(f,\ u_1)}{d(x, p_{1n-1})}+\frac{\bar{d}(f, u_1)}{d(y,\ p_{0n})}=0$$

— второму системы (II′). Таким образом все функции u_i $i=1\ldots 2n+1$ удовлетворяют двум независимым уравнениям

$$\frac{\partial(f, u_1)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})}=0,\ \frac{\bar{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})}+\frac{\bar{d}(f, u_1)}{d(y, p_{0n})}=0,\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\neq 0\right) \quad . (V^1)$$

Выведем уравнение, которому в этом случае удовлетворяет функция u_1. Так как эти два дифференциальных уравнения в $2n+3$ переменных независимых имеют $2n+1$ независимых решений, первое уравнение системы (II¹)

$$\frac{\bar{d}f}{dx}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}+\frac{\bar{d}f}{dy}\,\frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-1}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})}+\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\bar{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})}-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}+\frac{\bar{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\ p_{1n-1})}\right)=0,$$

которому также удовлетворяют функции u_i, должно быть их следствием. Поэтому, два независимых определителя матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & -\frac{\bar{d}u_1}{dx} & -\frac{\bar{d}u_1}{dy} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & -\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n},\ p_{1n-1})}, & \frac{\bar{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\ p_{0n})}, & -\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}+\frac{\bar{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\ p_{1n-1})}\right) \end{matrix}$$

должны быть равны нулю. Имеем, поэтому, условия:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n},\ p_{1n-1})}, & \frac{\bar{d}u_1}{dx}+\frac{\bar{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\ p_{1n-1})} \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2=0$$

и

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & -\dfrac{\bar d u_1}{dx} & \dfrac{\bar d u_1}{dy} \\ 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \dfrac{\bar d\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d\,(y,\ p_{0n})}, & \dfrac{\bar d u_1}{dx}+\dfrac{\bar d\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d\,(y,\ p_{1n-1})} \end{vmatrix}=0$$

или

$$\frac{\bar d u_1}{dy}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2\right]=0.$$

Таким образом функция u_1 удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial n_1}{\partial p_{0n}}\right)^2+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2=0.$$

Поэтому, если λ, μ суть корни квадратного уравнения

$$\xi^2+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\xi-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}=0\ \ (a)$$

систему (V′), которой удовлетворяют все функции u_i, можно представить в одном из двух видов

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\ \frac{\bar d\,(f,\ u_1)}{d\,(x, p_{1n-1})}+\lambda\frac{\bar d\,(f,\ u_1)}{d\,(y, p_{1n-1})}=0,$$

где

$$\frac{\partial n_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{V}'_1),$$

или в виде

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\mu\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\ \frac{\bar d\,(f,\ u_1)}{d\,(x, p_{1n-1})}+\mu\frac{\bar d\,(f,\ u_1)}{d\,(y, p_{1n-1})}=0,$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\mu\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{V}'_2).$$

Каждая из них полная. Докажем это для системы (V'_1).

Если разделить второе уравнение на $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}$, то коэффициенты его при

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\ldots\frac{\partial f}{\partial p_{1n-3}},\ \frac{\partial f}{\partial p_{0n-2}},\ \frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}},\ \frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}},\ \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}$$

суть

$$1,\ \lambda, \ldots \frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}} + \lambda p_{1n-2},\ p_{1n-2} + \lambda p_{0n-1},\ \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1},\ p_{1n-1} + \lambda p_{0n},$$

$$-\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}.$$

Мы видим, что только три последних коэффициента при $\frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}}, \frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}}, \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}$ зависят от p_{1n-1}, p_{0n}. Поэтому, комбинируя известным способом первое уравнение со вторым, разделенным на $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}$, найдем, что во вновь полученном уравнении коэффициенты при $\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}, \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots \frac{\partial f}{\partial p_{0n-2}}$ — нули. Остается рассмотреть коэффициенты при $\frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}}, \frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}}, \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}$. Они суть

$$\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1}\right) - \lambda \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{0n}}(p_{1n-1} + \lambda p_{0n}) - \lambda \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}(p_{1n-1} + \lambda p_{0n}),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right) - \lambda \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right) - \frac{\overline{d}\lambda}{dx} - \lambda \frac{\overline{d}\lambda}{dy}.$$

Первые два после легкого вычисления дают:

$$\frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} - \lambda^2 = 0,\ \lambda - \lambda = 0.$$

Что касается третьего, то переставляя порядок дифференцирования, и помня что

$$\frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},\ \frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}},\ \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} = -(\lambda + \mu),\ \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} = -\lambda\mu,$$

найдем, что и он равен нулю. Итак, системы (V'_1) и (V'_2) — полные.

Обратно, если функция u_1 определена из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

или уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \mu \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right),$$

а функции u_i $i = 1 \ldots 2n+1$ суть $2n+1$ независимых решений полной системы соответственно (V_1'), или (V_2'), то $2n+1$ уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ есть система полных интегралов Pfaff'овой системы (I''), неразрешимая относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}$, но разрешимая относительно $y, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}$.

Пусть u_i $i = 1 \ldots 2n+1$ независимые решения полной системы (V_1')

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0, \; \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{1n-1})} = 0. \;\; . \;\; . \quad (V_1').$$

Среди них есть такое решение, напр., u_2, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0,$$

иначе уравнение

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{1u-1})} = 0$$

было бы следствием уравнений (V_1'), что невозможно, так как

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0.$$

Можно показать, что система двух уравнений

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0, \; \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B')$$

эквивалентна системе (V_1').

Именно, из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0$$

и тождества

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0$$

следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} + \frac{\partial f}{dp_{1n-1}} \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}f}{dy} \frac{\partial(u_1, u_1)}{\partial(p_{1u-1}, p_{0u})} = 0$$

или, так как

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1},)} = -\lambda \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = -\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})},$$

$$\frac{\overline{d}f}{dy}\frac{\partial(u_1, n_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} - \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})} + \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0$$

или, наконец,

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0.$$

Далее докажем, что уравнение

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0$$

есть следствие уравнения

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{1n-1})} = 0.$$

Именно, независимые определители матриссы их коэффициентов

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \ \lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \ -\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right)$$

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})}, \ -\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(r, p_{1n-1})}, \ \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, y)}$$

суть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial n_1}{\partial p_{1n-1}} & \lambda\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \dfrac{\overline{d}(u_1\, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} & -\dfrac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} \end{vmatrix} = -\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left[\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})}\right] = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial n_1}{\partial p_{1n-1}} & -\left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\dfrac{\overline{d}u_1}{dy}\right) \\ \dfrac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, u_{1n-1})}, & \dfrac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, y)} \end{vmatrix} = \frac{\overline{d}u_1}{dy}\left[\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-})} + \lambda\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})}\right] = 0.$$

Итак, система

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0 \quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (B')$$

эквивалентна системе (V_1'), или системе (V_2'), так как

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0 \quad \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0.$$

Следовательно, она—полная. Поэтому Pfaff'ова система

$$\Omega_1 = 0 \ . \ . \ . \ \Omega_{2n-1} = 0, \ du_1 = 0, \ du_2 = 0$$

—сполна интегрируемая, и так как функции n_i $i = 1 \ldots 2n+1$ суть независимые решения системы (B'), система $2n+1$ уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ есть система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I'')

$$\Omega_1 = 0 \ . \ . \ . \ \Omega_{2n-1} = 0,$$

неразрешимая относительно z, p_{10}, $p_{01}, \dots p_{1n-1}$, p_{0n}, но разрешимая относительно y, z, p_{10}, $p_{01}, \dots p_{1n-1}$. Таким образом, рассматриваемый случай при $n > 2$ всегда существует и даже для каждого из корней λ, μ квадратного уравнения (a), между тем как аналогичный случай при $n = 2$ возможен только для дифференциального уравнения (I) специального типа.

В этом случае из системы уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \dots 2n+1$ нельзя найти полного интеграла ранга $(n-2)$ с $2n+1$ произвольными постоянными дифференциального уравнения (I), но можно, как замечено выше, найти, за исключением одного случая, его интеграл с $2n$ произвольными постоянными, промежуточный между полным интегралом ранга $n-2$ и $n-3$.

Если $u_i(x \dots p_{0n})$ $i = 1 \dots 2n+1$ есть какая-либо система $2n+1$ независимых решений какой-либо системы уравнений (V_1') или (V_2'), положим, системы (V_1'), то Pfaff'ова система (1″) может быть представлена в виде

$$\Omega_\alpha = \sum_1^{2n+1} i \; U_i^\alpha \; du_i = 0 \qquad \alpha = 1 \dots 2n-1.$$

Так как функции u_i независимы оеносительно y, z, $p_{10}, \dots p_{1n-1}$, то $2n$ из них, напр., $u_1 \dots u_{2n}$ $\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right)$ независимы относительно z, $p_{10}, \dots p_{1n-1}$.

Можно выбрать систему решений u_i $i = 1 \dots 2n+1$ так, что в силу уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \dots 2n$ уравнения $U_{2n+1}^\alpha = 0$ $\alpha = 1 \dots 2n+1$ сводятся к одному $U = 0$ и так, что уравнения $u_j = c_j$ $j = 1 \dots 2n$, $U = 0$ определяют переменные z, $p_{10}, \dots p_{0n}$. Тогда эти последние представляют систему $2n+1$ интегралов Pfaff'овой системы (I″), разрешимую относительно z, $p_{10} \dots p_{0n}$, и функция $z = f(x, y, c_1 \dots c_{2n})$, определенная из них, будет интеграл дифференциального уравнения (I). Он имеет следующее свойство. Так как функция u_j $j = 1 \dots 2n$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{df}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

они имеют вид

$$u_j = v_j(x, \dots p_{0n-1};\, u) \qquad j = 1 \dots 2n,$$

где $u = p_{1n-1} + \lambda p_{0n}$.

Откуда

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{2n},\, U)}{\partial(z \dots p_{0n})} = \left(\frac{\partial U}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial U}{\partial p_{1n-1}}\right) \frac{\partial(u_1 \dots u_{2n})}{\partial(z \dots p_{1n-1})}.$$

Но

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{2n},\, U)}{\partial(z \dots p_{0n})} \neq 0,$$

поэтому $\dfrac{\partial U}{\partial p_{1u-1}}$, $\dfrac{\partial U}{\partial p_{0z}}$ не нули одновременно и, следовательно, если разрешим уравнения $u_j = c_j \; j = 1 \ldots 2n$, $U = 0$ в форме

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n}),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

хоть одна из систем

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n}),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots p_{0n-1} = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}},\ p_{1n-1} = \frac{\partial^n f}{\partial x\, \partial y^{n-1}}$$

и

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n}),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots p_{0n-1} = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}},\ p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

будет разрешима относительно $2n$ произвольных постояных $c_1 \ldots c_{2n}$. Кроме того функция $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n})$, определится разрешением только уравнений $u_j = c_j \; i = 1 \ldots 2n$ относительно $z, p_{10} \ldots p_{0n-1}$, и без помощи уравнения $U = 0$. Этот интеграл можно рассматривать, как промежуточный между полными интегралами ранга $n - 3$ и $n - 2$. Остается только доказать, что указанный выше выбор решений $u_i \; i = 1 \ldots 2n + 1$ системы $(V_1{}')$ возможен.

Найдем вид коэффициентов U^{α}_{2n+1} $\alpha = 1 \ldots 2n - 1$. Приравнивая в тождестве

$$\Omega_1 = \sum_1^{2n+1} i\, U_i'\, du_i$$

коэффициенты при $dy, \ldots dp_{1n-1}$, получим $2n + 1$ уравнений

$$-p_{01} = \sum_1^{2n+1} i\, U_i'\, \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

$$1 = \sum_1^{2n+1} i\, U_i'\, \frac{\partial u_i}{\partial z}$$

$$0 = \sum_1^{2n+1} i\, U_i'\, \frac{\partial u_i}{\partial p_{10}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \sum_1^{2n+1} i\, U_i'\, \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}},$$

из которых имеем

$$U^1_{2n+1} = -\frac{\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, p_{10} \ldots p_{1n-1})} p_{01} + \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, p_{10} \ldots p_{1n-1})}}{\triangle}$$

где

$$\triangle = \frac{\partial(\partial_1 \ldots u_{2n+1})}{\partial(y, z, p_{10} \ldots p_{1n-1})}.$$

Подобным же образом найдем, что

$$U^{2k}_{2n+1} = \frac{\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{0k-1}, p_{0k}, \ldots p_{1n-1})} - p_{1k} \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, p_{10}, \ldots p_{1n-1})},}{\triangle}$$

$$U_{2n+1}^{2k+1} = -\frac{\dfrac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{1k-1}, p_{1k}, \ldots p_{1n-1})} + p_{0k+1}\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z \ldots p_{1n-1})}}{\Delta}.$$

$$k = 1 \ldots n-1.$$

Таким образом, уравнения $U_{2n+1}^{\alpha} = 0$ $\alpha = 1 \ldots 2n-1$ имеют вид

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, p_{10} \ldots p_{1n-1})} + p_{01}\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{0k-1}, p_{0k} \ldots p_{1n-1})} - p_{1k}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z \ldots p_{1n-1})} = 0$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{1k-1}, p_{1k} \ldots p_{1n-1})} + p_{0k+1}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0$$

$$k = 1 \ldots n-2$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{0n-2}, p_{0n-1}, p_{1n-1})} - p_{1n-1}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, p_{10} \ldots p_{1n-2}, p_{1n-1})} + p_{0n}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0.$$

Первое уравнение последней пары может быть заменено уравнением

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{0n-2}, p_{0n-1}, p_{1n-1})} - \lambda\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{1n-2}, p_{1n-1})} -$$

$$-(p_{1n-1} + \lambda p_{0n})\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z \ldots p_{1n-1})} = 0.$$

В виду того, что функции u_j $j = 1 \ldots 2n$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

они имеют вид

$$u_1 = v_1(x, y, z \ldots p_{0n-1}, u)$$
$$u_j = v_j(x, y, z \ldots p_{0n-1}, u_1) \quad j = 2 \ldots 2n$$

где $u = p_{1n-1} + \lambda p_{0n}$. Откуда

$$u = p_{1n-1} + \lambda p_{0n} = \psi(x, y, z \ldots p_{0n-1}, u_1).$$

Подставляя вместо u_j $j = 2 \ldots 2n$ и вместо $p_{1n-1} + \lambda p_{0n}$ их выражения через $x \ldots p_{0n-1}, u_1$, напишем эти уравнения по сокращении на $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}$ в форме

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(y, p_{10} \ldots p_{0n-1})} + p_{01}\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{0k-1}, p_{0k} \ldots p_{0n-1})} - p_{1k}\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

$$\text{(VI)}\qquad \frac{\partial(v_2\ .\ .\ .\ v_{2n})}{\partial(y,z\ldots p_{1k-1},p_{1k},\ldots p_{0n-1})}+p_{0k+1}\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z\ldots p_{0n-1})}=0,$$

$$k=1\ldots n-2$$

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(y,z\ldots p_{0n-2},p_{0n-1})}-\lambda\frac{\partial(v_2\ldots v_2)}{\partial(y,z\ldots p_{1n-2})}-\psi\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z\ldots p_{0n-1})}=0,$$

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(y,z\ldots p_{1n-2})}+p_{0n}\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z\ldots p_{0n-1})}=0,$$

где

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z\ldots p_{0n-1})}=\frac{\partial(u_1\ldots u_{2n})}{\partial(z\ldots p_{1n-1})}:\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\neq 0.$$

Если вместо переменной независимой p_{1n-1} введем новое u_1 по формуле $u_1(x,y,z\ldots p_{1n-1},p_{0n})=u_1$, уравнения (VI) сохраняют свой вид с той разницей, что вместо функции $u_1(x,y\ldots p_{0n})$ станет новое переменное u_1. Мы видим, что только последнее уравнение заключает переменное p_{0n}, так как

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z,p_{10}\ldots p_{0n-1})}\neq 0.$$

Если в силу уравнений $u_1=c_1,\ v_2=c_2\ldots v_{2n}=c_{2n}$ они должны сводиться к одному, определяющему с уравнениями $u_1=c_1,\ v_2=c_2,\ldots$ $\ldots v_{2n}=c_{2n}$ переменные $z,\ p_{10}\ldots p_{0n-2},\ u_1,\ p_{0n}$, то этим последним может быть только последнее уравнение. Необходимое и достаточное условие для этого состоит в том, чтобы все уравнения (VI), кроме последнего, были тождествами, так как они не заключают ни p_{0n}, ни $c_1\ldots c_{2n}$. Заменяя функцию ψ снова через $p_{1n-1}+\lambda p_{0n}$, искомые функции $v_2\ldots v_{2n}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\overline{d}(v_2\ldots v_{2n})}{d(y,p_{10},\ldots p_{0n-1})}=0,\quad \frac{\overline{d}(v_2\ldots v_{2n})}{d(y,z\ldots(p_{1k-1})\ldots p_{0n-1})}=0,$$

$$\frac{\overline{d}(v_2\ldots v_{0n})}{d(y,z\ldots(p_{0k})\ldots p_{0n-1})}=0$$

$$k=1\ldots n-2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(VI}_1\text{)}$$

$$\frac{\overline{d}(v_2\ldots v_{2n})}{d(y,z,p_{10}\ldots p_{0n-2},p_{0n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}(v_2\ldots v_{2n})}{d(y,z,p_{10}\ldots p_{1n-2})}=0,$$

где символ $(p_{\alpha\beta})$ указывает пропуск переменной $p_{\alpha\beta}$ и

$$\frac{\overline{d}(v_2\ldots v_{2n})}{d(y,r\ldots s)}=\begin{vmatrix}\frac{\overline{d}v_2}{dy}, & \frac{\partial v_2}{\partial r}\ldots & \frac{\partial v_2}{\partial s}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\overline{d}v_{2n}}{dy}, & \frac{\partial v_{2n}}{\partial r}\ldots & \frac{\partial v_{2n}}{\partial s}\end{vmatrix};$$

$$\frac{\overline{d}v}{dy}=\frac{\partial v}{\partial y}+p_{01}\frac{\partial v}{\partial z}+p_{11}\frac{\partial v}{\partial p_{10}}+0\frac{\partial v}{\partial p_{01}}+\ldots+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial v}{\partial p_{1n-2}}+p_{0n}\frac{\partial v}{\partial p_{0n-1}}$$

и $\overline{p}_{1n-1}$ есть выражение переменного p_{1n-1} из уравнения

$$u_1(x,\ y\ldots p_{1n-1},\ p_{0n})=u_1.$$

Эти уравнения можем заменить им эквивалентными.

Рассмотрим матриссу

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}v_2}{dy}, & \frac{\partial v_2}{\partial z}, & \frac{\partial v_2}{\partial p_{10}}, \ldots & \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}, & \frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\overline{d}v_{2n}}{dy}, & \frac{\partial v_{2n}}{\partial z}, & \frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{10}}, \ldots & \frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{0n-1}}, & \frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{1n-2}}, \end{matrix}$$

имеющую $2n-1$ строк и $2n+1$ колонн, и определители $2n-1$-ой степени, получающиеся из нее вычеркиванием двух каких-либо средних колонн, кроме первой и последней. Эти определители или нули тождественны, или первые части уравнений (VI_1), или они же, умноженные на λ. Поэтому, мы можем заменить систему (VI_1) ей эквивалентной, приравнивая нулю эти определители. Мы получим

$$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}=(2n-1)(n-1)$$

равенств. Разлагая эти определители по минорам второй степени первой и последней колонны, мы получим $(2n-1)(n-1)$ равенств линейных, однородных относительно $(2n-1)(n-1)$ величин вида

$$\frac{\overline{d}(v_i,\ v_k)}{d(y,p_{0n-1}-\lambda p_{0n-2})}=\begin{vmatrix} \frac{\overline{d}v_i}{dy}, & \frac{\partial v_i}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_i}{\partial p_{1n-2}} \\ \frac{\overline{d}v_k}{dy}, & \frac{\partial v_k}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_k}{\partial p_{1n-2}} \end{vmatrix}\quad i,\ k=2\ldots 2n.$$

Определитель этой системы есть производный неравного нулю определителя

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z\ldots p_{0n-1})}$$

и, следовательно, также отличен от нуля. А потому, эта последняя система имеет вид

$$\frac{\overline{d}(v_i,\ v_k)}{d(y,p_{0n-1},-\lambda p_{0n-2})}=0\quad i,\ k=2\ldots 2n.$$

Эту систему можно снова заменить ей эквивалентной. Среди функций $v_2\ldots v_{2n}$ есть хоть одна такая, напр., v_2, что

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0,$$

иначе было бы

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z,p_{10}\ldots p_{0n-1})}=0.$$

Последнюю систему можно заменить системой

$$\frac{\bar{d}\,(v_i,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1}-\lambda\, p_{0n-2})}=0 \quad i=3\ldots 2n.$$

В самом деле, если v_i, v_k суть две функции из ряда $v_2\ldots v_{2n}$, то из уравнений

$$\frac{\bar{d}\,(v_i,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1}-\lambda\, p_{1n-2})}=0,\quad \frac{\bar{d}\,(v_k,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1}-p_{1u-2})}=0,$$

которые имеют вид

$$\frac{\bar{d}v_i}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right)-\left(\frac{\partial v_i}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_i}{\partial p_{1n-2}}\right)\frac{\bar{d}v_k}{dy}=0,$$

$$\frac{\bar{d}v_k}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right)-\left(\frac{\partial v_l}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_k}{\partial p_{1n-2}}\right)\frac{\bar{d}v_2}{dy}=0$$

следует, так как

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}}\neq 0,$$

что

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\bar{d}v_i}{dy}, & \dfrac{\partial v_i}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\dfrac{\partial v_i}{\partial p_{1n-2}}\\[2ex] \dfrac{\bar{d}v_k}{dy}, & \dfrac{\partial v_k}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\dfrac{\partial v_k}{\partial p_{1n-2}}\end{vmatrix}=\frac{\bar{d}\,(v_i,\ v_k)}{d\,(y, p_{0n-1}-\lambda\, p_{1u-1})}=0, \text{ ч. и т. д.}$$

Таким образом все функции $v_3\ldots v_{2n}$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\bar{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y, p_{0n-1}-\lambda p_{1n-2})}=\frac{\bar{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{1n-1})}-\lambda\frac{\bar{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{1n-2})}=0.$$

Если мы преобразуем переменное независимое p_{1n-1} к новому u_1 формулой $u_1(x, y, z\ldots p_{0n})=u_1$ и в уравнениях ($V_1{}'$), получим их в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\quad \frac{\bar{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\bar{d}\varphi}{dy}=0,$$

где

$$\frac{\bar{d}\varphi}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+p_{10}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\theta\frac{\partial\varphi}{\partial p_{10}}+p_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{01}}+\ldots+\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-1}}+\bar{p}_{1n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}$$

и $\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)$ есть преобразованное выражение $\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}$.

Таким образом, искомые функции $v_2,\ldots v_{2n}$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\quad \frac{\bar{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\bar{d}\varphi}{dy}=0,\quad \frac{\bar{d}\,(\varphi\ v_2)}{d(y, p_{0n-1})}-\lambda\frac{\bar{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d(y, p_{1n-1})}=0,\quad . \text{ (VII')}.$$

где

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} \neq 0\ ^{1)}.$$

Обратно, если $2n-1$ независимым функций $v_2 \ldots v_{2n}$ удовлетворяют системе (VII'), они независимы относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n-1}$ и преобразованные к начальным переменным $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$ по формуле $u_1(x, y, z \ldots p_{1n-1}, p_{0n}) = u_1$, где

$$\frac{\partial u_1(x \ldots p_{0n})}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial u_1(x \ldots p_{0n})}{\partial p_{1n-1}} = 0 \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right),$$

они дают функции $u_2(x \ldots p_{0n}) \ldots u_{2n}(x \ldots p_{0n})$ такие, что $u_i(x \ldots p_{0n})$ $i = 1 \ldots 2n$ суть решения системы уравнений (V_1') независимые относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}$; а система уравнений $U^{\alpha}_{2n+1} = 0$ $\alpha = 1 \ldots$ $\ldots 2n-1$ сводится к одному $U^{2n-1}_{2n+1} = 0$, определяющему совместно с уравнениями $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n$ переменные $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$. Функция $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n$ есть интеграл дифференциального уравнения (I), заключающий $2n$ произвольных постоянных $c_1 \ldots c_{2n}$, промежуточный между полным интегралом ранга $n-3$ и $n-2$. Вопрос сводится таким образом к определению $2n-1$ независимых решений $v_2, \ldots v_{2n}$ системы трех уравнений (VII') в $2n+2$ переменных независимых $x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n-1}, p_{0n}$, в коэффициентах которых u_1 входит, как параметр, а p_{0n} совершенно не заключается. В самом деле, p_{0n} может входить только в коэффициенты при $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1n-2}}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n-1}}$ двух последних уравнений Они суть соответственно:

$$\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) + \lambda \overline{p}_{1n-1}, \quad \overline{p}_{1n-1} + \lambda p_{0n},$$

$$\overline{p}_{1n-1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_3}{\partial p_{1n-2}}\right) + \lambda \frac{\overline{dv_2}}{dy}, \quad p_{0n}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right) - \frac{\overline{dv_2}}{dy}.$$

Дифференцируя их по p_{0n} и пользуясь тем, что

$$\frac{\partial \overline{p}_{1n-1}}{\partial p_{0n}} = -\lambda, \quad \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} = -(\lambda + \mu), \quad \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} = -\lambda\mu$$

и формой выражения $\frac{\overline{dv_2}}{dy}$, находим, что производные равны нулю.

---

1) Легко видеть, что если

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} \neq 0,$$

то и $\frac{\overline{dv_2}}{dy} \neq 0$, и обратно. Это следует из формы $\frac{\overline{dv_2}}{dy}$, именно

$$\frac{\overline{dv_2}}{dy} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial v_2}{\partial z} + \ldots + \overline{p}_{1n-1}\frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-2}} + p_{0n}\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial v_2}{\partial z} + \ldots$$

$$\ldots + p_{0n}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right) + \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\psi.$$

Начнем с функции v_2. Она должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0$$

с условием

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0.$$

Кроме того система двух последних уравнений (VII′) в $2n+1$ переменных независимых $x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n-1}$, как имеющая $2n-1$ независимых решений $v_2\ldots v_{2n}$, должна быть полной. Это дает новое условие для функции v_2, которое состоит в том, чтобы Pfaff'ова система $2n-1$ независимых уравнений, соответствующая ей, была сполна интегрируемой. Эта система есть

$$\Omega_1=dz-p_{10}\,dx-p_{01}\,dy=0,\ldots\ \Omega_{2n-3}=dp_{0n-2}-p_{1n-2}\,dx-p_{0n-1}\,dy=0,$$

$$dp_{1n-2}+\lambda\,dp_{0n-1}-\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right]dx-[\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}]\,dy=0.$$

$$dv_2=0.$$

Условия ее полной интегрируемости суть:

$$\begin{vmatrix}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-\frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}} & -p_{1n-2} & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0\\
-p_{1n-2} & -p_{0n-1} & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\\
-\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & -[\overline{p}_{1n-1}+\lambda p_{0n} & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & \lambda\\
\frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{10}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{01}}\ldots & \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-3}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-2}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{9n-1}}\\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}}\ldots & \frac{\partial}{\partial p_{1n-3}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\\
\alpha & \beta & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma & \delta
\end{vmatrix}=0$$

где $\alpha, \beta\ldots\gamma, \delta$ суть коэффициенты этих уравнений при $dx, dy,\ldots$ $\ldots dp_{1n-2}, dp_{0n-1}$. Очевидно, что если $\alpha=\frac{\partial v_2}{\partial x}\ldots\delta=\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}$ определитель равен нулю тождественно. Преобразовывая в остальных случаях определители способом, аналогичным употребленному при выводе условий (A'), получим условия

$$\begin{vmatrix}
-\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & -[\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}] & 1 & \lambda\\
\frac{\widehat{d}v_2}{dx} & \frac{\widehat{d}v_2}{dh} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}}\\
\frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\\
\alpha & \beta & \gamma & \delta
\end{vmatrix}=0$$

где

$$\frac{\widehat{d}}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+p_{10}\frac{\partial}{\partial z}+\theta\frac{\partial}{\partial p_{10}}+p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{01}}+\ldots+\frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}}+p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}$$

$$\frac{\widehat{d}}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}+p_{01}\frac{\partial}{\partial z}+p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{10}}+p_{02}\frac{\partial}{\partial p_{01}}+\ldots+p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}}+p_{0n-1}\frac{\partial}{\partial p_{0n-2}}.$$

Если $\alpha,\ \beta,\ \gamma.\ \delta$ суть коэффициенты при $dx,\ dy,\ dp_{1n-2},\ dp_{0n-1}$ всех уравнений, кроме предпоследнего, определители обращаются тождественно в нуль на основании того, что

$$\frac{\overline{d}v_2}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}v_2}{dy}=\frac{\widehat{d}v_2}{dx}+\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-3}}\right)\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}+$$

$$+\lambda\left[\frac{\widehat{d}v_2}{dy}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}+p_{0n}\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}\right]=0.$$

Таким образом, остается только одно условие

$$\begin{vmatrix} -\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & [\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}], & -,1 & \lambda \\ \frac{\widehat{d}v_2}{dx} & \frac{\widehat{d}v_2}{dy} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ -\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & [\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}], & 1, & \lambda \end{vmatrix}=0.$$

Так как

$$\frac{\overline{d}}{dx}=\frac{\widehat{d}}{dx}+\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\overline{d}}{dy}=\frac{\widehat{d}}{dy}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}+p_{0n}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}$$

и так как

$$\frac{\overline{d}v_2}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}v_2}{dy}=0,$$

это условие обращается в

$$M\frac{\overline{d}v_2}{dy}+N\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right]=0,$$

где

$$M=-\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)-\lambda\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)-\right.$$

$$\left.-2\lambda\frac{\partial\,\overline{p}_{1n-1}}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\,\overline{p}_{1n-1}}{\partial p_{1n-2}}\right].$$

$$N=-\frac{\overline{d}\,\overline{p}_{1n-1}}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\,\overline{p}_{1n-1}}{dy}+\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right).$$

Легко убедиться вычислением, что

$$\frac{\partial M}{\partial p_{0n}}=0,\ \frac{\partial N}{\partial p_{0n}}=-M.$$

Таким образом функция $v_2(x, \ldots p_{0n-1},\ u_1)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n}}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,\ M\frac{\overline{d}\varphi}{dy}+N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-2}}\right)=0,\ (\mathrm{VII}_1').$$

где коэффициенты третьего уравнения не зависят от p_{0n} вследствие указанных свойств M и N, с условием, что

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0.$$

Могут быть только три случая:

1) $M\neq 0$, а, следовательно, и $N\neq 0$;
2) $N=0$, а, следовательно, и $M=0$;
3) $N\neq 0$, но $M=0$.

В последнем случае

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-2}}=0,$$

поэтому

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}=0,$$

и задача об определении функции v_2, а, следовательно, и об определении искомого интеграла невозможна.

Рассмотрим первый случай. Если $M\neq 0$ и $\dfrac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0$, то из уравнения

$$M\frac{\overline{d}v_2}{dy}+N\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right)=\begin{vmatrix} M, & N \\ -\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right), & \dfrac{\overline{d}v_2}{dy}\end{vmatrix}=0$$

следует, что уравнения

$$\frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y,\ p_{0n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y,\ p_{1n-2})}=0,\ M\frac{\overline{d}\varphi}{dy}+N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-2}}\right)=0$$

эквивалентны, т. е. что и все функции $v_2, \ldots v_{2n}$ должны удовлетворять системе (VII_1'). Она должна быть полной. Если она полная, то $2n-1$ независимых решений ее суть искомые функции $v_2\ldots v_{2n}$, так как среди них найдется хоть одна, напр., v_2 такая, что

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0,$$

иначе уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1n-2}} = 0$$

было бы следствием системы (VII_1') что невозможно, так как оно не заключает ни $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, ни $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Остальные решения удовлетворяют поэтому вместе с v_2 системе (VII') и суть искомые функции. Преобразовывая их к переменному p_{1n-1} по формуле

$$u_1(x \ldots p_{0n}) = u_1,$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0 \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0 \right),$$

получим систему $2n$ функций u_j $j = 1 \ldots 2n$, единственную, которая заключает функцию $u_1(x \ldots p_{0n})$ и обладает требуемыми свойствами. Интеграл $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n})$, определенный из уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \ldots 2n$, единственный, удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x, y, z \ldots p_{0n}) = c_1.$$

Рассмотрим, когда этот случай возможен.

Система дифференциальных уравнений (VII_1') должна быть полной. Соответствующая ей Pfaff'ова система $2n-1$ уравнений должна быть сполна интегрируемой. Она имеет вид:

$$\Omega_1 = dz - p_{10}\, dx - p_{01}\, dy = 0, \ldots \quad \Omega_{2n-4} = dp_{1n-3} - \frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}} dx -$$

$$- p_{1n-2}\, dy = 0, \quad \Omega_{2n-3} = dp_{0n-2} - p_{1n-2}\, dx - p_{0n-1}\, dy = 0,$$

$$M\, dp_{1n-2} - \left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) \right] dx - [M\, \overline{p}_{1n-1} - N\lambda]\, dy = 0,$$

$$M\, dp_{0n-1} - [N\lambda - M\, \overline{p}_{1n-1}]\, dx - [M p_{0n} + N]\, dy = 0.$$

Условия ее полной интегрируемости суть:

$$\left| \begin{array}{ccccccccccc}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}} & -p_{1n-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1n-2} & -p_{0n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\,\overline{p}_{1n-1} - N\lambda], & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & M & 0 \\
-[M\,\overline{p}_{1n-1} - N\lambda], & -[M p_{0n} + N], & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & M \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial p_{1n-3}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\
\alpha & \beta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & \delta
\end{array} \right| = 0$$

где $\alpha, \beta \ldots \gamma, \partial$ суть коэффициенты этих уравнений при

$$dx,\ dy \ldots dp_{1n-2},\ dp_{0n-1};$$

или вид

$$\begin{vmatrix} -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\overline{p}_{1n-1} - N\lambda], & M & 0 \\ -[M\overline{p}_{1n-1} - N\overline{\lambda}], & -[Mp_{0n} + N] & 0 & M \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\frac{\widehat{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{10}\frac{\partial}{\partial z} + \theta\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \ldots + \frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}} + p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{0n-2}},$$

$$\frac{\widehat{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{02}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \ldots + p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}} + p_{0n-0}\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}.$$

Легко видеть, что если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, означают коэффициенты при dx, dy, dp_{1n-2}, dp_{0n-1} 1-го ... $2n-3$-го уравнений, определители обращаются в нуль тождественно.

Остаются, таким образом, два условия:

$$\begin{vmatrix} -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{u-2}}\right)\right], & -[M\overline{p}_{1n-1} - N\lambda] & M & 0 \\ N\lambda - M\overline{p}_{1n-1}, & -[Mp_{0n} + N], & 0 & M \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\overline{p}_{1n-1} - N\lambda] & M & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\overline{p}_{1n-1} - N\lambda], & M & 0 \\ N\lambda - M\overline{p}_{1n-1}, & -[Mp_{0n} + N] & 0 & M \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ N\lambda - M\overline{p}_{1n-1} & -[Mp_{0n} + N] & 0 & M \end{vmatrix} = 0.$$

По разложении определителей они имеют вид:

$$U = -\frac{\delta N}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y}[M\overline{p}_{1n-1} - N\lambda] - \overline{p}_{1n-1}\frac{\delta M}{\delta y} + N\left(\frac{\overline{d}M}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}M}{dy}\right) = 0,$$

$$V = -M\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x}(N\lambda) + \frac{\delta}{\delta y}(N\lambda^2) + M\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-3}}\right) -$$

$$-N\lambda\left(\frac{dM}{dx} + \lambda\frac{dM}{dy}\right),$$

где

$$\frac{\delta}{\delta x} = M\frac{\overline{d}}{dx} - N\lambda\left(\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\right),\ \frac{\delta}{\delta y} = M\frac{\overline{d}}{dy} + N\left(\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\right).$$

Эти два условия сводятся к одному $U=0$, так как можно показать, что $V+\lambda U=0$ тождественно. Именно,

$$V+\lambda U = -M\left[\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta x} - \lambda\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta y}\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^{\,n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right] + N\left(\frac{\delta\lambda}{\delta x} + \lambda\frac{\delta\lambda}{\delta y}\right).$$

Но принимая во внимание вид операций $\frac{\delta}{\delta x}$ и $\frac{\delta}{\delta y}$ и вид выражений M, N, находим, что

$$\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta x} - \lambda\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta y} - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) = N\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right).$$

Таким образом,

$$U+\lambda U = -MN\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right) + N\left(\frac{\delta\lambda}{\delta x} + \lambda\frac{\delta\lambda}{\delta y}\right);$$

но

$$\frac{\delta\lambda}{\delta x} + \lambda\frac{\delta\lambda}{\delta y} = M\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right).$$

Подставляя получим

$$V+\lambda U = -MN\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right) + MN\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right) = 0.$$

Итак, чтобы система (VII_1') была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta}{\delta y}[M\,\overline{p}_{1n-1} - N\lambda] + \overline{p}_{1n-1}\frac{\delta M}{\delta y} - N\left(\frac{\overline{d}M}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}M}{dy}\right) = 0.$$

Если возвратимся к старым переменным $x, y, z \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, дифференциальные уравнения (VII_1') примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0 \quad \frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})} + \lambda\frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{1n-1})} = 0 \quad \ldots (\mathrm{VIII}')$$

$$M\frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{1n-1})} + N\frac{\partial(f,\ u_1)}{\partial(p_{0n-1} - \lambda p_{1n-2},\ p_{1n-1})} = 0,$$

где

$$\frac{\partial(f,\ u_1)}{\partial(p_{0n-1} - \lambda p_{1n-2},\ p_{1n-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \end{vmatrix}$$

M и N, выражены в старых переменных:

$$N=\frac{\dfrac{\bar{d}u_1}{dx}+\mu\dfrac{\bar{d}u_1}{dy}+\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\,\dfrac{\bar{d}}{dy}\,\dfrac{d^{u-2}\theta}{dy^{u-2}}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}$$

$$M=-\frac{\partial\,(N,\ u_1)}{\partial\,(p_{0n},\ p_{1n-1})},$$

а условие, что уравнения (VIII′) представляют полную систему есть:

$$\frac{\bar{d}u_1}{dx}\left(N\frac{\partial M}{\partial p_{1n-1}}-M\frac{\partial N}{\partial p_{1n-1}}\right)+\frac{\bar{d}u_1}{dy}\left[N\lambda\frac{\partial M}{\partial p_{1n-1}}-M\frac{\partial\,(N\lambda-Mp_{1n-1})}{\partial p_{1n-1}}-\right.$$

$$\left.-p_{1n-1}M\frac{\partial M}{\partial p_{1u-1}}\right]+\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}}\right)\left[N\lambda\frac{\partial N}{\partial p_{1n-1}}+M\frac{\partial\,(N\lambda-Mp_{1n-1})}{\partial p_{1n-1}}-\right.$$

$$\left.-p_{1n-1}N\frac{\partial M}{\partial p_{1n-1}}\right]+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left\{M\left[\frac{\bar{d}N}{dx}+\frac{\bar{d}\,(N\lambda-Mp_{1n-1})}{dy}+p_{1n-1}\frac{\bar{d}M}{dy}\right]+\right.$$

$$+N\left[\frac{\partial\,(N\lambda-Mp_{1n-1})}{\partial p_{0n-1}}\right\}-\lambda\frac{\partial\,(N\lambda-Mp_{1n-1})}{\partial p_{1n-2}}+p_{1n-1}\left(\frac{\partial M}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial M}{\partial p_{1n-2}}-\right.$$

$$\left.\left.-\lambda\left(\frac{N}{\partial p_{9n-1}}-\lambda\frac{\partial N}{\partial p_{1n-2}}\right)\left(\frac{\bar{d}M}{dx}+\lambda\frac{\bar{d}M}{dy}\right)\right]\right\}=0.\quad .\ .\ .\ .\ (\mathrm{IX}')$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\neq 0\right).$$

Таким образом, в этом случае функция $u_1(x\ldots p_{0n})$ должна удовлетворять не только уравнению

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0,$$

но и уравнению (IX′). Это последнее есть дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка, линейное относительно вторых производных. Порядок его при решении данной задачи не понижается, так как оно заключает член $M\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$.

Если функция $u_1(x\ldots p_{0n})$ им удовлетворяет, система (VIII′) полная. Система $2n$ решений ее u_j $j=1\ldots 2n$, независимых относительно z, p_{10}, $p_{01}\ldots p_{1n-1}$ есть искомая, единственная, заключающая функцию $u_1(x_1\ldots p_{0n})$.

Функция $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_j=c_j$ $j=1\ldots 2n$, есть интеграл дифференциального уравнения (I), промежуточный между полным интегралом ранга $n-3$ и ранга $n-2$, единственный, удовлетворяющий и дифференциальному уравнению n-ого порядка $u_1(x\ldots p_{0n})=c_1$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $M=N=0$.

В этом случае всякое решение уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\quad \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,$$

для которого

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-2}}\neq 0,$$

может быть взято за функцию v_2 и система (VII′)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\quad \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,\quad \frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y,\ p_{0n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y,\ p_{1n-2})}=0$$

полная и $2n-1$ ее решений $v_2\ldots v_{2n}$, незавнсимых относительно $z,\ p_{10},\ p_{01}\ldots p_{0n-1}$ и суть искомые функции $v_2\ldots v_{2n}$. Так как в этом случае функция v_2 может быть подобрана бесчисленным множеством способов, в данном случае есть бесчисленное множество различных между собой систем функций $v_2\ldots v_{2n}$.

Если вернемся к старым переменным $x\ldots p_{1n-1},\ p_{0n}$, дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0\quad \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0\quad \frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y,\ p_{0n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y,\ p_{1n-2})}=0 \quad . \text{(VII′)}$$

примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\quad \frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})}+\lambda\frac{d(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{1n-1})}=0$$

$$\frac{\overline{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,\ p_{0n-1},\ p_{1n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,\ p_{1n-2},\ p_{1n-1})}=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ \text{(X′)},$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0,$$

а $u_2(x,\ldots p_{0n})$ есть какое-либо решение уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0\quad \frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})}+\lambda\frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{1n-1})}=0$$

такое, что

$$\frac{\overline{\partial}(u_2,\ u_1)}{\overline{\partial}(p_{0n-1}-\lambda p_{1n-2},\ p_{1n-1})}\neq 0$$ [1]).

Система (X′) полная. Если $u_i\ i=1\ldots 2n$ суть ее независимые относительно $z,\ p_{10},\ p_{01}\ldots p_{1n-1}$ решения, функция $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_i=c_i\ i=1\ldots 2n$ есть интеграл дифференциального уравнения (I), промежуточный между интегралом ранга $n-3$ и ранга $n-2$, один из бесчисленного множества их, удовлетворяющих дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x,\ y,\ z\ldots p_{1n-1},\ p_{0n})=c_1.$$

---

[1]) В этом случае $\frac{d(u_2,\ u_4)}{d(y,\ p_{1n-1})}\neq 0$, и обратно.

Условие $N=0$, а, следовательно, $M=0$ имеет вид

$$\frac{\bar{d}u_1}{dx}+\mu\frac{\bar{d}u_1}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\bar{d}}{dy}\,\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}=0.$$

В этом случае функция u_1 удовлетворяет уравнениям § 5

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0,\ \frac{\bar{d}u_1}{dx}+\mu\frac{\bar{d}u_1}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\bar{d}}{dy}\,\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}=0 \quad . \; . \; (\mathrm{IV}_1')$$

и дифференциальное уравнение $u_1(x\ldots p_{0n})=c_1$ находится в инволюции с данным (I).

Этот случай может быть соединен с аналогичным ему случаем § 5 следующим образом: если по определении функции $u_1(x\ldots p_{0n})$ из системы (IV_1'), решение u_2 уравнения

$$\frac{\bar{d}(f,\ u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})}+\frac{\bar{d}(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{0n})}=0$$

таково, что

$$\frac{\partial(u_2,\ u_2)}{\partial(p_{1n-1},\ p_{0n})}\neq 0$$

определяем функции $u_3\ldots n_{2n+1}$, как остальные независимые решения полной системы

$$\frac{\bar{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(x,\ p_{1n-1},\ p_{0n})}=0,\ \frac{\bar{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,\ p_{1n-1},\ p_{0n})}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (B')$$

и функция $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n+1})$, определенная из уравнений $u_i=c$ $i=1\ldots 2n+1$ есть один из бесчисленного множеетва полных интегралов ранга $(n-2)$ данного уравнения (I), удовлетворяющих дифференциальному уравнению n-ого порядка $u_1(x\ldots p_{0n})=c_1$

Если же

$$\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(p_{1n-1},\ p_{0n})}=0,$$

но

$$\frac{\bar{d}(u_1,u_2)}{d(y,\ p_{1n-1})}\neq 0\ ^{1)},$$

тогда определяем функции $u_3\ldots u_{2n}$, как остальные независимые решения полной системы

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\ \frac{\bar{d}(f,\ u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})}+\lambda\frac{\bar{d}(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{1n-1})}=0$$

$$\frac{\bar{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,p_{0n-1},\ p_{1n-1})}-\lambda\frac{\bar{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,\ p_{1n-2},\ p_{0n-1})}=0$$

функция $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_j=c_j$ $j=1\ldots 2n$ есть один из бесчисленного множества интегралов промежуточного типа уравнения (I), удовлетворяющих и дифференциальному уравнению n-ого порядка $u_1(x\ldots p_{0n})=c_1$.

---

[1]) A, следовательно, и $\dfrac{\partial(u_1\ \ u_2)}{\partial(p_{0n-1}-\lambda p_{1n-2}\ \ p_{1n-1})}\neq 0$.

Рассмотрим, наконец, последний случай, когда

$$\frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{1n-1}} = \frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{0n}} = 0.$$

Из условий (A') вытекает, что в этом случае

$$\frac{d\,(u_1,\, u_2)}{d\,(x,\, y)} \neq 0,$$

и дифференциальные уравнения (B') имеют вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\overline{df}}{dx} & \frac{\overline{df}}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{\overline{du_1}}{dx} & \frac{\overline{du_1}}{dy} & 0 \\ \frac{\overline{du_2}}{dx} & \frac{\overline{du_2}}{dy} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \frac{\overline{d\,(u_1,\, u_2)}}{d\,(x,\, y)} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\overline{df}}{dx} & \frac{\overline{df}}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\overline{du_1}}{dx} & \frac{\overline{du_1}}{dy} & 0 \\ \frac{\overline{du_2}}{dx} & \frac{\overline{du_2}}{dy} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \frac{\overline{d\,(u_1\ u_2)}}{d\,(x,\, y)} = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0.$$

Таким образом все функции u_i $i = 1 \ldots 2n+1$ не зависят от p_{1n-1}, p_{0n}. Система $2n+1$ полных интегралов $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ или $x = \Gamma_1$, $y = \Gamma_2$, $z = \Gamma_3 \ldots p_{0n} = \Gamma_{2n+1}$ Pfaff'овой системы (I') не дает интеграла дифференциального уравнения (I). В этом случае мы можем поступить, как в предыдущем, вводя функции u_i $i = 1 \ldots 2n+1$, как новые переменные независимые, и, получив Pffaff'ову систему (I') в форме

$$\Omega_\alpha = \sum_1^{2n+1} i\, U_i^\alpha\, du_1 = 0 \quad \alpha = 1 \ldots 2n-1,$$

определяем функции u_i $i = 1 \ldots 2n+1$ так, чтобы в силу уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \ldots 2n-1$, полагая что

$$\frac{\partial\,(u_1 \ldots u_{2n-1})}{\partial\,(z \ldots p_{0n-1})} \neq 0,$$

уравнения $U_{2n}^\alpha = U_{2n+1}^\alpha = 0$ $\alpha = 1 \ldots 2n-1$ сводились к двум, определяющим с предыдущими переменные z, $p_{10} \ldots p_{1n-1}$, p_{0n}. Тогда функция $z = f(x,\, y,\, c_1 \ldots c_{2n-1})$, определенная из уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \ldots 2n-1$ будет полным интегралом ранга $(n-3)$ дифференциального уравнения (I). Полагая в рассуждении § 4 указатель n на единицу меньшим, найдем, что необходимое и достаточное для этого условие состоит в том, чтобы уравнения

$$u_j\,(x \ldots p_{0n-1}) = c_j \quad j = 1 \ldots 2n-1$$

были системой $2n-1$ полных интегралов Pfaffo'вой системы $2n-1$ уравнений

$$\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_{2n-3} = 0,$$

независимой относительно $z, p_{10}, \ldots p_{0n-1}$.

... приходим к уже рассмотренному случаю, но для указателя n ...ицу меньшого.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \theta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

C. Russyan.

Première partie.

L'auteur éxpose la méthode de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \theta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

qui est la généralisation de la méthode de Lagrange de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre en reduisant cette intégration à celle du système d'équations aux differentielles totales.

Le point de départ est la recherche de l'intégrale complète du rang $(n-2)$ $(n \geqslant 2)$ c. à d. de l'intégrale $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$ de l'équation (I) qui contient les $2n+1$ constantes arbitraires $c_1 \ldots c_{2n+1}$ et teile que les $2n+1$ équations

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1}), \; p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}, p_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots \; p_{1n-1} = \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y_{n-1}} p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

sont résolubles par rapport aux $c_1 \ldots c_{2n+1}$ sous la forme

$$u_i\,(x, y, z, p_{10}\, p_{01} \ldots p_{0n}) = c_i \;\; i = 1 \ldots 2n+1 \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

les équations (II) étant le système d'intégrales complètes du système aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dz &= p_{10}\, dx + p_{01}\, dy, \\ dp_{10} &= \theta\, dx + p_{11}\, dy, \\ dp_{01} &= p_{11}\, dx + p_{02}\, dy, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ dp_{1n-2} &= \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\, dx + p_{1n-1}\, dy, \\ dp_{0n-1} &= p_{1n-1} dx + p_{0n}\, dy, \end{aligned}$$

où

$$\frac{d\,\vartheta\,(x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-2}, p_{0n-1})}{dy} = \frac{\partial\vartheta}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial\vartheta}{dp_{10}} + p_{02}\frac{\partial\vartheta}{dp_{01}} + \ldots + p_{1n-1}\frac{\partial\vartheta}{dp_{1n-2}} + p_{0n}\frac{\partial\vartheta}{\partial p_{0n-1}},$$

et

$$\frac{d^k\theta}{\partial y^k} = \frac{d}{\partial y}\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}} \quad k = 1 \ldots n-2.$$

Cette méthode donne les résultats obtenus par la méthode des caractéristiques [1]) et par la méthode de J. König [2]) et les résultats nouveanx, qui ne s'obtiennent pas par ces dernières.

L'auteur traite d'abord le cas $n = 2$ et puis celui $n > 2$.

---

[1]) E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. 1898.

[2]) Mathem. Ann., Bd. XXIV.

820

Поправка к статье

„ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЭННЕПЕРА-БЕЛЬТРАМИ НА СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПФАФФОВА УРАВНЕНИЯ

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$ [1]).

В указанной статье во втором выводе формулы пропущен множитель 2 при члене $d\xi\, d\eta$ (на стран. 70 стр. 12 св.), так что напечатанное выражение есть коэффициент при $2d\xi\, d\eta$. Это отразилось на дальнейших формулах, в которые и нужно внести соответствующие исправления, а именно: на стр. 71 с. 4 св. и стр. 72 с. 1 св. численный коэффициент $\frac{1}{2}$ д. б. опущен, в связи с чем и окончательная формула стр. 72 с. 8 св. последний член имеет $-\frac{G.\mathrm{IV}}{(1+p^2+Q^2)}$, и на стр. 73 с. 6 сн. последняя скобка не должна иметь численного коэффициента $\frac{1}{2}$, а в скобках должно быть $\frac{1}{4}\,G.\mathrm{I}$ и наконец последняя формула при I должна иметь множителем не K, а $K + \frac{1}{4}\frac{G}{(1+P^2+Q^2)^2}$, т. е. не полную кривизну, а Гауссову кривизну K'. Только при этом предпоследняя формула и совпадает с формулою (2), если $P^2 + Q^2 + 1$ заменить на 1. Этот множитель $1 + P^2 + Q^2$ на стр. 72 с. 8 св. должен входить как уже указано в 1-й степени, также стр. 73 с. 10 сн., напротив стр. 72 с. 6 св. в среднем столбце — в степени 2, а на стр. 71 с. 7 сн. в 0-й (т. е. д. б. опущен).

Наконец, стр. 71 с. 4 сн. в м. K_1 д. б. K_2, а стр. 72 с. 1 сн. при $Pa_1 + Qb_1$ пропущен множитель $d\xi$.

Д. Синцов.

[1]) Сообщ. Харьк. Мат. Общ. Сер. 4, т. I, стр. 63—73.